

doi:10.3788/gzxb20184709.0917001

# 基于有限元模拟的圆柱边界介质中的光传输

张舒, 陈思雨, 刘玉红, 谭佐军

(华中农业大学 理学院, 武汉 430070)

**摘 要:**应用有限元模拟方法,在外推边界条件下研究圆柱介质中的光传输问题,讨论了不同光学参数条件下圆柱表面空间分辨反射率和穿透深度的规律,并且与有限元分析、Monte Carlo 模拟和解析解方法的结果进行比较.结果表明:有限元模拟的结果与 Monte Carlo 模拟的结果吻合度很好,其空间反射率在光学参数满足漫射近似条件  $\mu'_s/\mu_a \geq 5$  时误差小于 10%,在非近源区甚至小于 5%;穿透深度的值随  $\mu'_s/\mu_a$  值增大而增大,但比 Monte Carlo 模拟的穿透深度略小,误差不超过 7%,且  $\mu'_s/\mu_a$  的值越大时该误差越小.有限元模拟结果比解析解方法的结果误差要更小,解析解方法在  $\mu'_s/\mu_a \geq 5$  时,其误差在非近源区接近 10%,在近源区会超过 15%.此外比较了三种方法的计算速度.单次运算有限元模拟用时约 385 s,甚至比通常用于快速计算的解析解方法(单次运算耗时 416 s)更快,而 Monte Carlo 模拟单次运算耗时 8~9 h.考虑到有限元模拟方法的介质模型构建简便,计算速度快,且模拟结果有着不错的精度,该方法对圆柱边界乃至一般具有曲率的复杂介质中光子辐射传输问题具有非常好的应用前景.

**关键词:**有限元模拟;光子辐射传输;圆柱边界;蒙特卡罗模拟;漫射近似

中图分类号:O439

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2018)09-0917001-10

## Light Diffusion in Turbid Cylinder Based on Finite Element Simulation

ZHANG Shu, CHEN Si-yu, LIU Yu-hong, TAN Zuo-jun

(College of Sciences, Huazhong Agricultural University, Wuhan 430070, China)

**Abstract:** In this paper, we used finite element simulation to study the light diffusion in cylinder. The spatial reflectance of different optical methods was discussed in details. The results were in good agreement with that of Monte Carlo simulation. When  $\mu'_s/\mu_a \geq 5$ , the error was less than 10% and when in the far-source zone, the error was even less than 5%. Besides the light penetration depths obtained from finite element simulation were also very close to the results of Monte Carlo simulation, which was only a little lower due to the diffusion approximation. The error was no more than 7% and decreasing with higher value of  $\mu'_s/\mu_a$ . Moreover, finite element simulation results were more accurate than analytical solution. The error of analytical solution was about 10% in the far-source zone and more than 15% at the near-source zones. The calculation time of the three methods were also compared. For one simulation, it cost about 385 second for finite element simulation, 416 seconds for analytical solution and 8~9 hours for Monte Carlo simulation. The finite element simulation has better accuracy than analytical solution while has much faster calculation speed than Monte Carlo simulation. So it is an effective and promising method to solve light diffusion in cylinder or turbid with curvatures.

**Key words:** Finite element method; Light diffusion; Cylinder boundary; Monte Carlo simulation; Diffusion approximation

**OCIS Codes:** 170.5280; 170.5270; 170.7050; 170.6935

**基金项目:**国家自然科学基金(No.11604112),湖北省自然科学基金青年项目(No.2016CFB325)和中央高校基本科研业务费专项(No.2662016PY059)资助

**第一作者:**张舒(1988-),女,讲师,博士,主要研究方向为光子在生物组织中辐射传输理论. Email: zhangshu@mail.hzau.edu.cn

**通讯作者:**谭佐军(1977-),男,教授,博士,主要研究方向为生物光子学及光电传感. Email: tanzuojun@163.com

**收稿日期:**2018-04-17; **录用日期:**2018-05-31

<http://www.photon.ac.cn>

## 0 引言

生物组织的光学特性以及生物组织中的光传输规律是生物医学光子学的重要研究内容,对生物组织的生理状态诊断具有重要意义.尽管辐射传输方程(Radiative Transfer Equation, RTE)可以精确描述光子在介质中的吸收和散射过程,但难以求得 RTE 的严格的解析解.在实际应用中,通常使用 RTE 方程的一阶近似漫射方程(Diffusion Approximation Equation, DAE)来求解光传输问题的解析解.目前,半无限大平面<sup>[1-4]</sup>、平板<sup>[5]</sup>、平行六面体<sup>[6]</sup>、圆柱<sup>[7-8]</sup>和球<sup>[9]</sup>等多种形状介质的 DAE 解析解已被求得,然而对于非规则形状介质,解析解的求解会成为一个难题.漫射近似要求组织是弱吸收介质(即光学参数满足吸收系数 $\ll$ 散射系数),这意味着这些解析解对于某些实际应用情况也不能很好地满足,例如近红外波段下的猕猴桃果肉组织<sup>[10]</sup>;此外上述 DAE 的解析解在近源区存在较大误差,而近源区信号强度高,信噪比高,在实际应用中也很有意义,因此不应忽略<sup>[11-13]</sup>.

由于生物组织中光传输问题的复杂性,利用数值或统计方法来解决散射理论模型是非常有效的. Monte Carlo(MC)模拟是应用最为广泛的一种方法. MC 模拟不需作漫射近似,能获得精确解. 1995 年汪立宏发表了 MCML 程序后,该方法的结果在介质中光子传输问题领域已经成为了公认的“金标准”<sup>[8,14-16]</sup>,并用于衡量其他方法结果的准确性和有效性.然而, MCML 只适用于多层半无限大平面介质<sup>[17-20]</sup>.近年来,国内外学者在 MCML 的基础上发展了适用于其他形状的 MC 模拟方法.赵会娟等对具有圆柱边界条件的宫颈癌组织结构进行了 MC 模拟<sup>[21]</sup>;Ding 等对多层同心球壳介质进行了 MC 模拟<sup>[22]</sup>.然而 MC 模拟普遍存在计算时间过长的缺点,对需要快速获得结果或者计算平台性能不足的情况下,其应用就受到了限制.

