

doi:10.3788/gzxb20184701.0129003

# 基于一阶彩虹区域高斯光散射的液滴测量

孙辉, 于海涛, 沈建琪

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘 要:**为实现雾化过程中局域内单液滴的测量,采用德拜级数展开研究了高斯光照射下球形液滴一阶彩虹区域的散射光强分布,以及高斯光束腰大小对光强分布峰值角度的影响.根据德拜级数展开计算的散射光强分布反演液滴的折射率和粒径,证明了根据高斯光的彩虹散射反演液滴信息的可行性.基于广义洛伦兹-米氏理论计算一阶彩虹区域的总光强分布,根据总光强分布反演液滴折射率和粒径,讨论了高斯光束位置对反演液滴信息的影响.对于半径在 200~1 000  $\mu\text{m}$  区间的液滴,高斯光束位于中心入射时,反演折射率的误差小于  $2.38 \times 10^{-4}$ ,粒径的相对误差在  $-3.31\% \sim 3.31\%$  之间.与采用平行光彩虹技术相比,采用高斯光束为入射光可以得到较高的光能聚集区,较好地定义测量区大小,既可以有效避免多个液滴同时出现在测量区的情况、减小颗粒之间复散射的影响,又可以提高信号强度.

**关键词:** 散射; 颗粒特性; 广义洛伦兹-米氏理论; 彩虹图样; 德拜级数展开

中图分类号: O436

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2018)01-0129003-9

## Study of Drop Measurement Based on Gaussian Beam Scattering in the Primary Rainbow Region

SUN Hui<sup>1</sup>, YU Hai-tao<sup>2</sup>, SHEN Jian-qi<sup>3</sup>

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** For the measurement of a single drop in spray, the Debye series for scattering of a Gaussian beam by a spherical drop is used to study the light intensity distribution in the primary rainbow region and the influence of the Gaussian beam on the peak position of the intensity distribution. According to the intensity distribution calculated by the Debye series, the refractive index and size of drop are inversed, which prove that the Gaussian beam scattering could be used for drop measurements. And then, generalized Lorenz-Mie theory is used to compute the total light intensity which is used to inverse the refractive index and size of drop. And the influence of Gaussian beam position on the inversion of drop information is also investigated. For a Gaussian beam centered on the Descartes ray position, the absolute error of the refractive index is smaller than  $2.38 \times 10^{-4}$  and the absolute value of relative error of drop radius is smaller than 3.13% for drops with a radius between 200 and 1 000  $\mu\text{m}$ . Compared with the rainbow technique using parallel beam, it possible to obtain a measurement area with high intensity and appropriate volume by using Gaussian beam. Therefore, the simultaneous occurrence of many drops in measurement area can be effectively avoided. And we could reduce the influence of multiple scattering between drops and increase the signal intensity.

**Key words:** Scattering; Particles characterization; Rainbow pattern; Generalized Lorenz-Mie theory; Debye series

基金项目: 国家自然科学基金(Nos.51506129, 51476104)资助

第一作者: 孙辉(1993-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为光学测试. Email: sunhui930204@163.com

导 师: 于海涛(1980-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为光学测试. Email: yht1025@yahoo.com

收稿日期: 2017-08-02; 录用日期: 2017-10-10

<http://www.photon.ac.cn>

## 0 引言

雾化广泛应用在燃烧、医药、农业、消防、日常生活等领域,实现雾化过程中液滴粒度大小及分布、速度、温度、蒸发速率等参数的测量,对雾化过程中气液流动、传热机理的研究极为重要<sup>[1]</sup>.光学测量方法是液滴或颗粒测量的一种重要方法,它可以分为直接成像法、强度或强度比例法、干涉法、喇曼散射法<sup>[2-3]</sup>.在众多的液滴测量技术中,彩虹技术既可以实现液滴粒径的测量,又可以测量液滴的折射率和温度<sup>[4]</sup>.

潘琦等<sup>[5]</sup>在一阶彩虹区域内对彩虹测粒技术和算法进行了研究.在高阶彩虹区域,姜会芬等<sup>[6]</sup>研究了不同温度下球形液滴的二阶和五阶彩虹区域的散射特性,及其在液滴测量中的应用.彩虹技术不仅能够测量均匀的球形液滴,同样可以测量非均匀的球形颗粒和椭球液滴<sup>[7-8]</sup>.Marston 首次测得了椭球液滴的彩虹散射图样,即广义彩虹图样<sup>[9-10]</sup>.基于广义彩虹图样可以实现液滴椭球度的测量<sup>[11]</sup>,基于矢量光线追踪模型,三阶和四阶彩虹与液滴椭球度的关系也得到了研究<sup>[12-13]</sup>.彩虹技术同样可以研究液滴的折射率梯度和液体圆柱的温度梯度<sup>[14-15]</sup>.van Beeck 等人<sup>[16]</sup>发展了彩虹技术,即全场彩虹测温法(Global Rainbow Thermometry, GRT),GRT 能够同时测量喷雾场的液滴粒径分布和平均温度,还可以实现液体-液体系统颗粒的测量<sup>[17]</sup>.吴迎春等<sup>[18]</sup>在一阶彩虹区域利用 GRT 测量颗粒浓度和粒径分布.另外,GRT 对非球形颗粒的敏感性也在模拟和实验两方面得到研究<sup>[19]</sup>.GRT 通过测量雾化场中大量液滴的总散射光来计算液滴的粒径和平均温度,因此不能测量单液滴粒径和雾化场的局域温度,也不能够避免颗粒之间复散射的影响.

