

doi:10.3788/gzxb20184702.0226002

部分相干光产生无衍射 Mathieu 光束

冯聪,王硕琛,吴逢铁

(华侨大学信息科学与工程学院 福建省光传输与变换重点实验室,福建 厦门 361021)

摘 要:基于傅里叶变换下的菲涅尔衍射理论,对部分相干光产生 Mathieu 光束进行了理论和实验研究,并利用抽样理论和色散公式推导出 Mathieu 光束的光强分布表达式.数值模拟了不同传播距离处 Mathieu 光束的截面光强分布,并设计了实验对模拟结论进行验证.实验采用多波长蓝光 LED 为光源,利用带有椭圆形孔径的菲林片及轴棱锥得到 Mathieu 光束.模拟和实验结果均证明部分相干光可以产生 Mathieu 光束.研究结果对拓展 Mathieu 光束的应用范围提供了理论依据.

关键词:部分相干光;衍射理论;Mathieu 光束;傅里叶方法;角谱

中图分类号:O439

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2018)02-0226002-5

Mathieu Beam Generated by Partially Coherent Beam

FENG Cong, WANG Shuo-chen, WU Feng-tie

(College of Information Science&Engineering, Huaqiao University, Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, Xiamen, Fujian 361021, China)

Abstract: The Mathieu beam produced by partially coherent light was studied theoretically and experimentally, based on Fresnel diffraction theory and Fourier transform. The intensity expression of the Mathieu beam was derived with sampling theory and dispersion formula. The section intensity distribution of the Mathieu beam at different propagation distances was simulated. And the experiment was designed to verify the simulation results. We would choose multi-wavelength blue LED as the light source in the the experiment. The Mathieu beam would be obtained using a axicon and a film with an elliptical aperture. Both simulated and experimental results show that partially coherent light can produce Mathieu beams. The results provide a theory evidence for extending the application range of Mathieu beam.

Key words: Partially coherent beam; Diffracting theory; Mathieu beam; Fourier method; Angular spectrum

OCIS Codes: 260.1960; 050.1940; 070.3185; 220.3630

0 引言

1987年,Durnin J^[1]提出了无衍射光束的概念,它是自由空间中波动方程的一组特解,在传播过程中横向光场分布保持不变并具有自重建^[2]特性,被广泛应用在激光成像和干涉测量等领域.事实上,Durnin J提出的无衍射 Bessel 光束只是赫姆霍兹方程在圆柱坐标系下的一组特解.2000年,Gutiérrez-Vega J C^[3]等人指出自由空间波动方程的无衍射解共有四种:cosine 光束、Bessel 光束、Mathieu 光束和 Parabolic 光束,分别对应笛卡尔坐标、圆坐标、椭圆坐标和抛物线坐标.

在很长一段时间内,国内外学者主要研究的是无衍射 Bessel 光束,对其他三种光束研究较少.2015年,

基金项目:国家自然科学基金(No.61178015),国家自然科学基金青年基金(No.61605049)和福建省科技重大项目(No.2016H6016)资助

第一作者:冯聪(1993—),男,硕士研究生,主要研究方向为光束传输与变换. Email:394957188@qq.com

导师(通讯作者):吴逢铁(1958—)男,教授,博士,主要研究方向为光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学等. Email:fengtie@hqu.edu.cn

收稿日期:2017-06-15;录用日期:2017-09-10

<http://www.photon.ac.cn>

李冬等^[4]使用具有椭圆高斯振幅的平面波入射轴棱锥,得到了近似的无衍射 Mathieu 光束,并引起了科研人员的兴趣^[5-6],由于其具有自重建特性,被广泛用于非线性光学^[7]、光通信^[8]、光学微操作^[9]、光学扫描^[10]等领域.对于 Mathieu 光束的研究主要基于相干光领域,而使用部分相干光产生无衍射 Mathieu 光束的研究鲜有报道.由于部分相干光束的光强均匀性较好、对散斑灵敏度低以及在大气中传输时抗扰动强等优点,因此在某些实际应用中是完全相干光所不及的^[11-12].且部分相干光在传输不变性等方面具有显著优势^[13],使得部分相干光束在成像^[14]等方面得到广泛应用^[15].LED 作为一种成本较低的新型且易获得的非相干光源,与激光光源相比,其发出的光经过一段距离传输后变成的部分相干光同样具有良好的方向性.由于 LED 具有节能环保、寿命长、易集成模块化等优点,因此被广泛应用于医疗和工业照明等领域,