有限元(Finite element)模拟也是有效研究浑浊介质光传输规律的数值方法.该方法可以精确方便地设置介质的形状、大小、边界条件以及光源的情况,并且计算时间较短,能很好地弥补上述两种方法的缺点.用有限元模拟研究介质中光传输规律也引起了研究者关注. Arridge 等研究了不同边界条件(Dirichlet 和 Robin 边界条件)和不同性质的光源(平行光和点光源)下光在介质中传输的性质,定量计算了光能流率,反射率和透射率等<sup>[23]</sup>;WANG 等研究了三种不同边界条件下连续波光束入射的情况;HU 等研究了结构光照射下不同探测距离和空间频率下的反射率变化规律<sup>[24]</sup>;Deulin 等研究了多层半无限大平面介质内光传输规律,与 Monte Carlo 模拟结果吻合较好<sup>[25]</sup>.目前,用有限元模拟法研究非半无限大平面的研究还未见报道.大部分研究都将生物组织视为半无限大平面,但对手臂、腿、脖子、手指等研究对象,圆柱形无疑是更好的近似.目前,仅 Liemert<sup>[16]</sup>等求解了单一圆柱介质和多层圆柱介质的 DAE 的解析解<sup>[7-8,26]</sup>;ZHANG 等求解了无限长空心圆柱结构的 DAE 解析解<sup>[27]</sup>.但是这些解析解的结果都相对比较复杂.事实上,精确简便地设定和构建介质形状及边界条件是有限元模拟方法的优点,因此用有限元模拟光在圆柱形介质内的传输规律值得进一步研究.

本文将应用有限元模拟建立圆柱模型,研究光学参数对光垂直入射圆柱形介质表面后的空间漫反射率和穿透深度的影响,研究不同光学参数下介质表面空间漫反射变化规律,并与 DAE 解析解, Monte Carlo 模拟的结果进行对比,对有限元模拟的模拟精度和在圆柱模型下的适用性进行定量评估.

## 1 理论模型和模拟方法

### 1.1 有限元模拟

本文使用软件 COMSOL Multiphysics 在 Win10 系统(Intel Xeon CPU E5-2623 v3 of 3.00 GHz, 8 GB RAM, 64-bit)下进行有限元模拟.

首先,建立一个有限长的圆柱模型并将其三角网格化用于有限元模拟.设定圆柱的半径为 3 cm,长度为 9 cm.网格划分如图 1.

当光照射到介质上时,光能流率在圆柱介质内的分布为

$$\nabla^2 \Psi - \left( \frac{\mu_a}{D} + \frac{i\omega}{Dc} \right) \Psi = -\frac{1}{D} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1)$$

式中,  $\Psi$  是漫射强度,  $D = \frac{1}{3\mu_t}$  是入射光频率,  $\mathbf{r}_0$  是光源入射位置.

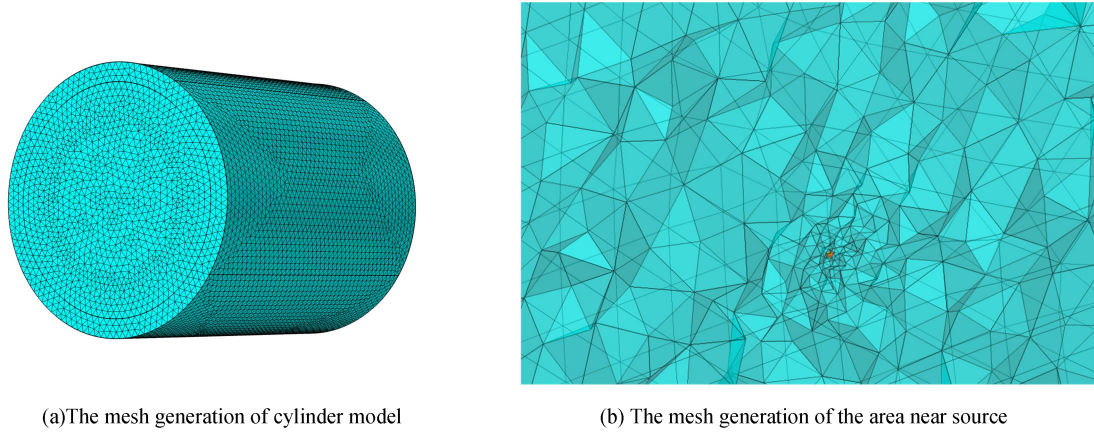


图1 圆柱模型的网格划分示意图  
Fig.1 The mesh generation of cylinder model

从图1可以看到在靠近圆柱边界的地方圆柱的侧面(曲面)和光源附近的区域,网格划分会更细一些.这也是合理的,因为在光源附近和曲面边界附近,能流率变化会相应的剧烈一些,因此这些区域的网格划分更细一些可以提高模拟的精度同时又不会过多的增加计算时间.

圆柱的各边界满足外延边界条件(Epitaxial Boundary Condition, EBC)<sup>[28]</sup>,即

$$\begin{cases} \Psi(\rho, \theta, z = -z_b) = 0 \\ \Psi(\rho, \theta, z = l_z + z_b) = 0 \\ \Psi(\rho = a + z_b, \theta, z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\Psi$  为光能流率,  $a$  为圆柱半径,  $l_z$  为圆柱的高度,  $z_b = \frac{1+R_{\text{eff}}}{1-R_{\text{eff}}}2D$ , 而  $R_{\text{eff}} = -1.440n_{\text{rel}}^{-2} + 0.710n_{\text{rel}}^{-1} + 0.668 + 0.0636n_{\text{rel}}$ .

在模拟中,一束无限细平行光束从圆柱侧面距离顶部 3 cm 的地方垂直入射.在漫射近似,无限细平行光源可以等效为一个各向同性的点光源,该等效点光源位于距边界  $1/\mu_t$  的地方,其中  $\mu_t = \mu_a + \mu'_s$ ,也就是通常所说的光子平均飞行路程.当然这一近似在有些情况下会有轻微的改动,如 WANG 等发现在平行光斜入射的情况下,等效点光源深度设为会更接近实验结果.

为了探究 comsol 模拟对于圆柱边界条件在不同光学参数下的模拟效果,本文中,设计了 10 对不同的光学参数,这 10 对参数分为两组,每组的  $\mu'_s$  值相同,第一组为  $\mu'_s = 0.4 \text{ cm}^{-1}$ ,第二组为  $\mu'_s = 0.8 \text{ cm}^{-1}$ ,每组内设置 5 个不同的  $\mu'_s/\mu_a$ ;具体情况见表 1.