关于光与颗粒(或液滴)相互作用,洛伦兹-米氏理论给出了线偏振平行光入射下均匀球形颗粒的散射场,众多光学颗粒测量技术均基于洛伦兹-米氏理论<sup>[20-21]</sup>.然而,洛伦兹-米氏理论不能准确的描述有形波束照射下颗粒的散射特征.为此,Gouesbet 等人<sup>[22]</sup>提出了广义洛伦兹-米氏理论(GLMT),它描述了高斯波束照射下颗粒的散射场.最近 30 年,广义洛伦兹-米氏理论发展逐渐成熟<sup>[23-25]</sup>,并推广到椭球形颗粒的散射<sup>[26-27]</sup>.对于球形颗粒、椭球形颗粒、层状颗粒,德拜级数展开可以计算散射光的分波<sup>[28-31]</sup>,从而具体研究某阶散射光对总散射光的影响.与平行光相比,采用高斯光束为入射光可以得到较高的光能聚集区,又可以较好地定义测量区的大小.因此既可以有效避免多个液滴同时出现在测量区的情况、减小颗粒之间复散射的影响,又可以提高信号的强度.

本文基于德拜级数展开研究了高斯光照射下液滴一阶彩虹区域的光散射特性,通过德拜级数展开模拟计算的光强分布反演液滴的折射率和粒径;然后通过广义洛伦兹-米氏理论计算的总光强分布反演液滴信息,并讨论高斯光束腰半径和束腰位置对反演结果的影响.

## 1 基于德拜级数展开的液滴散射特征

在球坐标系 $(r, \theta, \varphi)$ 中,高斯光照射下球形颗粒的散射振幅为<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned} S_1(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{2n(n+1)} [-ima_n g_{n, TM}^m \pi_n^{|m|}(\theta) + b_n g_{n, TE}^m \tau_n^{|m|}(\theta)] \exp(im\varphi) \\ S_2(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{2n(n+1)} [imb_n g_{n, TE}^m \pi_n^{|m|}(\theta) + a_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\theta)] \exp(im\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $a_n$  和  $b_n$  是 Mie 系数,  $g_{n, TE}^m$  和  $g_{n, TM}^m$  是光形系数,  $\pi_n^{|m|}$  和  $\tau_n^{|m|}$  是散射角函数.

为了解释散射中不同物理过程,德拜级数将 Mie 系数展开为<sup>[31]</sup>

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left[ 1 - R_{n, TM}^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{n, TM}^{21} (R_{n, TM}^{11})^{p-1} T_{n, TM}^{12} \right] \\ b_n &= \frac{1}{2} \left[ 1 - R_{n, TE}^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{n, TE}^{21} (R_{n, TE}^{11})^{p-1} T_{n, TE}^{12} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中,第一项  $1/2$  描述入射光波的衍射,第二项  $1/2[1 - R_{n, X}^{22}]$  表示入射波在球面反射的向外波,第三项表示透射进颗粒而且在其内部经过了  $p-1$  次内反射后透射到周围介质的电磁波.  $R_{n, X}^{11}$  和  $R_{n, X}^{22}$  表示分波反射系数.  $T_{n, X}^{12}$  和  $T_{n, X}^{21}$  表示分波透射系数,其中  $X$  分别代表 TE 和 TM.  $R_{n, X}^{11}$ ,  $R_{n, X}^{22}$ ,  $T_{n, X}^{12}$  和  $T_{n, X}^{21}$  可以表达为

$$R_{n,X}^{11} = \frac{-(t_{n,X}^1 - t_{n,X}^2) + (t_{n,X}^3 + t_{n,X}^4)}{D_X}, \quad R_{n,X}^{22} = \frac{-(t_{n,X}^1 - t_{n,X}^2) - i(t_{n,X}^3 - t_{n,X}^4)}{D_X},$$

$$T_{n,TE}^{12} = \frac{2i}{D_{TE}}, \quad T_{n,TM}^{12} = 2i \frac{M}{D_{TM}}, \quad T_{n,TE}^{21} = 2i \frac{M}{D_{TE}}, \quad T_{n,TM}^{21} = \frac{2i}{D_{TM}}. \quad (3)$$