本文将 LED 作为光源,利用轴棱锥聚焦椭圆高斯振幅调制的平面波得到部分相干无衍射 Mathieu 光束.基于离散傅里叶理论和菲涅尔衍射理论,分析推导出部分相干 Mathieu 光束的光强分布表达式,数值模拟和实验均表明部分相干光可以产生 Mathieu 光束.

1 理论分析

产生部分相干无衍射 Mathieu 光束的光源为一颗 3W 的蓝光 LED,其光谱图如图 1,其主波长 $\lambda = 458.7 \text{ nm}$,半峰宽 $\Delta\lambda = 18.1 \text{ nm}$.LED 光源发出的光经过光阑后被透镜组合准直扩束,得到不发散的平面波调制光束,通过椭圆孔径后再被轴棱锥聚焦.

产生部分相干无衍射 Mathieu 光束的光路图如图 2,衍射元件如图 3.在经过椭圆形孔径前,光束只是被扩束,未发生其他变化,故设入射椭圆形孔径的光束为入射光束,其光场的振幅函数为 $u_0(x_0, y_0)$,角谱为 $A_0(f_{x_0}, f_{y_0})$,它们互为傅里叶变换对.根据基尔霍夫假定的边界条件,衍射孔径后光场的振幅函数为入射光场的振幅的孔径函数的乘积,即

$$u_1(x_0, y_0) = u_0(x_0, y_0)t(x_0, y_0) \quad (1)$$

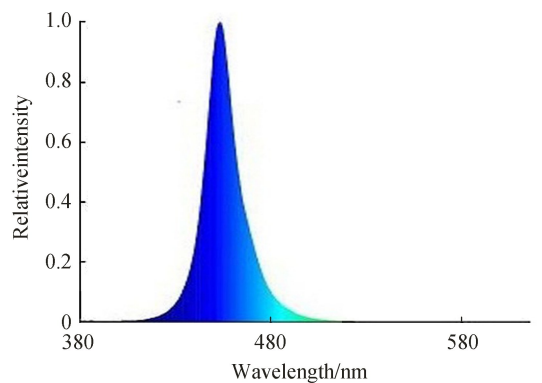


图 1 LED 光谱图
Fig.1 Spectrogram of LED

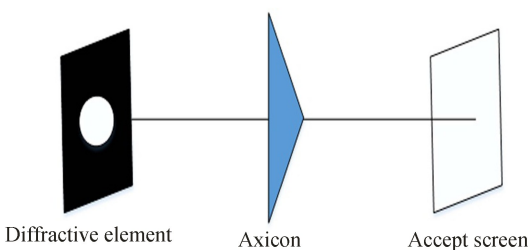


图 2 光学系统光路图

Fig.2 Optical system optical path diagram

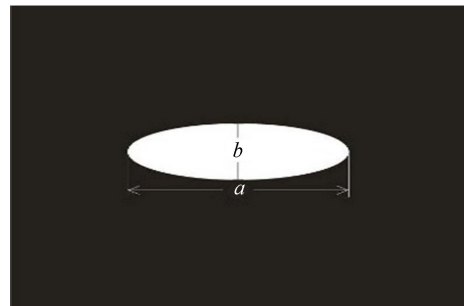


图 3 衍射元件示意图

Fig.3 The diagram of ffraction element

对孔径函数两侧同时做傅里叶变换,得到衍射孔径后的角谱函数.对于平面波垂直入射衍射元件的情况,对入射平面波进行归一化处理 $u_0(x_0, y_0) = 1$,于是

$$A_1(f_{x_0}, f_{y_0}) = \delta(f_{x_0}, f_{y_0}) * T(f_{x_0}, f_{y_0}) = T(f_{x_0}, f_{y_0}) = F[t(x_0, y_0)] \quad (2)$$

