

doi: 10.3788/gzxb20184707.0712003

基于时变 ARMA 模型的 MEMS 陀螺随机误差 补偿技术

宋金龙, 石志勇, 王律化, 王海亮

(陆军工程大学石家庄校区, 石家庄 050003)

摘 要: 为了提高微机电系统(MEMS)陀螺的测量精度, 提出了一种基于遗忘因子递推最小二乘估计的时变自回归滑动平均(ARMA)模型补偿方法. 针对实测 MEMS 陀螺去除趋势项后的随机漂移信号, 采用分段检验方式进行了平稳性分析, 选取合适的基函数以及子空间维数进行时变 ARMA 模型建模. 采用遗忘因子递推最小二乘估计的方式进行模型参数估计, 通过设置遗忘因子, 使得更新后的模型参数能够反映信号的动态变化. 针对存在轻微波动的时变参数, 采用 5 阶多项式对时变模型参数进行拟合, 并提出一种解析法进行参数寻优, 从而建立最优随机漂移模型. 将建模结果应用于卡尔曼滤波, 进行随机漂移补偿, 将补偿结果与时不变 ARMA 模型建模补偿方式的补偿结果进行对比发现, 所提方法补偿后的残差方差比时不变 ARMA 模型补偿后的残差方差降低了近 40%, 有效提高了 MEMS 陀螺随机漂移的补偿精度.

关键词: 传感器技术; 微机电系统陀螺; 自回归滑动平均模型; 随机漂移; 遗忘因子递推最小二乘法

中图分类号: V241.5

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2018)07-0712003-10

Random Error Compensation Technology of MEMS Gyroscope Based on Time-varying ARMA Model

SONG Jin-long, SHI Zhi-yong, WANG Lü-hua, WANG Hai-liang

(Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: In order to improve the measurement accuracy of Micro Electro Mechanical System (MEMS) gyroscope, a time varying Auto-Regressive and Moving Average (ARMA) Model compensation method based on forgetting factor recursive least squares estimation was proposed. According to the measured MEMS gyro random drift signal without trend item, the stability was analyzed by the subsection test and the time varying ARMA was built with the suitable basis function and subspace dimension. The model parameters were estimated with the Forgetting Factor Recursive Least Square (FFRLS) method by setting forgetting factor to make it possible that the model parameters can reflect the dynamic change of the signal. For the time varying parameters with slight fluctuation, the 5 order polynomial was used to fit the parameters of the time-varying model, and an analytical method was proposed to optimize the parameters, so as to establish the optimal random drift model. And the modeling results were applied to Kalman filter for random drift compensation. The compensation results of the proposed method were compared with the compensation results of the time invariant ARMA modeling compensation method. The comparison results indicated that the variance of the signal with the proposed method compensation is nearly 40% reduced by the variance of the signal with the time invariant ARMA model compensation. So the compensation precision of MEMS gyro random drift was improved effectively.

Key words: Sensor technology; Micro electro mechanical system gyroscope; Auto-regressive and moving

基金项目: 国防预研基金(No.9140A09031715JB34001)资助

第一作者: 宋金龙(1991-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为车辆导航控制. Email: sjzsong_jl@163.com

导师(通讯作者): 石志勇(1965-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为惯性导航等. Email: szy651010@163.com

收稿日期: 2018-01-23; 录用日期: 2018-03-29

<http://www.photon.ac.cn>

average model; Random drift; Forgetting factor recursive least square method

OCIS Codes: 120.0120;120.3930;230.4685

0 引言

微机电系统(Micro Electro Mechanical System, MEMS)^[1]陀螺具有体积小、重量轻、成本低等突出优点,因而被广泛应用于现代导航的各领域.但是,目前 MEMS 陀螺与传统陀螺相比,精度较低,因此对 MEMS 陀螺进行误差分析、补偿,具有极其重要的意义.

MEMS 惯性器件的误差分为确定性误差和随机误差.由于确定性误差可以借助标定试验进行标定补偿,而随机误差受到结构噪声、电路噪声等因素的影响,随机性较强,补偿难度较大,因此,随机误差逐渐成为制约 MEMS 惯性器件精度提高的主要因素之一.MEMS 惯性器件的随机误差主要分析方法有 Allan 方差、功率谱密度、时间序列分析等.文献[2]对 MEMS 陀螺随机误差进行了自回归滑动平均(Auto-Regressive and Moving Average Model, ARMA)模型建模,并通过卡尔曼滤波技术对其进行了补偿,但是建模前需对 MEMS 陀螺输出进行诸多预处理.文献[3]针对 MEMS 陀螺信号进行了详细的数据预处理介绍,之后针对处理后的平稳信号进行时间序列分析,并结合卡尔曼滤波在 MEMS 陀螺静态、动态情况下进行了随机误差的补偿验证.文献[4]将渐消卡尔曼滤波器与 ARMA 模型相结合,进一步提高了 MEMS 陀螺随机误差的补偿效果.文献[5]建立了 MEMS 陀螺的随机漂移模型和机动角速率模型,并通过卡尔曼滤波实现了对随机漂移和角速率的精确估计.文献[6]将 ARMA 模型与车辆导航误差方程相结合,对卡尔曼滤波器的状态变量进行了增广,实现了 MEMS 陀螺零偏误差的估计,并通过实车试验,证明了该方法的可行性.文献[7]采用高阶自回归 AR 模型实现 MIMU 随机误差建模,这种方法会扩大滤波器状态维数,可能导致滤波不稳定甚至发散.文献[8]采用 ARMA 模型分析了 MIMU 误差源,但未给出随机误差模型的定量描述.文献[9]根据 MEMS 陀螺信号的不同速率选择不同的滤波方法,结合 ARMA 模型、最小二乘法等建立噪声切换抑制方法,提高了系统的动态降噪效果.文献[10]通过建立传感器随机漂移的时间序列模型,并通过卡尔曼滤波进行了传感器漂移的预测补偿,为随机漂移的补偿方法提供了新思路.