式中

$$D_X = t_{n,X}^1 + t_{n,X}^2 - i(t_{n,X}^3 - t_{n,X}^4), t_{n,X}^1 = -A\Psi'_n(\alpha)\Psi_n(\beta) + B\Psi_n(\alpha)\Psi'_n(\beta),$$

$$t_{n,X}^2 = -A\Omega'_n(\alpha)\Omega_n(\beta) + B\Omega_n(\alpha)\Omega'_n(\beta), t_{n,X}^3 = -A\Omega'_n(\alpha)\Psi_n(\beta) + B\Omega_n(\alpha)\Psi'_n(\beta), \quad (4)$$

$$t_{n,X}^4 = -A\Psi'_n(\alpha)\Omega_n(\beta) + B\Psi_n(\alpha)\Omega'_n(\beta).$$

式中,  $\alpha$  是颗粒的无因次粒径参数 ( $\alpha = 2\pi a/\lambda$ ),  $\beta = M\alpha$ ,  $M$  是相对折射率,  $\lambda$  是入射光的波长. 式(4)中  $A$  和  $B$  存在约定: 对于 TM 波  $A=M, B=1$ ; 对于 TE 波  $A=1, B=M$ .

取笛卡尔坐标系原点位于液滴球心处, 用  $(r, \theta, \phi)$  表示散射场中某点的坐标, 另外一个笛卡尔坐标系原点位于高斯光的束腰中心, 假定入射光束沿着  $z$  轴传播, 高斯光光束可以在  $y$  轴方向移动. 采用德拜级数展开计算光强分布, 即仅考虑  $p=2$  光线的影响. 高斯光的光轴与 Descartes ray<sup>[9]</sup> 重合, 即称为高斯光中心入射. Descartes ray 在液滴内部经历一次内反射, 然后透射出液滴, 其散射角就是几何光学彩虹角. 对于半径为  $50 \mu\text{m}$ 、折射率 1.33 的液滴, Descartes ray 入射的位置是  $y = \pm 43.12 \mu\text{m}$ .

图 1(a) 给出了一阶彩虹区域不同粒径液滴的光强分布, 取高斯光波长  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$ , 束腰  $\omega_0 = 100 \mu\text{m}$ , 液滴折射率  $M = 1.33$ . 由于不同粒径液滴的散射光强绝对值不同, 不便于比较, 因此对散射光强曲线进行了归一化. 由图 1(a) 可见, 不同粒径液滴的散射光强曲线相交  $137.5^\circ$ , 此角度即是几何光学彩虹角. 因为液滴粒径反演与光强分布峰值的角度有关, 因此图 1(b) 给出了光强分布第一峰值的位置随高斯光束束腰半径变化的关系, 由图 1(b) 可见: 随着束腰半径的增加, 光强分布第一个峰值位置趋于恒定值, 此时高斯光入射可以等效为平行光入射的情况.

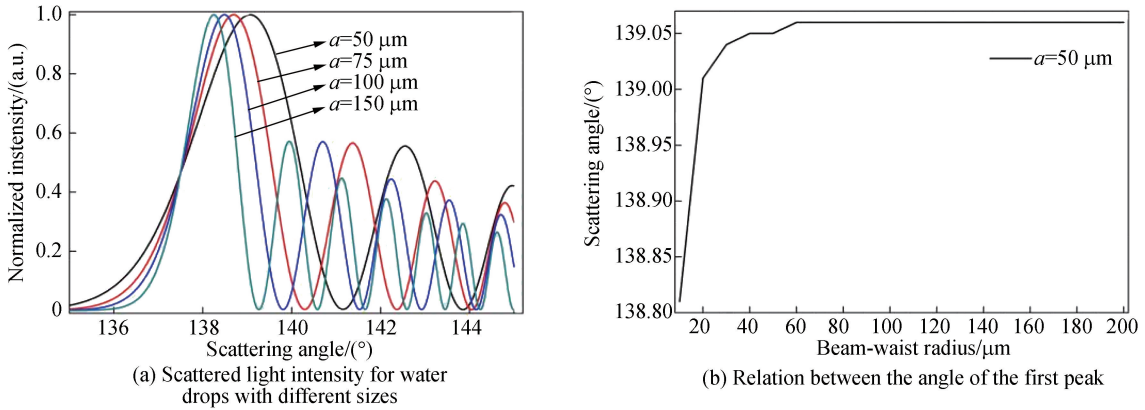


图 1 液滴的散射强度分布和第一峰值所对应角度与高斯光束腰的关系

Fig.1 Scattered light intensity for water drops and relation between the angle of the first peak and the beam waist radius of Gaussian beam

## 2 基于德拜级数展开的液滴信息反演计算

根据 Airy 理论, 几何光学彩虹角和光强分布峰值角度关系为<sup>[8]</sup>

$$\theta_{rg} = (\theta_1 - C\theta_2)/(1 - C) \quad (5)$$

式中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别表示第一个峰值的角度和第二个峰值的角度,  $C$  是常数. 折射率可以通过几何光学彩虹角和折射率的关系得到

$$\theta_{rg} = \pi + 2\arcsin\sqrt{\frac{4 - M^2}{3}} - 4\arcsin\sqrt{\frac{4 - M^2}{3M^2}} \quad (6)$$

液滴的半径也可以通过折射率和峰值所对应的角度计算

$$a = \frac{\lambda}{8} \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\theta_1 - \theta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{3(4 - M^2)^{\frac{1}{2}}}{(M^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

式中  $\alpha_1=1.0874$ ,  $\alpha_2=3.4668$  和  $C=\alpha_2/\alpha_1$ .因此可以用彩虹区域的光强分布和式(5)~(7)计算液滴的折射率和半径.