表 1 本文中所使用的光学参数值详情  
Table 1 The optical properties used in simulation

$\mu'_s/\mu_a = 0.5$		$\mu'_s/\mu_a = 1$		$\mu'_s/\mu_a = 5$		$\mu'_s/\mu_a = 10$		$\mu'_s/\mu_a = 50$	
$\mu'_s = 0.4$	$\mu'_s = 0.8$	$\mu'_s = 0.4$	$\mu'_s = 0.8$	$\mu'_s = 0.4$	$\mu'_s = 0.8$	$\mu'_s = 0.4$	$\mu'_s = 0.8$	$\mu'_s = 0.4$	$\mu'_s = 0.8$
$\mu_a = 0.8$	$\mu_a = 1.6$	$\mu_a = 0.4$	$\mu_a = 0.8$	$\mu_a = 0.08$	$\mu_a = 0.16$	$\mu_a = 0.04$	$\mu_a = 0.08$	$\mu_a = 0.008$	$\mu_a = 0.016$

## 1.2 漫射近似下的 RTE 解析解

漫射近似下 RTE 在无限大平面的解析解形式已经广为人知,而圆柱形边界条件下的 DAE 的解析解形式也已经见诸报道<sup>[8]</sup>.若定义  $\mathbf{r} = (\rho'_0, \theta'_0, z'_0)$  为柱坐标下光源的入射位置.则在外推边界条件下,圆柱形介质的 DAE 解析解为

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi D a a'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(s_n \rho'_0) J_m(s_n \rho)}{J_{m+1}^2(a' s_n)} \times \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha |z - z'_0 - 2kl_z - 4kz_b|) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha |z + z'_0 + 2z_b - 2kl_z - 4kz_b|) \right] \quad (3)$$

式中,  $s_n$  为第  $m$  阶贝塞尔函数的第  $n$  个正根,  $\alpha = \sqrt{s_n^2 + \frac{\mu_a}{D} + \frac{i\omega}{Dc}}$ ,  $\varphi$  是入射点和出射点在  $\theta$  方向的夹角.当入

射点在  $\theta=0$  处时,  $\varphi=\theta$ .

则圆柱侧表面的反射率(或透射率)可以通过菲克定律(Fick's law)  $R = -D \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}$  得到. 在本文中所讨论的圆柱形介质的侧面是一个闭合曲面, 因此该表面的反射率和透射率本质上是一样的. 则

$$R(\theta, z, \omega) = \frac{1}{2\pi a a'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(s_n \theta'_0) (s_n J_{m+1}(a s_n) - \frac{m}{a} J_m(a s_n))}{J_{m+1}^{-2}(a' s_n)} \times \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha |z - z'_0 - 2kl_z - 4kz_b|) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha |z + z'_0 + 2z_b - 2kl_z - 4kz_b|) \right] \quad (4)$$

### 1.3 Monte Carlo 模拟

本文采用一种改进的 Monte Carlo 模拟方法来模拟具有圆柱形状的介质. 在模拟中, 圆柱形介质是由许多小立方体, 通常称之为体素的小方块所构成的. 模拟时可以自行定义圆柱介质的半径和高度以及体素的边长. 定义好之后根据介质的大小和位置可以确定每个体素所在的组织类型同一种类型组织的体素用同一种数字表示, 不同类型组织的数字用不同数字表示, 通常用 0 表示模型外体素. 每一个体素都有唯一的下标  $(ix, iy, iz)$  标识, 根据体素的下标用公式  $k = ix + iz \times \text{dim} + iy \times \text{dim} \times \text{dim}$  映射到一维空间中并记录下组织数据. 当然体素的边长设置的越小生成的圆柱模型表面会越光滑越接近真实的圆柱, 但同时这也会极大地增加计算时间. 在本文结果与讨论部分的 Monte Carlo 模拟, 体素的边长取 0.01 cm, 一次模拟发射光子为五百万个, 一次模拟需要 8~9 h.

为了评估该 Monte Carlo 模拟方法的统计误差, 运行 Monte Carlo 模拟 10 次. 由于单次模拟耗时较长, 为了节省时间, 这里的 10 次模拟均设置体素边长为 0.05 cm, 一次模拟发射光子为 50 万个. 模拟所用的圆柱介质仍然是半径为 3 cm, 高度为 9 cm. 模拟所用的光学参数为  $\mu'_s = 0.4 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\mu_a = 0.04 \text{ cm}^{-1}$ . 比较圆柱表面距离入射点不同位置的反射率  $R$  的统计误差, 结果如表 2 所示. 在柱坐标下,  $\Delta\theta$  表示距离入射点的角度,  $\Delta z$  表示距离入射点的垂直距离. 由于样本数仅为 10, 表 2 中的误差按  $t$  分布估计, 其置信度为 98%.

表 2 Monte Carlo 方法的统计误差  
Table 2 statistical error of Monte Carlo method

$R(\Delta\theta = \pi, \Delta z = 0)$	$R(\Delta\theta = \pi, \Delta z = 1 \text{ cm})$	$R(\Delta\theta = \frac{\pi}{2}, \Delta z = 1 \text{ cm})$
$0.03518 \pm 0.0001$	$0.02475 \pm 0.00008$	$0.04163 \pm 0.0001$

## 2 结果与讨论

### 2.1 有限元模拟方法和其他方法模拟时间的比较

有限元模拟方法用于解决光在圆柱形介质内的辐射传输问题具有其自身的优势, 除了对介质模型的构建非常方便精确之外, 能够快速运算也是一大特点. 为了评估比较有限元模拟, Monte Carlo 模拟和解析解结果三种方法的运算速度, 对这三种方法的运行时间进行了统计.

这三种方法均在同一台电脑上运行, 电脑配置见 1.1 节所述. 每种方法均对 1.1 中所列的 10 对光学参数分别进行了模拟计算. 不同的光学参数对计算速率略有影响, 但整体影响不是很大, 因此每种方法的运算时间取为这 10 对光学参数运算时间的平均值. 具体结果见表 3, 表中的时间单位均为秒. 表 3 中误差的置信度为 95%.