FT 表示傅里叶变换,即衍射元件后光场的角谱即为衍射元件振幅透过率的傅里叶逆变换.利用角谱传播理论,可得从衍射元件出射的光束传播到透镜入射面的光场角谱,经过傅里叶逆变换便得到光场的复振幅,再乘以透镜的透过率函数便得到透镜后 $z = 0$ 平面的光场复振幅.最后利用菲涅尔衍射公式的傅里叶变换形式,得任意 z 平面处的光场分布为

$$u(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right] \text{FT} \left\{ \text{FT} \{ F[t(x_0, y_0)] H(f_{x_1}, f_{y_1}) \} \times \right. \\ \left. \exp \left[\frac{ik}{2z} r_1^2 - ik\gamma(n-1)r_1 \right] \right\} \quad (3)$$

式中 $r_1 = (x_1^2 + y_1^2)$ 频率取值与观察平面的坐标的关系为 $f_x = x/\lambda z, f_y = y/\lambda z$.

计算机模拟中,必须对光场复振幅离散化和对衍射面抽样.根据抽样定理,假设衍射元件面上 x, y 上的抽样数为 N 和 M ,得到离散化的光场分布为

$$u(n\Delta x, m\Delta y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[ik \left(z + \frac{(n\Delta x)^2 + (m\Delta y)^2}{2z} \right) \right] \times \text{IDFT} \left\{ \text{IDFT} \left\{ \text{DFT}[t(n\Delta x_0, m\Delta y_0)] \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \text{H} \left(\frac{n\Delta x_0}{\lambda l}, \frac{m\Delta y_0}{\lambda l} \right) \right\} \times \exp \left[\frac{ik}{2z} G - ik\gamma(n-1)\sqrt{G} \right] \right\} \quad (4)$$

式中 $G = (zn\Delta x_0/\lambda l)^2 + (zm\Delta y_0/\lambda l)^2$, DFT 和 IDFT 分别为离散傅里叶变换和逆变换,式(4)平方后便得到最后观察面上的光强分布表达式.

由于实验采用的 LED 光源具有一定谱宽,因此需要按多波长对光源进行处理^[16].轴棱锥的折射率为波长的函数,可由 Sellmeier 色散公式^[17] 确定

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}} \quad (5)$$

实验值轴棱锥的材料为 Fused Silica,其相应的材料系数为

$$\begin{cases} B_1 = 0.6961633, C_1 = 4.67914826 \times 10^{-3} \\ B_2 = 0.4079426, C_2 = 1.3512063 \times 10^{-2} \\ B_3 = 0.8974900, C_3 = 9.7934002 \times 10^1 \end{cases} \quad (6)$$

对于不同的波长,所得光强分布表达式有所差异,所以对不同波长计算得到光强表达式累积求和.从光强谱线图(图 1)可以看出,LED 蓝光光源波长主要集中在 410~510 nm 波段,因此以峰值波长 453.6 nm 为中心,5 nm 为间隔共取 20 个数据点,其相对强度如表 1.

表 1 蓝光 LED 光谱中不同波长对应的相对光强

Table 1 The relative light intensity of the different wavelengths in the green LED spectrum

| Wavelength/nm | Relative intensity | Wavelength/nm | Relative intensity |
|---------------|--------------------|---------------|--------------------|
| 408.6 | 0.005 5 | 458.6 | 0.766 5 |
| 413.6 | 0.008 4 | 463.6 | 0.474 9 |
| 418.6 | 0.014 8 | 468.6 | 0.316 6 |
| 423.6 | 0.026 4 | 473.6 | 0.198 4 |
| 428.6 | 0.050 3 | 478.6 | 0.114 8 |
| 433.6 | 0.096 6 | 483.6 | 0.071 9 |
| 438.6 | 0.193 4 | 488.6 | 0.046 1 |
| 443.6 | 0.410 8 | 493.6 | 0.027 5 |
| 448.6 | 0.783 | 498.6 | 0.016 4 |
| 453.6 | 0.999 9 | 503.6 | 0.010 5 |

对这 20 个不同的波长求出相应的光强公式,再乘以其相对强度后叠加求和,便得到了 LED 光源产生部分相干无衍射 Mathieu 光束的光强表达式

$$I(n\Delta x, m\Delta y, z) = \sum_{i=1}^{20} R_i |u(n\Delta x, m\Delta y, z, \lambda)|^2 \quad (7)$$

式中 R_i 代表的是不同波长光的相对强度.