首先通过德拜级数展开计算一阶彩虹区域的散射光强,即仅考虑  $p=2$  光线的贡献,没有考虑反射光和其它阶折射光( $p \neq 2$ )的影响.然后根据光强分布反演液滴的折射率和粒径,这里的“反演”是指根据式(5)~(7)计算液滴的折射率和粒径.雾化细度(液滴的平均直径)是表征雾化质量的重要参量,雾化细度并不是越小越好,燃气轮机燃烧室中,燃料液滴的中间直径不大于  $75 \sim 100 \mu\text{m}$ ,其他雾化过程(雾化降温、雾化干燥等)也存在粒径稍大的液滴<sup>[1]</sup>,因此取液滴粒径范围为  $50 \sim 1000 \mu\text{m}$ .

表 1 高斯光束中心入射时,液滴折射率和粒径的反演结果

Table 1 The computed results for droplet illuminated by Gaussian beam located at the center of Descartes rays

Beam-waist radius/ $\mu\text{m}$	Droplet Radius/ $\mu\text{m}$	Inversed refractive index	Absolute error of the refractive index	Inversed droplet radius/ $\mu\text{m}$	Relative error of the droplet radius/%
40	50	1.329 774	-0.000 226	50.954 0	1.91
	1 000	1.329 155	-0.000 845	776.687 3	-22.3
80	50	1.329 824	-0.000 126	51.168 5	2.32
	1 000	1.329 781	-0.000 219	943.661 9	-5.63
100	50	1.329 824	-0.000 126	51.168 5	2.32
	1 000	1.329 880	-0.000 12	972.417 1	-2.76

由图 1(b)可见高斯光束半径大小影响光强分布峰值的位置,折射率和粒径的反演计算又与峰值的位置有关[见式(5)~(7)],因此高斯光束腰半径将影响折射率和粒径的反演计算.表 1 给出了高斯光束腰半径为  $40 \mu\text{m}$ 、 $80 \mu\text{m}$ 、 $100 \mu\text{m}$  三种情况下液滴折射率和粒径的反演结果,高斯光为中心入射.当高斯光束腰半径为  $40 \mu\text{m}$  时,对于半径为  $50 \mu\text{m}$  的液滴,通过式(7)反演的液滴粒径的相对误差为 1.91%;对于半径  $1000 \mu\text{m}$  的液滴,粒径的相对误差为 -22.3%.这是因为:当束腰半径是  $40 \mu\text{m}$  时,由于束腰半径较小,在产生一阶彩虹散射的入射区域(即彩虹入射区)内,入射光不能近似看作平行光;然而反演液滴信息相关的式(5)~(7)是建立在平行光的基础上,所以液滴粒径的反演误差较大.由表 1 可见:对于粒径较大的液滴,反演粒径的误差随着高斯光束腰增大而减小.例如对于半径为  $1000 \mu\text{m}$  的液滴,束腰半径为  $80 \mu\text{m}$  时,反演粒径的相对误差为 -5.63%;束腰半径为  $100 \mu\text{m}$  时,反演粒径的相对误差降为 -2.76%.这是因为:对于给定粒径大小的液滴,彩虹入射区大小不变,而增大高斯光束的束腰半径时,会使彩虹入射区的光线可以近似看作平行光,所以液滴粒径的反演误差较小.另外,彩虹高斯光的优势是为了较好地定义测量区的大小,既可以有效避免多个液滴同时出现在测量区的情况,即不宜选取太大的束腰半径.因此,对于半径小于  $1000 \mu\text{m}$  的液滴,我们选取高斯光束腰半径为  $100 \mu\text{m}$ .

图 2(a)给出了基于散射光强反演计算的液滴折射率,高斯光处于中心入射,束腰半径为  $100 \mu\text{m}$ ,采用德拜级数展开计算散射光强分布.由图 2(a)可见,反演计算的液滴折射率与实际液滴折射率(即 1.33)比较接近.图 2(b)给出反演的绝对误差,反演折射率的绝对误差小于  $1.76 \times 10^{-4}$ .由于高斯光束对峰值位置的影