采用时不变 ARMA 模型对 MEMS 陀螺随机误差进行建模补偿法需要对 MEMS 陀螺输出信号进行一阶差分、二阶差分等预处理,得到平稳信号后才能采用时不变 ARMA 模型进行建模分析.由于 MEMS 陀螺信号受到外部环境及内部因素的干扰,其输出信号的平稳性往往难以保证^[11].对非平稳信号进行差分处理,并对差分结果建模分析,存在一定误差.文献[12]指出采用越精确的 ARMA 模型进行建模,补偿效果越好.因此,本文首先对 MEMS 陀螺信号进行了去除趋势项预处理,之后对去除趋势项的信号进行平稳性检验,并尝试采用时变 ARMA 模型对随机漂移信号进行建模.采用遗忘因子递推最小二乘估计提取模型的动态参数,并采用 5 阶多项式对动态参数进行拟合,用解析法进行时变模型参数寻优,并将建模结果应用于卡尔曼滤波中,从而提出了一种基于遗忘因子递推最小二乘估计的时变 ARMA 模型建模方法.并利用该方法对 MEMS 陀螺随机漂移进行建模补偿,最后将补偿结果与时不变 ARMA 模型建模补偿结果进行了对比,所提方法表现出了更优良的补偿性能,为后续 MEMS 惯性器件进行高精度导航提供理论基础.

1 时变 ARMA 建模

1.1 数据采集及处理

由于 MEMS 陀螺对温度敏感,所以本文对恒温情况下陀螺输出的角速率进行采集,外部转台的输入为零,得到陀螺 6 000 s 的输出信号.陀螺的原始输出信号中包含常值分量和随机分量,文献[13]分析了采用平滑先验方法、多项式拟合、经验模态分解三种方式对 MEMS 陀螺信号中的趋势项进行了提取分析,经验模态分解效果较好,但计算复杂,多项式拟合次之,平滑先验算法再次.本文对陀螺输出的原始信号进行 4 阶多项式拟合,将原始输出与拟合结果做差即可获取 MEMS 陀螺的随机漂移.4 阶多项式拟合与原始信号的对比结果及其去除趋势项后的随机漂移如图 1,可见随机漂移中不再含有明显的趋势项,能够用于下一步的数据处理.

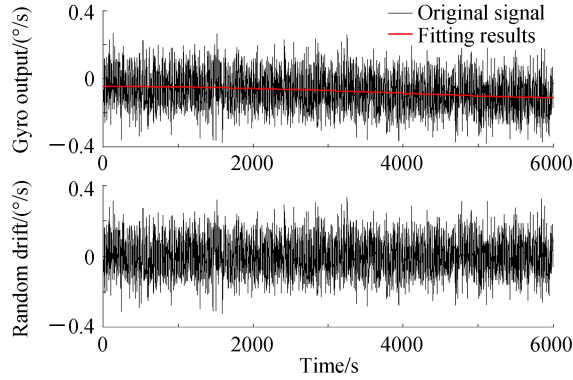


图 1 MEMS 陀螺的原始输出及其随机漂移
Fig.1 The original signal and random drift of MEMS Gyro

1.2 平稳性检验

文献[9]指出不管是有用信息还是误差信息,本质上都是信号,对其建立 ARMA 模型反映了信号的内部变化规律,模型越精确,卡尔曼滤波效果越好.进行时不变 ARMA 模型建模前,通常会对去除趋势项后的随机漂移信号进行差分等预处理,直至得到平稳的随机漂移信号为止,但势必会降低 ARMA 模型对原始随机信号的代表能力.对信号进行一二阶差分处理后,其差分结果与原始信号的对比结果如图 2.由图 2 可见,差分处理后,差分结果与原始信号的差异较大,因此对差分结果进行时不变 ARMA 模型建模,也就难免存在误差.

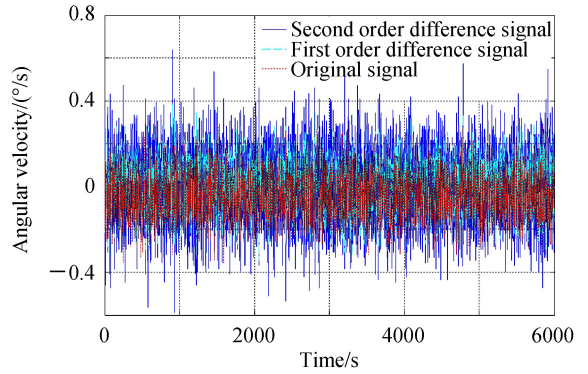


图 2 原始信号与一、二阶差分信号的对比结果
Fig.2 The comparison between original signal and first, second order difference signal

在进行 ARMA 模型建模前,需要对原始信号进行平稳性检验.文献[14]中对平稳随机过程定义如下:当所有描述随机过程的分布函数均同统计起点无关时,则称此随机过程为严平稳随机过程;当只有描述随机过程的一阶与二阶分布函数同统计起点无关时,称之为宽平稳随机过程.本文采用分段检验的方式对随机漂移信号的平稳性进行检验.