2 数值模拟

将表 1 数据和式(7)代入 MATLAB 进行模拟,各参数取值为:椭圆孔径的长轴 $a = 10$ mm,短轴 $b = 2$ mm,衍射孔径到轴棱锥的距离 $l = 130$ mm,轴棱锥底角 $\gamma = 0.5^\circ$.模拟得到轴棱锥后不同距离处光场分布见图 4.

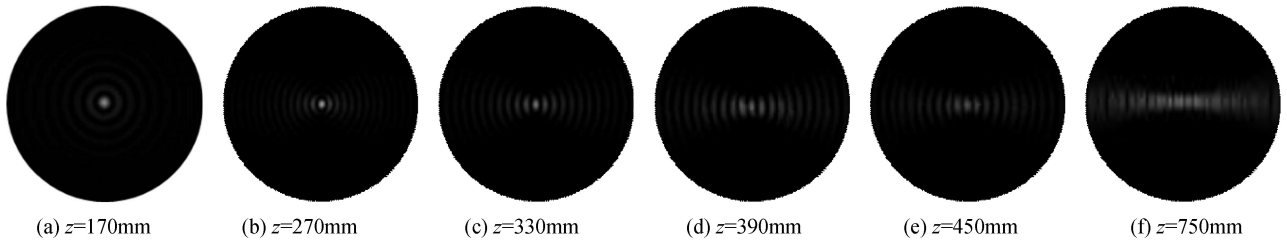


图4 模拟光场分布图
Fig.4 Simulated intensity diagram

由图4可知,在轴棱锥后的一小段距离内,光场呈 Bessel 光束分布,如图4(a);随着传播距离的增加,开始出现 Mathieu 光束形式,这是由于采用的并非一维高斯函数调制的平面波,而是用近似的椭圆高斯函数调制的平面波.在 $z=270\text{ mm}$ 处,开始出现 Mathieu 光束,并且随着传播距离增加,所得到的 Mathieu 光束的 q 值越大(q 值是 Mathieu 函数的一个参数, q 值接近于 0 时,Mathieu 光束的光强图呈一个个同心圆环分布,类似 Bessel 光束;当 q 值趋向无穷大时,Mathieu 光束呈带状分布),在 $z=390\text{ mm}$ 处,得到了无衍射面积最大质量最好的 Mathieu 光束.之后光强分布变得越来越不清晰,光强越来越弱,在 $z=750\text{ mm}$ 处衍射条纹无法分辨,彻底失去无衍射特性.

3 实验验证

图5为光路实验图.光源为一颗 3 W 的蓝光 LED,套上一个聚光筒汇聚其光束,为了减小光源线度,提高部分相干光的相干度,紧贴聚光筒放置一个直径为 0.1 mm 的光阑.从光阑孔径出射的光束衍射角并不为零,因此在后面放置一个透镜组合来准直和扩束,透镜组合中两个透镜的焦距分别是 $f_1=15\text{ mm}$, $f_2=50\text{ mm}$,焦距较小的透镜 1 放置在光阑后 145 mm 处,再在其后放置焦距较大的透镜 2,这样从这个透镜组合出射的光束变为平行光束.光束经过 0.1 mm 的光阑后出射的光不再是平行光,可以将该光束视为光源为光阑大小的点光源发散的球面波.调整透镜 1 和 2 的间隔距离,使照射在后方椭圆孔径上的光束为平行光.由几何光学的高斯公式 $1/l' - 1/l = 1/f$ (l 代表光阑到透镜 1 的距离, l' 代表对应像点到透镜 1 的距离)可知, l' 为 16.7 mm,故透镜 1 和 2 的距离为 66.7 mm.椭圆孔径为一片菲林片,上面有一个椭圆空白区域,其他区域均为黑色不透明,椭圆孔径的长轴和短轴之比为 2:1,长为 20 mm,宽为 10 mm,放置在透镜 2 后面 240 mm 处,轴棱锥放置在菲林片后 130 mm 处.经过准直扩束系统后,光束经过椭圆孔径调制,由轴棱锥聚焦,可得近似 Mathieu 光束.打开 LED 电源,确保蓝色光束经过各个元件中心,并使得反射回来的光能聚集在发射点,最后利用体视显微镜记录轴棱锥后不同距离处的光强分布图,见图 6.