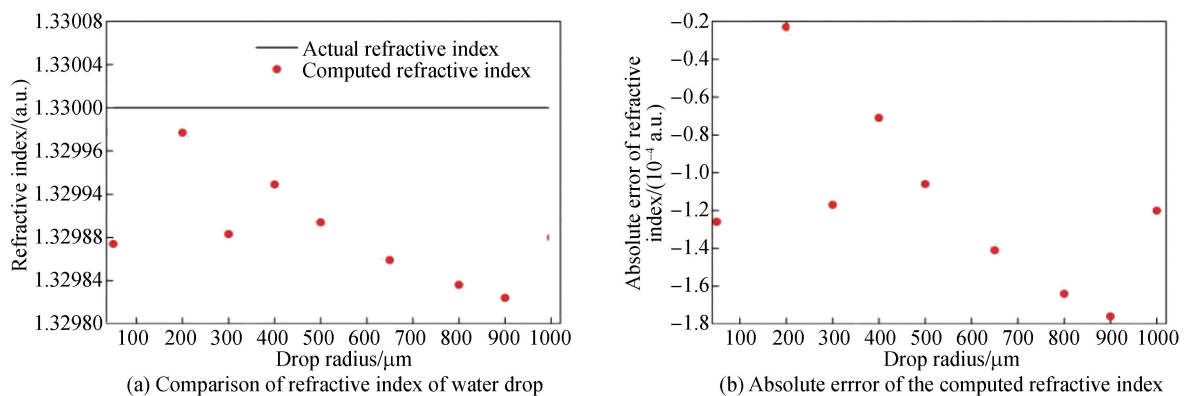


图 2 通过散射光强反演的液滴折射率与实际折射率的比较和反演折射率的绝对误差

Fig.2 Comparison of refractive index of water drop and that calculated from the intensity distribution and absolute error of the computed refractive index

响,所以折射率都要小于 1.33.图 3(a)为通过散射光强反演计算的液滴粒径与实际液滴粒径的比较,可见液滴的反演粒径与实际粒径非常吻合.图 3(b)为反演粒径的相对误差,相对误差在  $-3.94\% \sim 3.94\%$  之间.

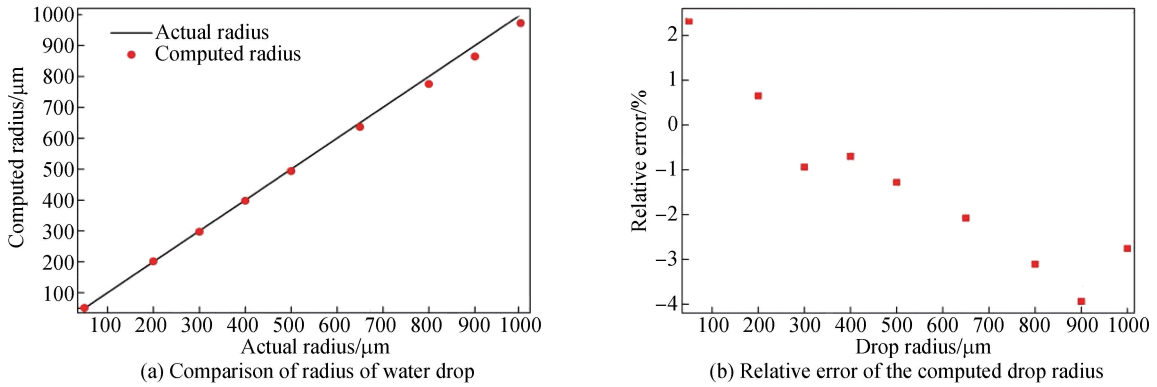


图 3 通过散射光强反演的液滴粒径与实际粒径的比较和反演粒径的相对误差

Fig.3 Comparison of radius of water drop and that calculated from the intensity distribution and relative error of the computed drop radius

由于在实际测量中,高斯光的光轴可能偏离 Descartes ray,即高斯光入射到液滴任意位置.因此,需要研究高斯光偏离 Descartes ray 的情况.图 4 给出了上偏极限(upper position limit)和下偏极限(lower position limit)的示意图,上偏极限是指高斯光的下边界(即此处光强为中心光的  $e^{-1}$  倍)与 Descartes ray 重合,下偏极限是指高斯光的上边界与 Descartes ray 重合.图 5(a)给出了上偏极限和下偏极限两种情况下液滴折射率的反演结果,并与实际液滴折射率做了比较.图 5(b)是反演折射率的绝对误差,绝对误差均小于  $2.02 \times 10^{-4}$ .图 6(a)为液滴的反演粒径与实际粒径的比较,上偏极限和下偏极限两种情况下,反演的液滴粒径均与实际粒径非常吻合.图 6(b)为液滴反演的相对误差,可见反演粒径的相对误差均小于  $4.97\%$ .对于高斯光位于上偏极限和下偏极限之间的情况,反演的结果与液滴实际值也非常吻合.