表 3 Monte Carlo 方法的统计误差  
Table 3 Statistical error of Monte Carlo method

Method	Finite element simulation	Monte Carlo simulation	Analytical solution
Calculation time of one simulation	$385 \pm 8.3$	$31736 \pm 320.0$	$416 \pm 9.5$

可以看到, Monte Carlo 模拟的单次运行时间要远大于另外两种方法. 当然这是由于为了使圆柱模型边界尽可能平滑, 体素边长取的较小仅为 0.01 cm, 单次模拟发射的光子数也选取了 500 万个. 通过增加体素边长, 减小单次模拟发射的光子数量可以适当减少 Monte Carlo 模拟的单次运行时间, 但是这会牺牲 Monte Carlo 模拟结果的精度. 因此对于带有曲率的表面, 为了准确模拟, Monte Carlo 运算所需花费的时间是非常

巨大的.而有限元模拟单次运行的时间和通常用于快速计算的解析解方法差不多,在 5~10 分钟之内,有限元模拟的运算速度还要稍快一些.因此有限模拟方法在运算速度上是非常有优势的.接下来进一步来评估有限元模拟结果的误差情况.

### 2.2 反射率分布规律

对圆柱侧面的反射率分布情况进行了讨论.选取圆柱侧面上距顶面 4cm 处的沿  $\theta$  方向,即圆周一圈的维度上的反射率分布,其结果如图 2.图 2 中的图例-C 表示有限元模拟的 Comsol 结果,-MC 表示 Monte Carlo 模拟结果,-AS 表示解析解 (Analytical Solution) 的结果.可以看到,在不同的光学参数条件下,圆柱侧面反射率的变化非常明显.

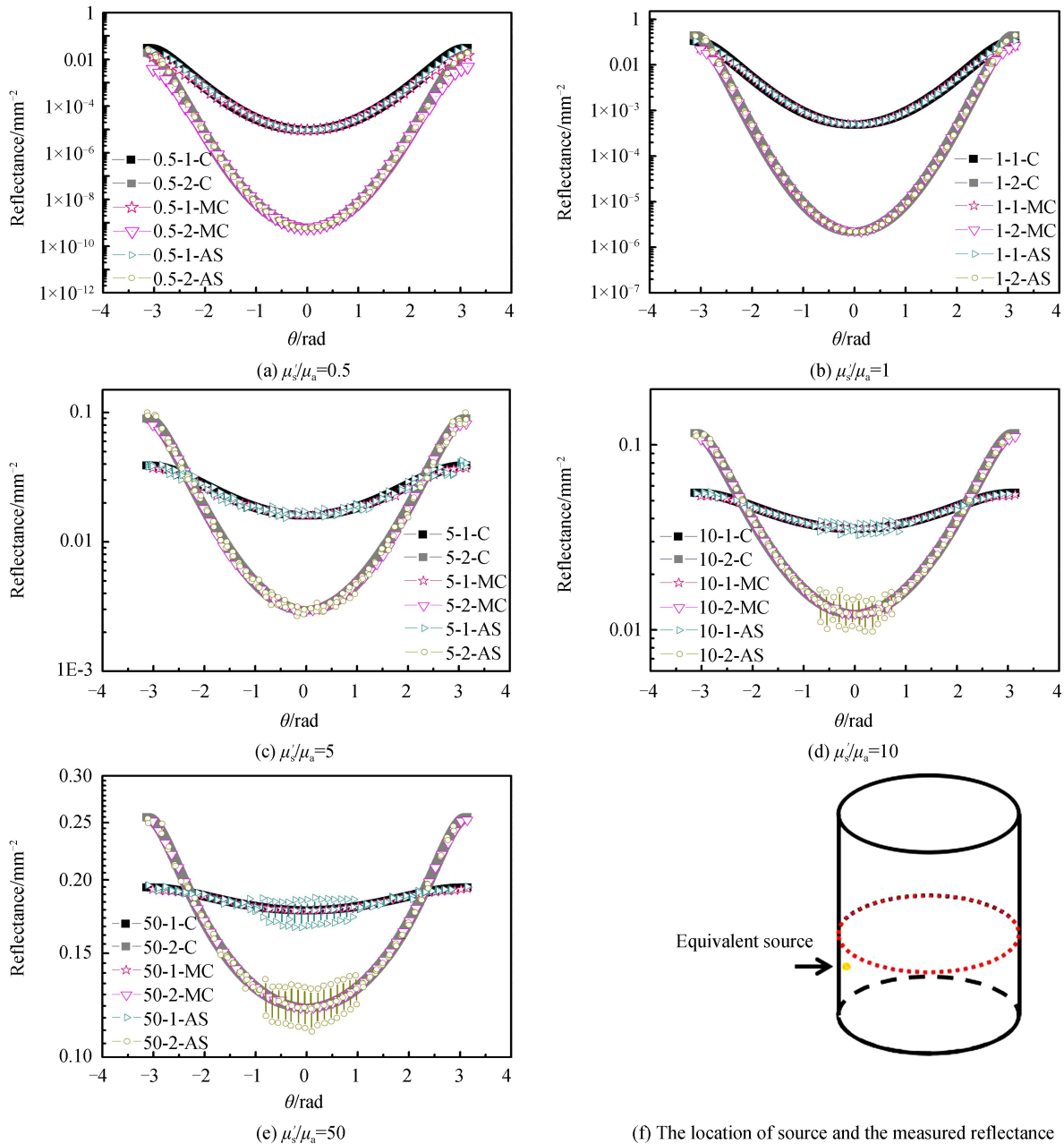


图 2 不同光学参数下空间反射率比较.虚线即为测量反射率的位置

Fig.2 The spatial reflectance along the  $\theta$  direction of different optical properties

此外比较了有限元模拟结果和 DAE 圆柱解析解的结果以及 Monte Carlo 模拟结果.总体来说,这三种方法得到的结果吻合.由于 Monte Carlo 模拟的结果被视为金标准,本文以 Monte Carlo 模拟结果作为标准,比较各方法之间的误差,误差结果如图 3 所示.可以看到主要的误差出现在两处,其一是靠近  $\theta=0$  和  $\theta=2\pi$

处的反射率.这两个角度其实在圆周上是一个位置,即入射光源附近的位置.我们知道,漫射近似的结果在光源附近的区域(近光源区)是不太准确的,尤其当光学参数结果不满足散射系数远大于吸收系数时(即不满足漫射近似条件时),这一误差更大.而有限元模拟正是基于 DAE,因此也在这一区域出现了不小误差.不过可以看到,相比起解析解在近源区的误差,有限元模拟的结果的误差仍然要小一些.此外在光学参数满足漫射近似的情况下,解析解的结果还出现了局部振荡的情况(如图 2(d)、(e)).这很可能是由于解析解为一个无穷级数之和(Eq.4),但在实际运算时不可避免地只能取级数的有限项(本文中所取级数项数最大值为  $m=50$ ,  $n=50$ ,  $k=100$ ),后面的项只能省略,这一点对解析解的结果也带来了更大的误差.而增加所取的级数的项数无疑会增加解析解计算的时间,使其丧失快速计算的优势.而有限元模拟结果相比 Monte Carlo 模拟虽然也存在一定误差,但在非近源区以及  $\mu'_s/\mu_a \geq 5$  的情况下,该误差在一个比较小的范围内,如图 3.考虑到 Monte Carlo 模拟所花费的运算时间巨大,计算机硬件要求相对较高等情况,对于圆柱边界介质的模拟,有限元模拟还是相当具有优势的.