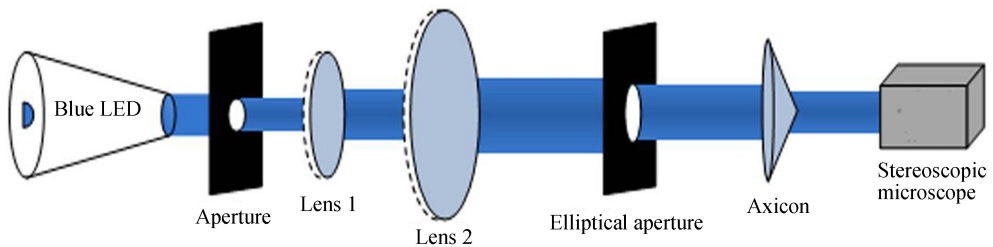


图5 实验光路图
Fig.5 The optical path for experiment

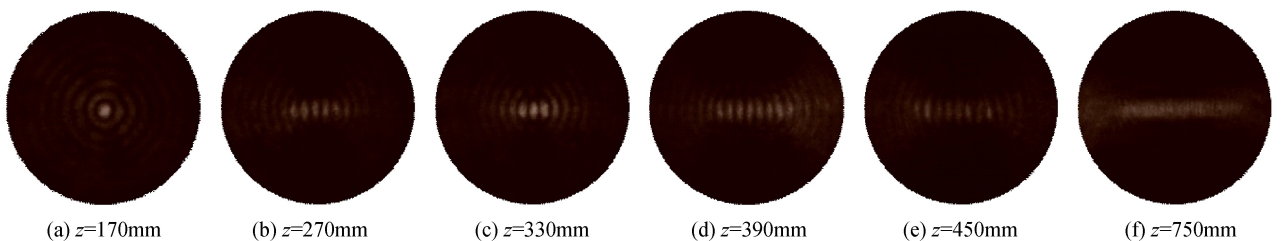


图6 实验光场分布图
Fig.6 The intensity diagram for experiment

图 6 是不同距离处的光强分布,可以看到在轴棱锥后比较短的一段距离内,光束呈 Bessel 光束分布,如图 6(a).随着传播距离的增加,光束的分布开始出现 Mathieu 光束的形式,并且传输距离越远,光束越接近带状分布.在 $z=390$ mm 处,光束质量最佳,在此距离之后,光束强度开始减弱,并且在 $z=750$ mm 处,光强分布开始变得模糊失去无衍射特性,实验结果(图 6)与数值模拟(图 4)相吻合.

在传播距离较短的光场强度的分布是类似于近似无衍射 Bessel 光场分布,随着传播距离的增加,光场分布过渡到 Mathieu 光场分布.这是由于入射到轴棱锥上的平面波并非理想的一维高斯振幅调制,而是具有椭圆高斯振幅调制的平面波.只要入射到轴棱锥上的椭圆光斑的离心率足够大,得到的衍射光场就可以全部转变为 Mathieu 光束.实验中经过近似才得到近似 Mathieu 光场分布,而非理论上的 Mathieu 光场分布.