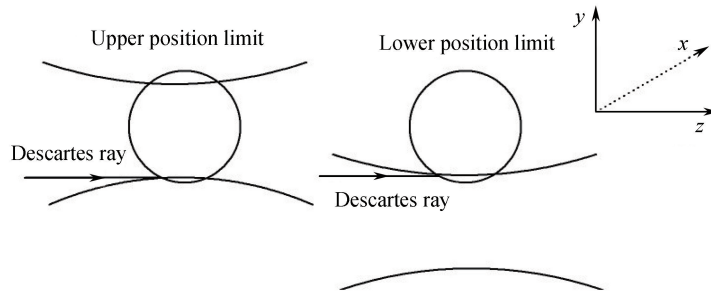


图 4 高斯光上极限和下极限入射示意图

Fig.4 Schematic of upper and lower position limits of Gaussian beam illumination

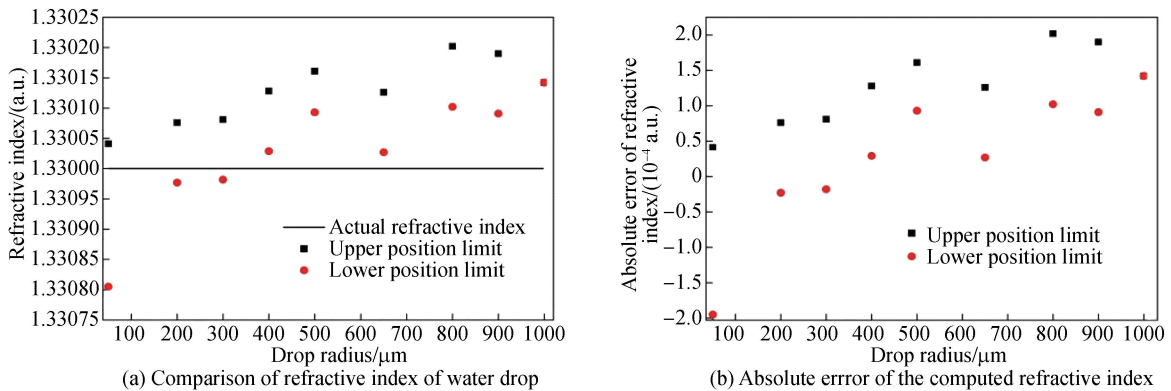


图 5 根据散射光强反演的液滴折射率与实际折射率的比较和反演折射率的绝对误差

Fig.5 Comparison of the refractive index of water drop calculated from the intensity distribution with the true value and absolute error of the computed refractive index

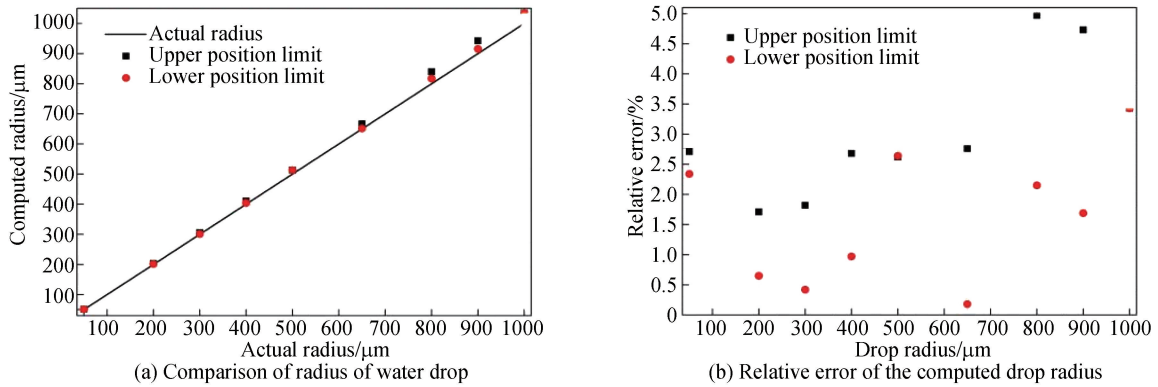


图6 根据散射光强反演的液滴粒径与实际粒径的比较和反演粒径的相对误差

Fig.6 Comparison of radius of water drop and that calculated from the intensity distribution and relative error of the computed drop radius

### 3 基于 GLMT 的液滴信息反演计算

在实验中探测的是总光强,因此需要研究高斯光照射下液滴的总光强分布,通过广义洛伦兹-米氏理论计算液滴一阶彩虹区域的总光强分布,然后根据总光强分布反演液滴的折射率和粒径.

图7给出了高斯光照射下不同粒径液滴的总散射光强分布,高斯光束腰半径为 $100\ \mu\text{m}$ ,高斯光位于中心入射情况,即高斯光的光轴与 Descartes ray 重合,液滴半径分别为 $50\ \mu\text{m}$ 、 $75\ \mu\text{m}$ 和 $100\ \mu\text{m}$ .由图7可见,对于半径为 $50\ \mu\text{m}$ 的液滴,光强分布曲线上存在 ripple structure,即相对于图1(a)中光强分布,有毛刺存在, $p=2$ 的光线与其它阶光线( $p \neq 2$ )的干涉效应.若 ripple structure 存在,不能够得到光强分布的第一个峰值和第二个峰值角度,因此需要对总光强进行滤波,采用低通高斯滤波(low-pass Gaussian filter)后可以得到如图1(a)所示的光顺的强度分布曲线.由图7可见:对于粒径较大的液滴,例如半径 $200\ \mu\text{m}$ 的液滴,总光强分布曲线上不存在 ripple structure,这是因为对于粒径较大的液滴,其它阶光线( $p \neq 2$ )的强度相对较弱.模拟计算发现:当液滴半径和高斯光束腰半径的比值大于2时,一阶彩虹区域的总散射光强曲线上不存在 ripple structure.