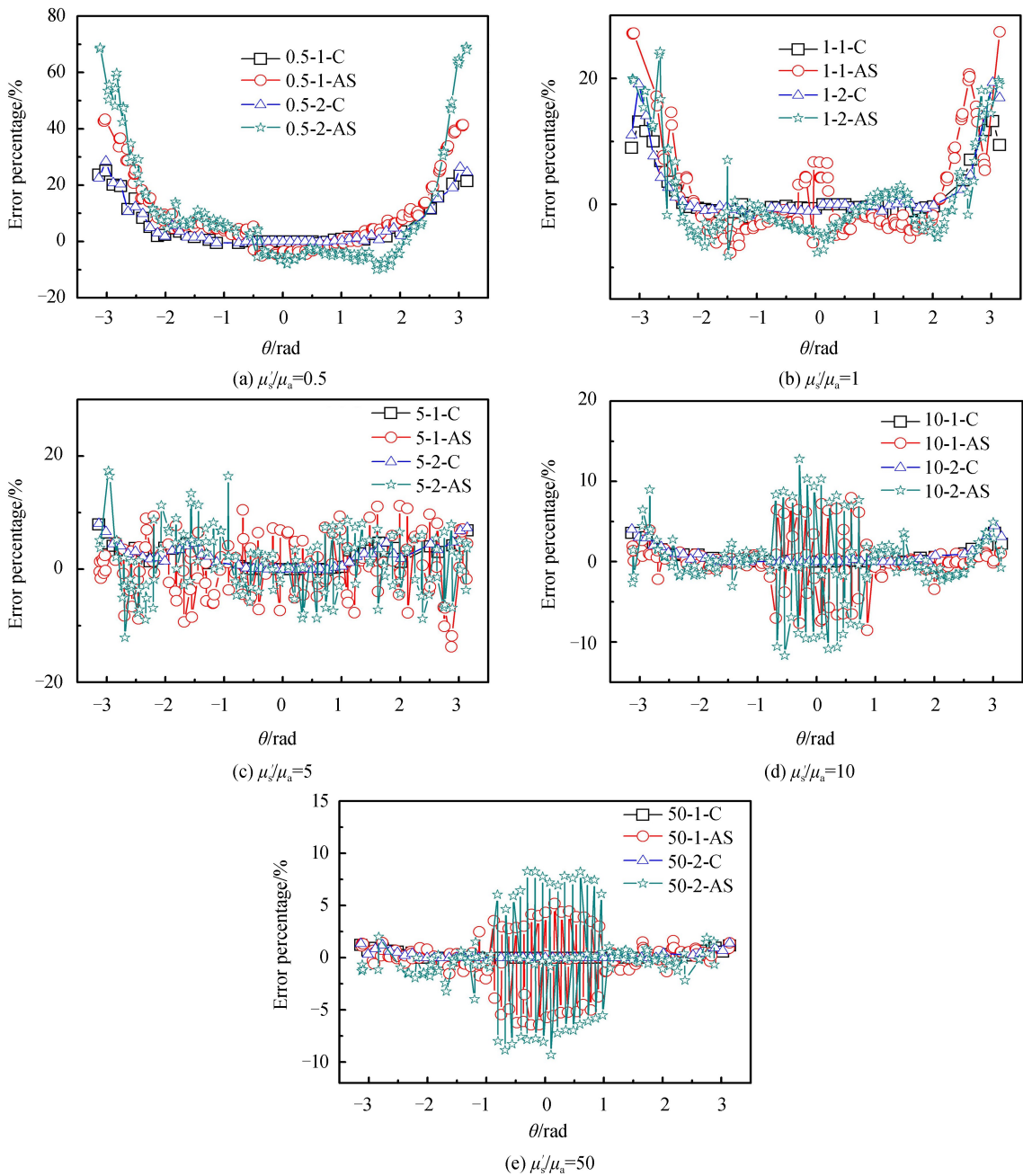


图 3 不同光学参数下空间反射率的误差值比较

Fig.3 The error percentage of spatial reflectance along the  $\theta$  direction of different optical properties

讨论圆柱侧面沿  $z$  方向(轴向)分布的反射率,其结果如图 4,所选取的是  $\theta = \pi$  处,如图 4(f)虚线所示,图 4 中的图例-C 表示有限元模拟的 Comsol 结果,-MC 表示 Monte Carlo 模拟结果,-AS 表示解析解 (Analytical Solution)的结果.在该方向分布上,反射率强度在光源入射的  $z$  位置(即 3cm 处)均有一个凸起.对于不同的光学参数, $z$  方向分布反射率强度差异较大.但是沿  $z$  方向的反射率强度分布有限元模拟和 Monte Carlo 模拟的结果均吻合得较好.并且这三种方法的误差也相对较小(如图 5),对于不同的光学参数,其误差均不高于 5%.