针对时序 $\{x_t\} (t=1, 2, \dots, N)$ 的样本,将 $\{x_t\}$ 均匀的分成 l 段子序列 $\{x_{1t}\}, \{x_{2t}\}, \dots, \{x_{lt}\}$, 每段子序列包含元素个数为 $M, N=lm$, 第 j 段子序列为

$$\{x_{jt}\} = x_{(j-1)M+t} \quad (j=1, 2, \dots, l; t=1, 2, \dots, M) \quad (1)$$

各段子序列的均值、方差和自协方差函数的估计值为

$$\mu_j = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M x_{jt} \quad (2)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M (x_{jt} - \mu_j)^2 \quad (3)$$

$$R_{j,k} = \frac{1}{M-k} \sum_{t=k+1}^M (x_{jt} - \mu_j)(x_{j,t-k} - \mu_j) \quad (4)$$

如果 $\{x_t\}$ 是平稳正态序列,取显著性水平为 0.05 时,任意两个子序列 $\{x_{it}\}, \{x_{jt}\}$ 之间满足关系

$$|\mu_i - \mu_j| > 2.77\sigma(\mu_j) \quad (5)$$

$$|\sigma_i^2 - \sigma_j^2| > 2.77\sigma(\sigma_j^2) \quad (6)$$

$$|R_{i,k} - R_{j,k}| > 2.77\sigma(R_{j,k}) \quad (7)$$

式中 $i \neq j$, 此时,认为 μ_i 和 μ_j, σ_i^2 和 $\sigma_j^2, R_{i,k}$ 和 $R_{j,k}$ 之间存在显著差异,拒绝 $\{x_t\}$ 的平稳假设,反之,认为 $\{x_t\}$ 平稳.式(5)~(7)中 $\sigma(\mu_j), \sigma(\sigma_j^2), \sigma(R_{j,k})$ 分别为 $\mu_j, \sigma_j^2, R_{j,k}$ 的理论均方差,即

$$\sigma^2(\mu_j) = \frac{\sigma_x^2}{M} \left[1 + 2 \sum_{t=1}^M \left(1 - \frac{t}{M} \right) R_k \right] \quad (8)$$

$$\sigma^2(\sigma_j^2) = \frac{2\sigma_x^4}{M} \left[1 + 2 \sum_{t=1}^M \left(1 - \frac{t}{M} \right) R_k^2 \right] \quad (9)$$

$$\sigma^2(R_{j,k}) = \frac{1}{M-k} \left[1 + R_k^2 + 2 \sum_{t=1}^{M-k} \left(1 - \frac{t}{M-k} \right) (R_t^2 + R_{t+k} R_{t-k}) \right] \quad (10)$$

式中, σ_x^2 、 R_k 分别为 $\{x_t\}$ 的方差、协方差. 针对 $N=6000$, 设置 $M=100$, 则 $l=60$, 选取 $|\mu_i - \mu_j| > 2.77\sigma(\mu_j)$ 进行分析, 取 $i=2, 3 \dots 60, j=1$, 当时间间隔 k 取不同值时, 得到不同的自协方差值, 借助 MATLAB 计算时间序列的自协方差, 取其中最大值 $R_k=0.6245$, 此时 $2.77\sigma(\mu_j) \approx 1.172 \times 10^{-4}$, 得到 $U = |\mu_i - \mu_j|$ 的值与 $2.77\sigma(\mu_j)$ 的对比结果如图 3. 由图 3 可见, $i=2, 3 \dots 60, j=1$ 时, $U = |\mu_i - \mu_j|$ 大于 $2.77\sigma(\mu_j)$, 按照以上理论分析, 认为 μ_i 和 μ_j 之间差异显著, 拒绝 $\{x_t\}$ 的平稳假设.

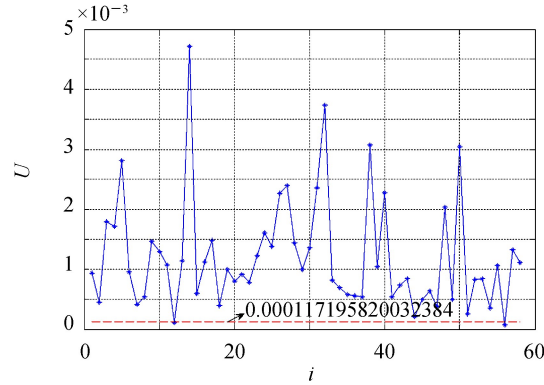


图 3 U 与 $2.77\sigma(\mu_j)$ 的对比分析

Fig.3 The comparative analysis between U and $2.77\sigma(\mu_j)$

1.3 时变 ARMA 模型

综上, 随机漂移信号体现出了一定的不稳定性, 因此尝试采用时变 ARMA 模型对 MEMS 陀螺随机漂移进行建模, 时变 ARMA 模型为

$$x_t + \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^m a_{ij} f_j(t) x_{t-i} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^m b_{ij} f_j(t) \omega_{t-i} + \omega_t \quad (11)$$

$$x_t + \mathbf{X}(t) \mathbf{A} \mathbf{F}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{B} \mathbf{F}(t) + \omega_t \quad (12)$$

$$\mathbf{X}(t) = [x_{t-1} \quad x_{t-2} \quad \cdots \quad x_{t-p}]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in A^{p \times (m+1)} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}(t) = [f_0(t) \quad f_1(t) \quad \cdots \quad f_m(t)]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \in B^{q \times (m+1)} \quad (16)$$

式中 $\omega_t \sim \text{NID}(0, \sigma)$, $t=1, 2, \dots, N$, 表示该模型是基于 N 个采样数据的. 为了便于计算求解, 这里设定 $p > q$.