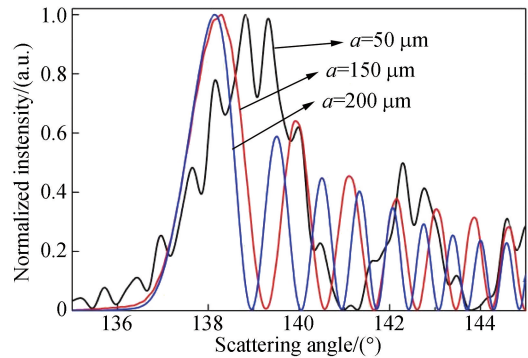


图7 不同液滴一阶彩虹区域的总散射光强分布  
Fig.7 Intensity distributions for different water drops

根据总光强分布反演液滴的折射率和粒径,分别考虑高斯光位于中心入射、上偏极限和下偏极限入射三种情况.图8(a)给出了液滴折射率的反演结果,液滴粒径取 $200\sim 1\ 000\ \mu\text{m}$ ,可见三种情况下反演的折射率均与实际折射率吻合.对于高斯光中心入射,反演折射率的绝对误差小于 $2.38 \times 10^{-4}$ (见图8(b)).但是,在液滴粒径较小时,相对于高斯光中心入射,上偏极限和下偏极限的绝对误差相对较大,例如当液滴的半径在 $300\sim 1\ 000\ \mu\text{m}$ 之间时,反演折射率的绝对误差均小于 $3.37 \times 10^{-4}$ ,然而当液滴半径小于 $300\ \mu\text{m}$ 时,上偏极限和下偏极限两种情况的折射率绝对误差较大.这是因为:液滴粒径越小,其它阶光线( $p \neq 2$ )对总光强影响就越强;而且偏离中心的光线也不能够再看作平行光.

图9(a)给出了高斯光中心入射、上偏极限和下偏极限三种情况下液滴粒径的反演结果,反演结果与液滴实际粒径比较吻合.图9(b)给出了反演粒径的相对误差,对于高斯光中心入射,反演粒径的相对误差在 $-3.11\% \sim 3.11\%$ 之间.对于粒径 $300\sim 1\ 000\ \mu\text{m}$ 的液滴,当高斯光位于上偏极限和下偏极限时,反演计算的液滴粒径的相对误差的绝对值小于5%.但是,对于粒径较小的液滴,高斯光位于上偏极限和下偏极限时,反演粒径的误差较大,与折射率反演误差较大的原因相同,即液滴粒径越小,其它阶光线( $p \neq 2$ )对总光强影响就越强;偏离中心的光线也不能够看作平行光.另外,通过对高斯光位于上偏极限和下偏极限之间的情况

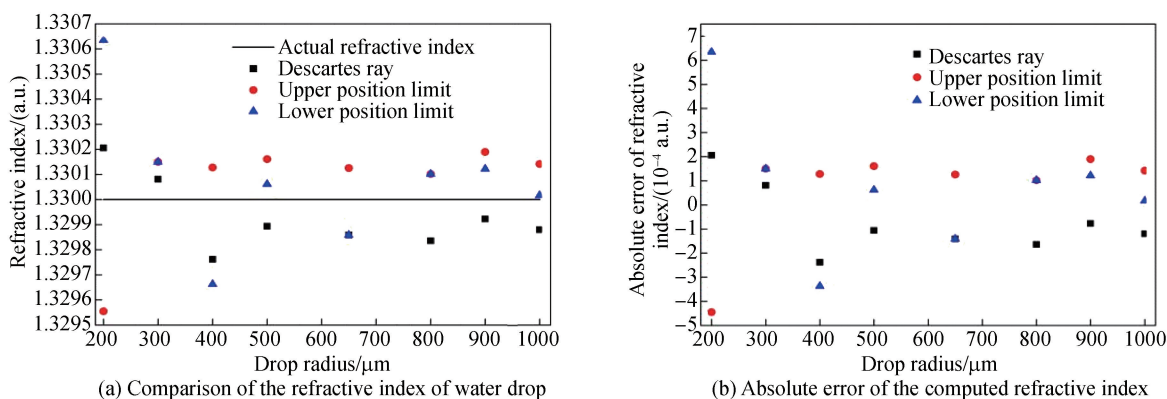


图 8 根据散射光强反演的液滴折射率与实际折射率的比较和反演折射率的绝对误差

Fig.8 Comparison of the refractive index of water drop calculated from the intensity distribution with the true value and absolute error of the computed refractive index