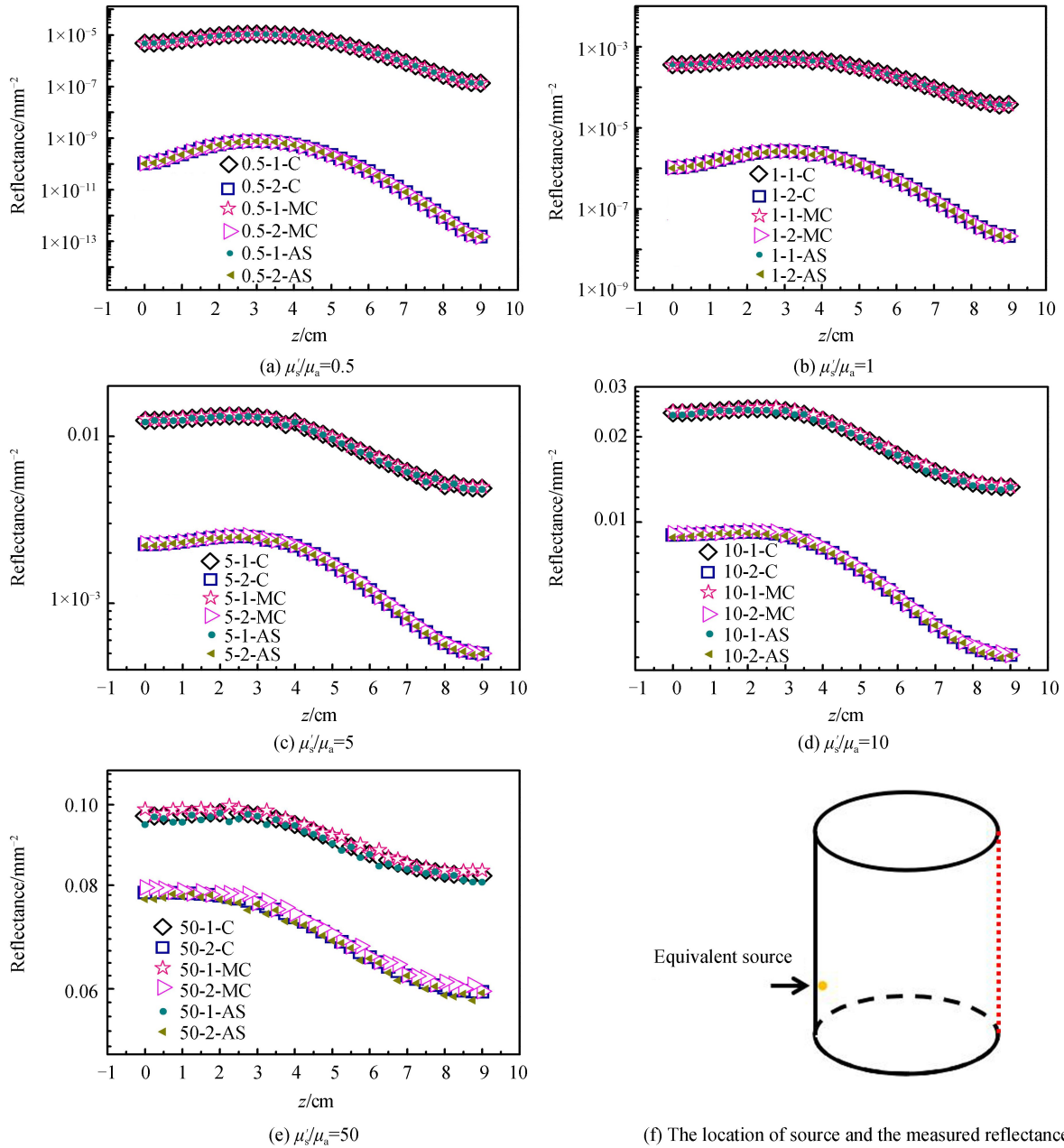


图 4 不同光学参数下空间反射率比较.虚线即为测量反射率的位置  
 Fig.4 The spatial reflectance along the  $z$  direction of different optical properties

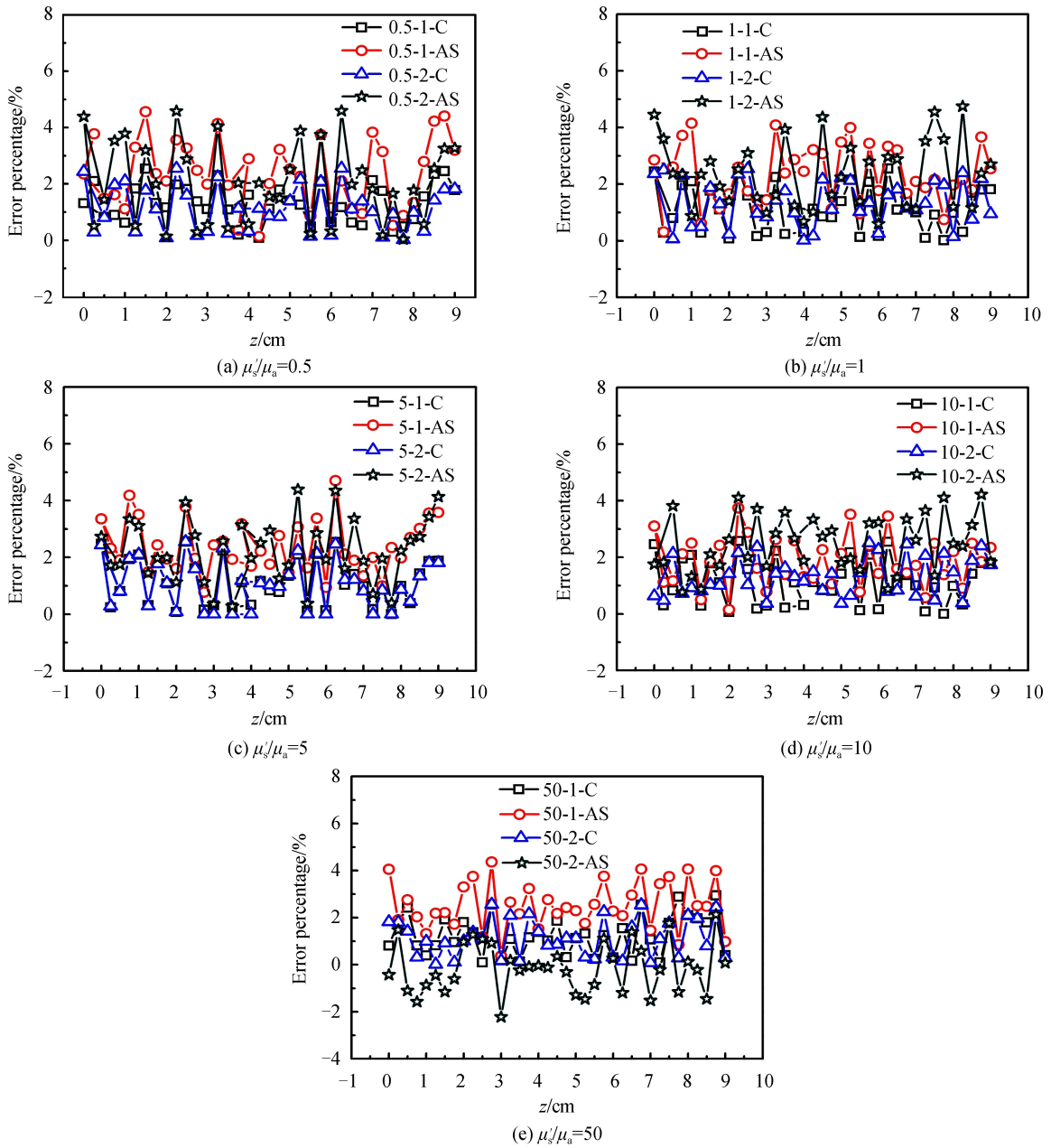


图5 不同光学参数下空间反射率的误差值比较

Fig.5 The error percentage of spatial reflectance along the z direction of different optical properties