1.4 基函数选择

时变 ARMA 模型通过选取合适的基函数, 求解合适的基函数系数, 从而实现模型参数随时间变化, 完成对信号的准确表征. 通常选用一系列随时间变化的基函数的线性组合, 如二次多项式基函数、勒让德基函数、离散余弦基函数、小波基函数等, 如果实际信号的特性并不能事先确定, 通常会选择傅里叶基函数, 因为傅里叶基能够实现对一般信号进行合理的频率估计, 本文采用傅里叶基进行时变 ARMA 模型参数设置, 即

$$f_j(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{j\pi t}{2N}\right) & j \text{ 为偶数} \\ \sin\left[\frac{(j+1)\pi t}{2N}\right] & j \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i(t) = \sum_{j=0}^m a_{ij} f_j(t) \\ b_i(t) = \sum_{j=0}^m b_{ij} f_j(t) \end{cases}$$

式中, $j=0,1,\dots,m$ 表示基函数的维数, N 表示随机漂移序列的总采样个数.

1.5 模型定阶

合适的模型阶数以及分解维数对随机漂移的精确描述至关重要.对于应用于平稳序列建模的 ARMA 模型,通常采用 AIC 准则确定其阶数,但是对于非平稳序列,模型的最佳阶数与基函数的分解维数相互耦合,单纯用 AIC 准则确定模型阶数,存在一定的局限性,因此本文结合文献[15]确定时变 ARMA 模型阶数的方式进行 ARMA 模型定阶.

1) 首先将基函数子空间的维数设置为 3,之后采用 AIC 准则确定时变 ARMA 模型的阶数;

2) 当确定模型的阶数后,逐渐增加基函数子空间的维数,当模型品质没有明显改变时即确定最佳子空间维数;

3) 在确定最佳基函数子空间维数后,逐渐增加模型阶数,并对模型对随机漂移信号的估计误差进行辨识,将模型品质不再有明显改善后的最小模型阶数确定为最佳模型阶数.

$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_e^2 + \frac{2(p+q+1)}{N} \quad (17)$$

1.6 模型参数估计

ARMA 模型的参数估计方法可以分为直接估计法,递推估计法.直接估计法比如最小二乘估计、求解 Yule-Walker 方程等方法,递推估计法主要有矩阵递推估计、参数递推估计法以及实时递推估计等方法.当随机漂移序列的样本长度 N 增大时,参数估计等估计方法会占用较大的计算机内存,计算速度下降,难以满足在线实时估计等工程应用的要求,与之相比,实时估计每步计算量很小,通过不断地引入系统的新数据,修改上一步的参数估计值,最终使模型参数不断地接近系统模型参数的真实值.本文通过预处理获得每一时刻的随机漂移,离线建立随机漂移模型.利用遗忘因子递推最小二乘估计具有计算快捷、估计能力强的优势,进行模型参数的离线估计.

为了获得较准确的模型参数,在进行遗忘因子递推最小二乘估计之前采用经典最小二乘法对较大的合适样本 N' ($N > N' \gg p+q$) 进行模型参数估计,具体估计过程为

$$\mathbf{Y}_{N'} = \mathbf{y} = [x_{p+1} \quad x_{p+2} \quad \dots \quad x_{N'}]^\top \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_{N'} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_p & \dots & -x_1 & \omega_p & \dots & \omega_{p+1-q} \\ -x_{p+1} & \dots & -x_2 & \omega_{p+1} & \dots & \omega_{p+2-q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_{N'-1} & \dots & -x_{N'-p} & \omega_{N'-1} & \dots & \omega_{N'-q} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{N'} = [a_1(t) \quad \dots \quad a_p(t) \quad b_1(t) \quad \dots \quad b_q(t)]^\top \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_{p+1} \quad \omega_{p+2} \quad \dots \quad \omega_{N'}]^\top \quad (21)$$

系统的离散状态方程表示为

$$\mathbf{Y}_{N'} = \mathbf{H}_{N'} \boldsymbol{\theta}_{N'} + \boldsymbol{\omega} \quad (22)$$

采用多元回归理论对式(22)求解,可以得到 θ 的最小二乘估计值

$$\boldsymbol{\theta}_{N'} = (\mathbf{H}_{N'}^\top \mathbf{H}_{N'})^{-1} \mathbf{H}_{N'}^\top \mathbf{Y}_{N'} \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{N'} = (\mathbf{H}_{N'}^\top \mathbf{H}_{N'})^{-1} \quad (24)$$

则

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N'} = \mathbf{P}_{N'} \mathbf{H}_{N'}^\top \mathbf{Y}_{N'} \quad (25)$$

实际每一计算时刻 $\boldsymbol{\theta}$ 是关于 t 的函数,计算为

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i(t) \\ \mathbf{b}_i(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{a}_i(t) = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{20} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p0} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,p) \quad (27)$$

$$\mathbf{b}_i(t) = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{20} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q0} & b_{q2} & \cdots & b_{qm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,q) \quad (28)$$

通过采用经典最小二乘估计方法对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行估计,此时得到的 A, B 为针对大样本数据的统计值 $\boldsymbol{\theta}_{N'}$.之后采用遗忘因子递推最小二乘法对模型参数进行优化估计,利用增加的最新观测随机漂移值对之前的模型参数进行修正,从而实现对随机漂移信号的动态变化进行准确表征.具体方法如下:

当增加新数据 $x_{N'+1}$ 时,将该数据加入原始序列中,得到 $\{x_t\} (t=1,2,\dots,N',N'+1)$, $\boldsymbol{\theta}$ 的估计过程为

$$\mathbf{H}_{N'+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{N'} \\ \mathbf{h}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{h}_{k+1} = [-x_{N'} \quad \cdots \quad -x_{N'-p+1} \quad \omega_{N'} \quad \cdots \quad \omega_{N'-q+1}] \quad (30)$$

$$\mathbf{Y}_{N'+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{N'} \\ x_{N'+1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

则

$$\mathbf{P}_{N'+1} = (\mathbf{H}_{N'+1}^T \mathbf{H}_{N'+1})^{-1} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{N'+1} = \mathbf{P}_{N'+1} \mathbf{H}_{N'+1}^T \mathbf{Y}_{N'+1} \quad (33)$$

引入遗忘因子 α 对过去数据进行加权,历史数据的作用被削弱,由于模型参数随时间的动态变化蕴藏于新增数据中,通过增强新数据的作用,使当前模型参数更能反映信号的动态特性.当模型参数能够敏感到信号的动态变化后,即能够获得描述信号变化的准确的 ARMA 模型,从而能够实现对随机漂移的高精度补偿.通过矩阵理论对上式进行化简,并将式(29)(31)带入式(32)、(33)得到

$$\boldsymbol{\theta}_{N'+1} = \boldsymbol{\theta}_{N'} + \mathbf{K}_{N'+1} (x_{N'+1} - \mathbf{h}_{k+1} \boldsymbol{\theta}_{N'}) \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_{N'+1} = (\alpha + \mathbf{h}_{k+1} \mathbf{P}_{N'} \mathbf{h}_{k+1}^T)^{-1} \mathbf{P}_{N'} \mathbf{h}_{k+1}^T \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_{N'+1} = [\mathbf{I} - (\alpha + \mathbf{h}_{k+1} \mathbf{P}_{N'} \mathbf{h}_{k+1}^T) \mathbf{P}_{N'} \mathbf{h}_{k+1}^T \mathbf{h}_{k+1}] \mathbf{P}_{N'} / \alpha \quad (36)$$

通过上述遗忘因子递推最小二乘法可以获得 $\boldsymbol{\theta}$ 的时变矩阵,该矩阵反映了随机漂移信号的动态变化,因此有必要对时变模型参数进行寻优,使得建立的模型能够最准确地反映随机漂移的特性.

1.7 基于解析法的时变模型参数寻优

目前,较少文献对 ARMA 模型参数的寻优问题进行介绍,尽管建模样本越大,建模残差方差总体趋势为减小,但是仍存在建模参数的最优解并非是基于最大样本建模的模型参数的情况.文献[16]采用自适应变异的粒子群算法对模型参数进行寻优,但是算法的本质是基于目标函数的参数寻优问题.采用的目标函数依旧是建模方差最小,因此需要将原始信号带入 ARMA 模型,进行后续信号的预测,并进行方差求解.假设获得 3000 组模型参数,按照方差最小的方法,针对第一组模型参数 a_1^1, a_2^1, b^1 进行如下式(37)~(40)计算,求解第一组模型参数的方差.

$$\hat{x}_{t+1} = a_1^1 x_t + a_2^1 x_{t-1} + b^1 \omega_t + \omega_{t+1} \quad (37)$$

$$\hat{x}_{t+2} = a_1^1 x_{t+1} + a_2^1 x_t + b^1 \omega_{t+1} + \omega_{t+2} \quad (38)$$

...

$$\hat{x}_N = a_1^1 x_{N-1} + a_2^1 x_{N-2} + b^1 \omega_{N-1} + \omega_N \quad (39)$$

进行 $N-2$ 步解算后,求解方差

$$\text{var}_1 = \text{sum}((\hat{x}_{t+1} - x_{t+1})^2 + (\hat{x}_{t+2} - x_{t+2})^2 + \cdots + (\hat{x}_N - x_N)^2) / (N-2) \quad (40)$$

对于第二组模型参数 a_1^2, a_2^2, b^2 仍旧按照上述运算进行求解 var_2 , 至求解 var_{3000} , 之后进行比较,选择最小方差对应的参数即为最优模型参数,该方法计算量很大.因此本文提出一种基于解析法的模型参数寻优方法.

以时变 ARMA(2,1)模型为例进行分析,按照式(11)推导得到

$$x_t = -a_1(t)x_{t-1} - a_2(t)x_{t-2} + b_1(t)\omega_{t-1} + \omega_t \quad (41)$$

当基于有限样本建模时,存在模型参数的最优解 a_1 、 a_2 以及 b_1 ,即为固定常数. 针对同一组建模参数,假设 $a_1(t)$ 为时变参数,其余为固定参数,则式(41)推导如下

$$a_1(t) = \frac{-x_t - a_2(t)x_{t-2} + b_1(t)\omega_{t-1} + \omega_t}{x_{t-1}} \quad (42)$$

$$a_1(t+1) = \frac{-x_{t+1} - a_2(t)x_{t-1} + b_1(t)\omega_t + \omega_{t+1}}{x_t} \quad (43)$$

将式(42)与式(43)做差,得

$$\Delta a_1(t) = a_1(t+1) - a_1(t) \rightarrow 0 \quad (44)$$

将式(42)式(43)代入式(44)得

$$-x_{t+1}x_{t-1} + x_t^2 + a_2(t)(x_{t-2}x_t - x_{t-1}^2) + b_1(t)(\omega_t x_{t-1} - \omega_{t-1}x_t) + \omega_{t+1}x_{t-1} - \omega_t x_t \rightarrow 0 \quad (45)$$