4 结论

本文研究了部分相干光作为光源对产生 Mathieu 光束的影响,利用傅里叶变换下的菲涅尔衍射理论,数值模拟了部分相干光在不同距离处产生 Mathieu 光束的光强分布,同时设计实验验证,得到实验结果与模拟一致,证明了部分相干光在径过带有椭圆孔径的菲林片和轴棱锥调制后可以得到 Mathieu 光束.研究结果对拓展 Mathieu 光束的应用范围提供了理论依据,使得 Mathieu 光束在实际的生产应用中更加的方便灵活.

参考文献

- [1] DUMIN J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. scalar theory[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1987, **4** (4): 651-654.
- [2] FAHRBACH F O, ROHRBACH A. Propagation stability of self-reconstructing Bessel beams enables contrast-enhanced imaging in thick media[J]. *Nature Communications*, 2012, **3**(6): 632-639.
- [3] GUTIERREZVEGA J C, ITURBECASTILLO M D, CHAVEZCERDA S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams[J]. *Optics Letters*, 2000, **25**(20): 1493-1495.
- [4] LI Dong, WU Feng-tie, XIE Xiao-xia. A novel method of generating quasi-non-diffracting Mahtieu beam based on axicon [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(15): 152401-152401.
李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. *物理学报*, 2014, **63**(15): 152401-152401.
- [5] BELAFHAL A, CHAFIQ A, HRICHA Z. Scattering of Mathieu beams by a rigid sphere[J]. *Optics Communications*, 2011, **284**(12): 3030-3035.
- [6] XIE Xiao-xia, JI Wei-jia, WANG Shuo-chen, et al. The focusing characteristics of Mathieu beam propagating through axicon[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(2): 0226002.
谢晓霞, 纪佳位, 王硕琛, 等. 无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥的聚焦特性[J]. *光子学报*, 2016, **45**(2): 0226002.
- [7] FLEISCHER J W, SEGEV M, EFREMIDIS N K, et al. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically-induced nonlinear photonic lattices[J]. *Nature*, 2003, **422**(6928): 147-150.
- [8] CHAFIQ A, NEBDI H, BELAFHAL A. Beam shape coefficients and scattering of zeroth order mathieu beam by homogeneous sphere[J]. *Physical & Chemical News*, 2014, **74**(7): 01-09.
- [9] ALPMANN C, BOWMAN R, WOERDEMANN M, et al. Mathieu beams as versatile light moulds for 3D micro particle assemblies.[J]. *Optics Express*, 2010, **18**(25): 26084-26091.
- [10] LI Ya-jun. Mathieu-Gaussian beam for optical scanners: US, US6719204[P]. 2004.
- [11] KE Xi-zheng, XUE Yao. Arrival angle fluctuations of partially coherent beams in the atmospheric turbulence[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(12): 1206005.
柯熙政, 薛瑶. 部分相干光在大气湍流中的到达角起伏[J]. *光子学报*, 2016, **45**(12): 1206005.
- [12] HE Xi, WU Feng-tie, LI Pan, et al. High order Bessel beams generated by using incoherent LED light source [J]. *Science China*, 2014, **35**(7): 705-711.
何西, 吴逢铁, 李攀, 等. 非相干 LED 光源产生高阶 Bessel 光束[J]. *中国科学*, 2014, **35**(7): 705-711.
- [13] WU Gao-feng, CAI Yang-jian. Modulation of spectral intensity, polarization and coherence of a stochastic electromagnetic beam[J]. *Optics Express*, 2011, **19**(9): 8700-8714.
- [14] LIU Xiang-long, WANG Fei, ZHANG Ming-hui, et al. Experimental demonstration of ghost imaging with an electromagnetic Gaussian Schell-model beam[J]. *Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision*, 2015, **32**(5): 910-920.
- [15] 刘显龙. 部分相干光束的传输及成像研究[D]. 苏州大学, 2013.
- [16] CHENG Zhi-ming, WU Feng-tie, FAN Dan-dan, et al. A precise method for analyzing Bessel-like beams generated by broadband waves[J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, **52** (52): 87-90.
- [17] MALLTSON I H. Interspecies comparison of the refractive index of fused silica[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1965, **55**(10): 1205-1208.