### 2.3 穿透深度的比较

光子在生物组织内部的所能到达的位置也是经常被关心的问题,因此有必要进一步讨论不同光学参数下的穿透深度的变化.定义当光子能量降低到入射总能量的0.1%时所达到的位置为最大穿透深度,不同光学参数下的最大穿透深度如图6所示.由于解析解结果无法直接获得穿透深度这一物理量,所以在这一部分只比较有限元模拟和 Monte Carlo 模拟的结果.这表明有限元模拟比解析解方法更具优势,能够计算更多物理量.

对于不同的光学参数,光子的最大穿透深度有明显的差异.对于同一 $\mu'_s/\mu_a$ 比值,第二组( $\mu'_s=0.8\text{ cm}^{-1}$ )明显比第一组( $\mu'_s=0.4\text{ cm}^{-1}$ )穿透深度要小,这表明吸收系数和散射系数越小时,穿透深度越大.而且对于同一 $\mu'_s$ 值, $\mu'_s/\mu_a$ 增大的时候穿透深度增大非常显著,这也意味着吸收系数的变化对穿透深度的影响要更大一些.事实上,这两种方法获得的光子能量曲线是不完全一致,这是由于有限元模拟采用漫射近似,将无限细光束等效为一个点光源,而不同的光学参数下等效点光源的位置不同;但 Monte Carlo 方法还是将入射光



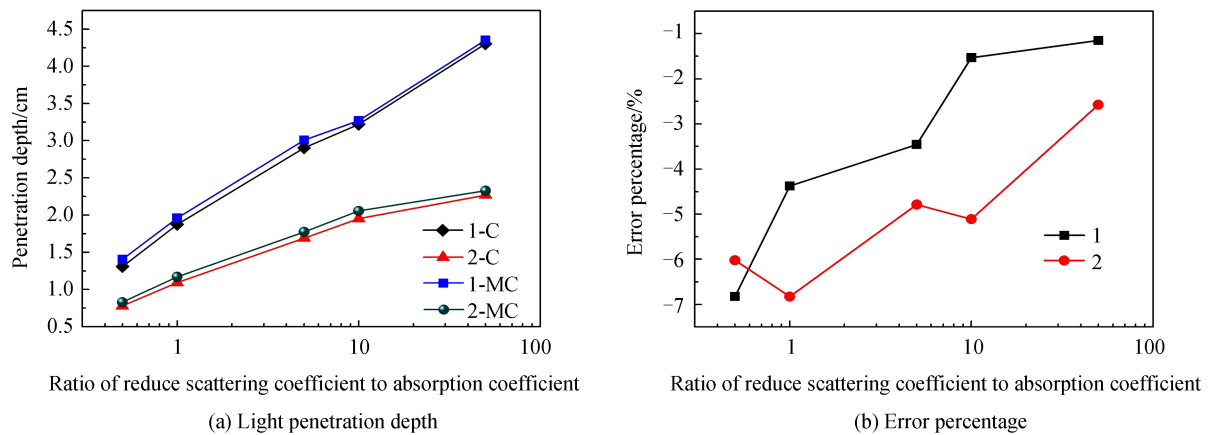


图6 有限元模拟和 Monte Carlo 模拟不同光学参数下的光穿透深度

Fig.6 The light penetration depth results of Finite element and Monte Carlo simulation

视为无限细平行光束以及外推边界条件,从而导致了两种方法结果的差异.尽管如此,有限元模拟和 Monte Carlo 模拟结果得到的穿透深度几乎是一致的, Monte Carlo 模拟的结果稍微偏大一点点.这个误差很有可能也来自有限元模拟所用的漫射近似方程,漫射近似将光源等效为一个各项同性的点光源,而将等效光源高阶项视为 0,因此会导致整体光穿透深度的减小,但可以看到对于穿透深度的判断,这种误差非常的小,因此在研究穿透深度的时候,有限元模拟的结果也是很可靠的.

### 3 结论

本文讨论了应用有限元模拟方法对不同组光学参数下圆柱边界介质的一些反射率和穿透深度的结果,并将上述结果分别与目前常见的 DAE 方程解析解和 Monte Carlo 模拟结果进行了比较.可以看到,有限元模拟的结果基本上和上述两种方法吻合得较好.与漫射近似的 DAE 方程解析解相比,有限元模拟的结果要比解析解的结果更接近 Monte Carlo 模拟的结果;而有限元模拟结果相比 Monte Carlo 模拟虽然存在一些误差,但在非近源区以及  $\mu'_s/\mu_a \geq 5$  的情况下,该误差在一个比较小的范围内.在穿透深度方面,有限元模拟的结果也和 Monte Carlo 模拟的结果吻合得非常好.基于上述分析结果,有限元模拟方法是一种非常有潜力的研究光子在圆柱边界介质中传播问题的方法,它既具有 Monte Carlo 所欠缺的计算时间短,建模灵活方便的特点,又保持有不错的误差精度,甚至比传统用于快速计算的 DAE 方程解析解的结果更精确.在更复杂形状介质乃至实际物体模型的光子辐射传输问题的模拟上具有更大的优势.