将式(45)在大样本范围内求和得到

$$\sum_{t=1}^{N-3} -x_{t+3}x_{t+1} + x_{t+2}^2 + a_2(t)(x_t x_{t+2} - x_{t+1}^2) + b_1(t)(\omega_{t+2}x_{t+1} - \omega_{t+1}x_{t+2}) + \omega_{t+3}x_{t+1} - \omega_{t+2}x_{t+2} = 0 \quad (46)$$

由于 $\omega_t \sim \text{NID}(0, \sigma)$, σ 的值变化很小,因此 ω_t 与 x_t 不同属一个数量级,因此忽略 σ 变化对式(46)的影响,按照 N' 样本建模残差方差设置 σ ,并带入式(46).通过对 $a_2(t)$ 、 $b(t)$ 拟合,将时变参数变化转化为关于建模样本长度的函数,并求解式(46)在样本区间内的零点,从而求得最优模型参数.

2 卡尔曼滤波器设计

文献[5]分析了 ARMA 模型转化为状态空间模型的 3 种方式在卡尔曼滤波中的不同应用情况,因此将时变 ARMA 模型写成状态空间方程的形式,即

$$x_t + a_1(t)x_{t-1} + a_2(t)x_{t-2} + \dots + a_p(t)x_{t-p} = b_1(t)\omega_{t-1} + b_2(t)\omega_{t-2} + \dots + b_q(t)\omega_{t-q} + \omega_t \quad (47)$$

系统的状态变量为 $\mathbf{X}_t = [x_t \quad x_{t-1} \quad \dots \quad x_{t-p+1}]^T$,满足状态方程

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{D}\omega_t \quad (48)$$

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{G}\mathbf{X}_t + \mathbf{v}_t \quad (49)$$

式中, \mathbf{Z}_t 为系统输出向量, ω_t 为过程噪声, \mathbf{v}_t 为量测噪声, \mathbf{C} 为状态转移矩阵, \mathbf{D} 为过程噪声驱动矩阵, \mathbf{G} 为量测矩阵.由于经过模型参数寻优,得到最优模型参数,从而完成最优时不变 ARMA 模型建模,并用于卡尔曼滤波中.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{p-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_p - a_p \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (52)$$

$$b_{q+1} = b_{q+2} = \dots = b_p = 0 \quad (53)$$

ω_t 、 \mathbf{v}_t 为均值为零相互独立的白噪声, ω_t 的方差为利用 ARMA 模型进行建模后残差的协方差, \mathbf{v}_t 的方差为静态下观测随机漂移信号的方差,可以通过 Allan 方差获得.

3 试验分析

针对某型 MEMS 陀螺,在室温条件下将其预热 1 h,利用 STM32F103MCU 采集陀螺输出角速率.采样频率为 100 Hz,采样时间为 6 000 s,每采样 100 个数据按规律选取其中一个作为研究样本.经过去除趋势项等预处理后,得到 MEMS 陀螺的随机漂移信号如图 1.利用时变 ARMA 模型进行随机漂移建模,设置 $N' =$

3 000,当函数子空间维数为 3 时,不同模型阶数的 AIC 值见表 1.

表 1 不同模型阶数的 AIC 值

Table 1 The AIC value of the order of different models

m	3	3	3
p	2	3	4
q	1	2	3
AIC	-4.963 5	-5.176 2	-5.637 1

为了保证建立模型简便,建模迅速,选取了时变 ARMA(2,1)模型进行 MEMS 陀螺随机漂移的建模.选取不同维数的函数子空间对 N' 长度的样本进行建模,从模型精度兼顾模型简便的角度选择了子空间维数为 3.遗忘因子一般取值在 0.95~0.99 之间,设置遗忘因子 $\lambda=0.99$,进行遗忘因子递推最小二乘估计,从而得到基于不同长度的样本进行时变 ARMA 模型建模的模型参数 $a_i(t), b_i(t)$.将模型参数用于对 N 样本的建模分析,其建模残差方差如下图 4 所示,可见随着样本长度的增加,建模精度逐渐提高,但是也并非基于最大样本的建模精度最高.因此,有必要对模型参数进行寻优.

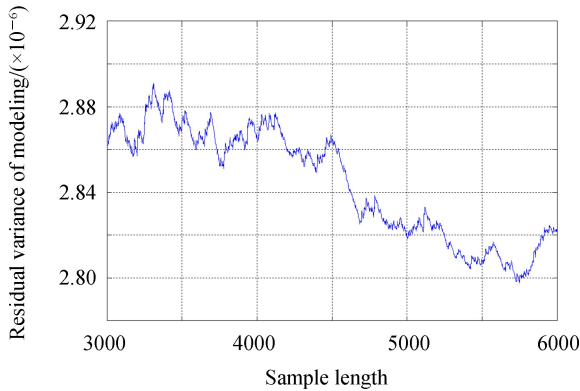


图 4 不同样本长度的建模残差方差

Fig.4 Variance of modeling residuals for different sample length

时变 ARMA 模型参数的变化主要受到样本长度、随机漂移动态变化等因素的影响,所以采用 5 阶多项式拟合的方式对模型参数进行拟合,得到模型参数的实际值与拟合值的对比结果如图 5.可见拟合结果能够较好地反映时变模型参数的变化趋势,因此能够将拟合结果用于后续的模型参数寻优中,即将 5 阶多项式拟合结果带入式(46)中,进行模型参数寻优,获得最优模型参数.完成最优 ARMA 模型建模.

将最优 ARMA 模型应用于卡尔曼滤波补偿中,设置卡尔曼滤波初值: $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0]^T$,协方差阵为 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} 为单位矩阵),驱动噪声协方差 $\sigma_e = 2.378 \times 10^{-5}$,量测噪声协方差通过 Allan 方差计算得出 $\sigma_v = 2.235 \times 10^{-6}$.

为了验证所提方法的可行性,将该方法的补偿效果与通过 AR(6)模型近似得到的时不变 ARMA(2,1)模型补偿效果进行了对比.对比结果如图 6 所示.通过对比发现经过遗忘因子递推最小二乘法提取时变 ARMA(2,1)模型参数并借助解析法进行模型参数寻优,将建模结果用于卡尔曼滤波补偿中,其补偿精度优于基于时不变 ARMA(2,1)模型的补偿精度.

经过对比计算,得到原始随机漂移去除趋势项后的统计特征,与时不变 ARMA(2,1)模型补偿后的统计特征,以及本文提出的基于遗忘因子递推最小二乘估计的时变 ARMA(2,1)模型补偿后的统计特征对比结果如表 2.

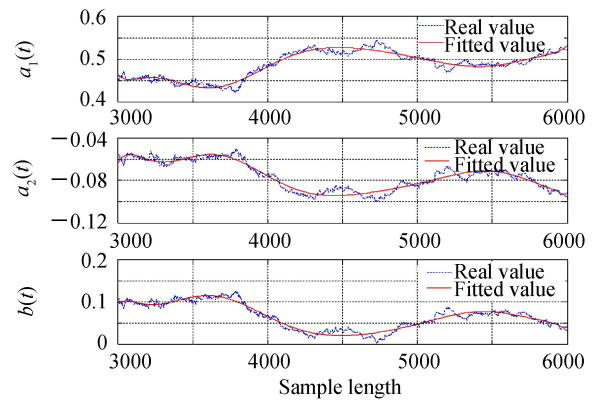


图 5 时变参数与拟合结果对比分析

Fig.5 The comparison of time varying parameters and fitting results

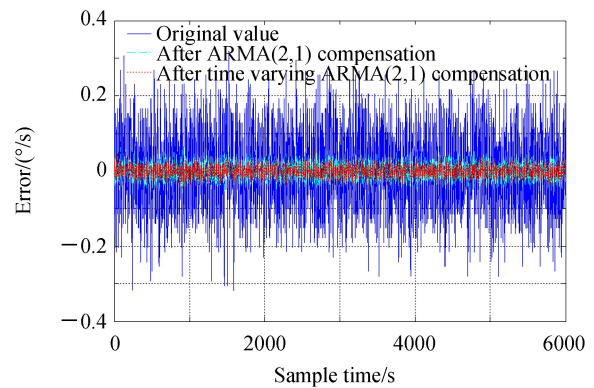


图 6 随机漂移补偿前后对比分析

Fig.6 The comparison of random drift compensation

表 2 不同补偿方式的补偿精度对比 (Radian)

Table 2 Comparison of compensation precision of different compensation methods (Radian)

Compensation method	Random drift	ARMA(2,1) compensation	Compensation method in this paper
Mean value	1.413×10^{-4}	1.426×10^{-4}	1.417×10^{-4}
Variance	8.885×10^{-5}	2.860×10^{-6}	1.457×10^{-6}

由表 2 可知, MEMS 陀螺的随机漂移经本文方法补偿后, 补偿残差的方差与时不变 ARMA(2,1) 模型补偿后残差的方差相比, 有所减小, 证明了所提方法的可行性。为了进一步验证补偿算法的有效性, 本文进行了两次补偿验证试验, 补偿后的统计特性如表 3。由表 3 可知, 在三次试验中, 本文所提方法相比时不变 ARMA 模型具有更高的补偿效果, 平均精度提升了近 40%。验证了所提方法的有效性。

表 3 3 次试验中不同补偿方式补偿精度的对比结果 (Radian)

Table 3 Comparison of compensation precision of different compensation methods in 3 experiments (Radian)

Compensation method	ARMA(2,1) compensation	Compensation method in this paper
Variance1	2.860×10^{-6}	1.457×10^{-6}
Variance2	5.071×10^{-6}	3.523×10^{-6}
Variance3	4.753×10^{-6}	2.716×10^{-6}

4 结论

本文对去除趋势项后的实测 MEMS 静态随机漂移信号进行了稳定性分析, 之后采用时变 ARMA 模型建模, 并用遗忘因子递推最小二乘算法对模型参数进行动态估计, 采用多项式拟合的方式对动态参数进行拟合, 并利用解析法进行参数寻优, 将建立的最优模型应用于卡尔曼滤波分析中, 从而提出了一种基于遗忘因子递推最小二乘估计的时变 ARMA 模型建模方法, 利用该方法与卡尔曼滤波相结合对 MEMS 陀螺的随机漂移进行补偿, 得出以下结论:

- 1) 通过仿真试验发现, 本文所提方法的补偿精度与传统的 ARMA 模型建模补偿精度相比, 本文补偿方式能够实现 MEMS 陀螺随机漂移的更高精度补偿。
- 2) 本文提出了一种解析法进行模型参数寻优, 为求解最优模型参数提供了新思路。
- 3) 采用遗忘因子递推最小二乘估计, 增强了新数据的作用, 使得模型更能反映信号的动态变化, 从而有助于获得最优 ARMA 模型。