#### 参考文献

- [1] KIENLE A, PATTERSON M S. Improved solutions of the steady-state and the time-resolved diffusion equations for reflectance from a semi-infinite turbid medium[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1997, **14**(1): 246-254.
- [2] LIEMERT A, KIENLE A. Exact and efficient solution of the radiative transport equation for the semi-infinite medium [J]. *Scientific Reports*, 2013, **3**(6): 02018.
- [3] BASSI A, CUCCIA D J, DURKIN A J, *et al.* Spatial shift of spatially modulated light projected on turbid media[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2008, **25**(11): 2833-2839.
- [4] FARRELL T J, PATTERSON M S, WILSON B. A diffusion theory model of spatially resolved, steady - state diffuse reflectance for the noninvasive determination of tissue optical properties in vivo[J]. *Medical Physics*, 1992, **19**(4): 879-888.
- [5] MARTELLI F, CONTINI D, TADDEUCCI A, *et al.* Photon migration through a turbid slab described by a model based on diffusion approximation. II. Comparison with Monte Carlo results[J]. *Applied Optics*, 1997, **36**(19): 4587-4599.
- [6] KIENLE A. Light diffusion through a turbid parallelepiped[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, **22**(9): 1883-1888.
- [7] LIEMERT A, KIENLE A. Light diffusion in a turbid cylinder. II. Layered case[J]. *Optics Express*, 2010, **18**(9): 9266-9279.
- [8] KIENLE A, LIEMERT A. Light diffusion in a turbid cylinder. I. Homogeneous case[J]. *Optics Express*, 2010, **18**(9): 9456-9473.

- [9] SASSAROLI A, MARTELLI F, ZACCANTI G, *et al.* Performance of fitting procedures in curved geometry for retrieval of the optical properties of tissue from time-resolved measurements[J]. *Applied Optics*, 2001, **40**(1): 185-197.
- [10] FANG Zhen-huan. Development and application of a single integrating sphere system for detecting optical properties of fruit tissue[D]. Zhejiang University, 2015.  
方振欢. 用于水果组织光传输特性检测的单积分球系统研制及应用[D]. 2015, 浙江大学
- [11] TIAN Hui-juan, NIU Ping-juan. Sensitivity of delta-P1 approximation model to the reduced scattering parameter[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(3): 034201.  
田会娟, 牛萍娟. 基于 delta-P1 近似模型的空间分辨漫反射一阶散射参量灵敏度研究[J]. 物理学报, 2013, **62**(3): 034201.
- [12] TIAN Hui-juan, LIU Ying, WANG Li-jun, *et al.* Hybrid diffusion approximation in highly absorbing media and its effects of source approximation[J]. *Chinese Optics Letters*, 2009, **7**(6): 515-518.
- [13] LIU Ying, LIU Xiao-jun, QI Bei-bei, *et al.*  $\delta$ -P<sub>1</sub> approximation model of biological tissues[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(7): 074204.  
刘迎, 刘小君, 齐贝贝, 等. 生物组织的  $\delta$ -P<sub>1</sub> 近似漫反射光学模型[J]. 物理学报, 2011, **60**(7): 074204.
- [14] QIN J, LU R. Monte Carlo simulation for quantification of light transport features in apples[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2009, **68**(1): 44-51.
- [15] DING C, SHI S, CHEN J, *et al.* Analysis of light transport features in stone fruits using Monte Carlo simulation[J]. *PLoS One*, 2015, **10**(10): e0140582.
- [16] WANG J, WANG G, XU Z. Monte Carlo simulation of photon migration path in turbid media[J]. *Chinese Optics Letters*, 2008, **6**(7): 530-532.
- [17] WANG Z, HOU R, LAN H, *et al.* Light transport in multi-layered farm products by using Monte Carlo simulation and experimental investigation[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2007, **23**(5): 1-7.
- [18] WANG Xi-chang. Steady-state diffusion equation of light in semi-infinite multilayer rectangular biological tissues[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, **36**(3): 0317003.  
王喜昌. 光在半无限厚多层矩形生物组织中的稳态漫射方程[J]. 光学学报, 2016, **36**(3): 0317003.
- [19] WANG Z, HOU R, LAN H, *et al.* Light transport in multi-layered farm products by using Monte Carlo simulation and experimental investigation[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2007, **23**(5): 1-7.
- [20] LIEMERT A, KIENLE A. Light diffusion in N-layered turbid media[C]. SPIE, 2009, 73690.
- [21] ZHANG Shun-qi, HOU Shao-hua, ZHAO Hui-juan, *et al.* Frequency-domain inverse Monte Carlo simulation for the diagnosis of the early cervical cancer based on NIR diffuse measurement[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(7): 1800-1805.  
张顺起, 侯少华, 赵会娟, 等. 近红外光早期宫颈癌诊断的频域逆蒙特卡洛光学参量重构研究[J]. 光子学报, 2009, **38**(7): 1800-1805.
- [22] TAN Z Z, XIE J, CHEN J J, *et al.* Optimization of detection device geometry for NIR spectroscopy using a three-layered model of stone fruit[J]. *Optical Review*, 2016, **23**(5): 784-790.
- [23] ARRIDGE S R, SCHWEIGER M, HIRAOKA M, *et al.* A finite element approach for modeling photon transport in tissue[J]. *Medical Physics*, 1993, **20**(2 Pt 1): 299-309.
- [24] WANG A, LU R, XIE L. Finite element modeling of light propagation in turbid media under illumination of a continuous-wave beam[J]. *Applied Optics*, 2016, **55**(1): 95-103.
- [25] L'HUILLIER J P. Finite element approach to photon propagation modeling in semi-infinite homogeneous and multilayered tissue structures[J]. *European Physical Journal Applied Physics*, 2006, **33**(2): 133-146.
- [26] LIEMERT A, KIENLE A. Light diffusion in N-layered turbid media: frequency and time domains[J]. *Journal of Biomedical Optics*, 2010, **15**(2): 025002.
- [27] ZHANG A, PIAO D, BUNTING C F, *et al.* Photon diffusion in a homogeneous medium bounded externally or internally by an infinitely long circular cylindrical applicator. I. Steady-state theory[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, **27**(3): 648-662.
- [28] ZHANG Rui, LIU Xiao-lin, BAO Hong-ji, *et al.* Boundary condition's influence on simulation of time resolved reflectance for biological tissue[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(6): 675-679.  
张睿, 刘小林, 鲍鸿吉, 等. 边界条件对生物组织漫射光时域模拟计算的影响[J]. 光子学报, 2001, **30**(6): 675-679.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (No.11604112), Natural Science Foundation of Hubei Provincence (No. 2016CFB325) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (No.2662016PY059)

引用格式: ZHANG Shu, CHEN Si-yu, LIU Yu-hong, *et al.* Light Diffusion in Turbid Cylinder Based on Finite Element Simulation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, **47**(9): 0917001

张舒, 陈思雨, 刘玉红, 等. 基于有限元模拟的圆柱边界介质中的光传输[J]. 光子学报, 2018, **47**(9): 0917001