参考文献

- [1] HE Jia-hui, ZHOU Peng, YU Hui-jun, *et al.* Research on large size MEMS scanning mirror driven by electromagnetic [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2017, **46**(1):0123003.
何嘉辉, 周鹏, 余晖俊, 等. 电磁驱动大尺寸 MEMS 扫描镜的研究 [J]. 光子学报, 2017, **46**(1):0123003.
- [2] YUAN Gan-nan, LIANG Hai-bo, HE Kun-peng, *et al.* On-line compensation technique for micromechanical gyroscope random error [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2010, **36**(12):1448-1452.
袁赣南, 梁海波, 何昆鹏, 等. MEMS 陀螺随机漂移在线补偿技术 [J]. 北京航空航天大学学报, 2010, **36**(12):1448-1452.
- [3] MENG Tao, WANG Hao, LI Hui, *et al.* Error modeling and filtering method for MEMS gyroscope [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, **31**(8):1944-1947.
蒙涛, 王昊, 李辉, 等. MEMS 陀螺误差建模与滤波方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2009, **31**(8):1944-1947.
- [4] CHEN Ming-ming, GAO Guo-wei, BI Xin-lei, *et al.* An improved algorithm for random error compensation of MEMS gyroscopes based on ARMA model [J]. *Sensor World*, 2014, **20**(5):7-13.
陈明明, 高国伟, 毕新磊, 等. 基于 ARMA 建模的 MEMS 陀螺随机误差补偿改进算法研究 [J]. 传感器世界, 2014, **20**(5):7-13.
- [5] YUAN Gan-nan, LIANG Hai-bo, HE Kun-peng, *et al.* Analysis and application of state space model for MEMS gyro random drift [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2011, **24**(6):853-858.
袁赣南, 梁海波, 何昆鹏, 等. MEMS 陀螺随机漂移的状态空间模型分析及应用 [J]. 传感技术学报, 2011, **24**(6):853-858.
- [6] WANG Ding-jie, LV Han-feng, WU Jie. ARMA-based stochastic modeling method for improving the performance of low-cost MIMU/GNSS integration [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2016, **38**(6):64-69.
王鼎杰, 吕汉峰, 吴杰. 基于微惯导随机误差时间序列建模的改进组合导航方法 [J]. 国防科技大学学报, 2016, **38**(6):64-69.
- [7] JACQUES G, ABOELMAGD N, KORENBERG M J, *et al.* Modeling the stochastic drift of a MEMS-based gyroscope in gyro /odometer /GPS integrated navigation [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2010, **11**

- (4):856-876.
- [8] MINHA P, YANG G. Error and performance analysis of MEMS based inertial sensors with a low-cost GPS receiver [J]. *Sensors*, 2008, **8**(4):2240-2261.
- [9] ZHANG Lin, XIONG Zhi, LIU Jian-ye, *et al.* Automatic switching and denoising MEMS-Gyro signal for enhanced dynamic performance [J]. *Optik- International Journal for Light and Electron Optics*, 2016(127):11386-11394.
- [10] ZHANG Lei, PENG Xiong-wei. Time series estimation of gas sensor baseline drift using ARMA and Kalman based models [J]. *Sensor Review*, 2016, **36**(1):34-39.
- [11] JI Xun-sheng, WANG Shou-rong. Research on the MEMS gyroscope random drift error [J]. *Journal of Astronautics*, 2006, **27**(4):640-642.
吉训生,王寿荣. MEMS 陀螺仪随机漂移误差研究[J]. *宇航学报*, 2006, **27**(4):640-642.
- [12] WANG Ke-dong, XIONG Shao-feng. An ARMA modeling method and its application in Kalman filtering [J]. *Journal of Astronautics*, 2012, **33**(8):1048-1055.
王可东,熊少锋. ARMA 建模及其在 Kalman 滤波中的应用[J]. *宇航学报*, 2012, **33**(8):1048-1055.
- [13] SHANG Zhi-gang, MA Xiao-chuan, LIU Yu, *et al.* Trend extraction of random sequences of MEMS gyroscopes [J]. *Journal of Signal Processing*, 2016, **32**(7):827-833.
商志刚,马晓川,刘宇,等. MEMS 陀螺仪随机序列趋势项提取算法[J]. *信号处理*, 2016, **32**(7):827-833.
- [14] 杨叔子,吴雅,轩建平,等. *时间序列分析的工程应用(第二版)* [M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2007.
- [15] LIU Hao, LI Xiao-dong, YANG Wen-qi, *et al.* Thermal vibration test on wing structure of high-speed flight vehicle using TARMA model method [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, **36**(7):2226-2234.
刘浩,李晓东,杨文岐,等. 高速飞行器翼面结构热振动试验的 TARMA 模型方法[J]. *航空学报*, 2015, **36**(7):2226-2234.
- [16] LI Huai-jun, XIE Xiao-peng, LI Jun. Parameters optimization and prediction application of ARMA model based on PSO with adaptive mutation [J]. *Application Research of Computers*, 2015, **32**(4):1004-1006.
李怀俊,谢小鹏,李军. 基于自适应变异 PSO 的 ARMA 模型参数寻优及预测应用[J]. *计算机应用研究*, 2015, **32**(4):1004-1006.

Foundation item: National Defense Pre Research Fund (No.9140A09031715JB34001)

引用格式: SONG Jin-long, SHI Zhi-yong, WANG Lü-hua, *et al.* Random Error Compensation Technology of MEMS Gyroscope Based on Time-varying ARMA Model [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, **47**(7):0712003

宋金龙,石志勇,王律化,等. 基于时变 ARMA 模型的 MEMS 陀螺随机误差补偿技术[J]. *光子学报*, 2018, **47**(7):0712003