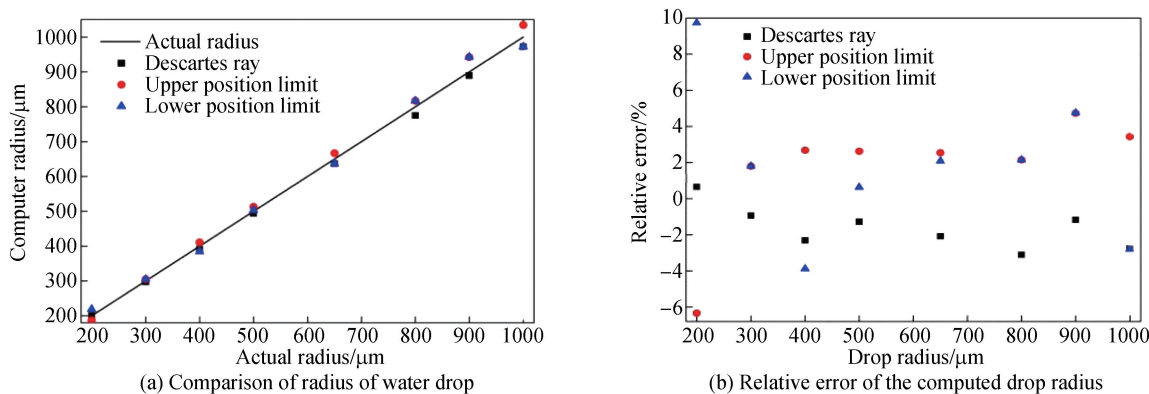


图 9 根据散射光强反演的液滴粒径与实际粒径的比较和反演粒径的相对误差

Fig.9 Comparison of radius of water drop and that calculated from the intensity distribution and relative error of the computed drop radius

研究发现:折射率和粒径反演结果也较好.

众所周知, Airy 理论是基于平行光入射的, 因此式(5)~(7)适用的条件是:入射光线可以近似为平行光.当高斯光中心位于 Descartes ray 附近时,入射光可以近似看作平行光,所以反演计算的液滴折射率和粒径与实际值非常吻合,当高斯光远离 Descartes ray 时,入射光就不能看成平行光,所以反演计算结果的误差较大.

进一步研究发现:对于粒径较大的液滴,当散射光强中第一个波谷的光强和第一个峰值的光强的比值大于 0.2 时,反演粒径的误差就会变大.这是因为:靠近 Descartes ray 的入射光的振幅与偏离 Descartes ray 的入射光的振幅相差较大,由于这两条光线存在振幅差,相干相消时光强不可能为零,因此散射光强的第一个波谷处的光强较大.因此可以把第一个波谷和第一个峰值光强的比值作为判别标准,当光强比值小于 0.2,光强分布可以被用于反演液滴折射率和粒径,当光强比值大于 0.2,光强分布不能被用于反演液滴折射率和粒径.

比较图 5 和图 8 液滴折射率的反演结果,图 6 和图 9 液滴粒径反演结果,发现:通过德拜级数展开计算的彩虹散射光强反演液滴信息误差较小,相反通过广义洛伦兹-米氏理论计算的彩虹散射光强反演液滴信息误差较大.这是因为:通过德拜级数展开计算彩虹区域的散射光强,仅考虑  $p=2$  光线的贡献,没有考虑反射光和其它折射光( $p \neq 2$ )的影响,光强分布曲线是光顺的,不需要滤波,可以直接读取光强分布峰值位置对应的角度,然后进行液滴折射率和粒径的反演计算.另外, Airy 理论也是建立在仅仅考虑  $p=2$  光线基础上,因此根据德拜级数展开获得的光强分布和 Airy 理论获得的折射率和粒径公式反演液滴信息,误差相对较小.然而,基于广义洛伦兹-米氏理论计算的光强分布上存在毛刺结构(ripple structure),这是反射光和其它阶折射光( $p \neq 2$ )共同的影响<sup>[7]</sup>.因此需要滤波,才能得到光顺的光强分布曲线,得到光强分布峰值位置对应的角度,然后进行液滴折射率和粒径的反演计算.这里通过滤波过程剔除反射光和其它阶折射光( $p \neq 2$ )的影响,但是不可能得到与图 1(a)完全相似的结果,所以此时误差相对较大.

## 5 结论

基于德拜级数展开,研究了高斯光照射下球形液滴一阶彩虹区域的散射光强分布特性,讨论了高斯光束腰半径对几何光学彩虹角的影响,根据德拜级数展开计算的散射光强分布反演液滴的折射率和粒径,讨论了高斯光束腰大小和光束位置对反演的影响,证明了基于液滴光强分布反演液滴信息的可行性.基于广义洛伦兹-米氏理论计算一阶彩虹区域的总光强分布,根据总光强分布反演液滴折射率和粒径,考虑高斯光位于中心入射、上偏极限和下偏极限三种情况,中心入射时反演折射率的误差小于  $2.38 \times 10^{-4}$ ,粒径的相对误差在  $-3.31\% \sim 3.31\%$  之间.对于上偏极限和下偏极限,当液滴的半径在  $300 \sim 1\,000 \mu\text{m}$  时,反演计算的折射率绝对误差均小于  $3.37 \times 10^{-4}$ ;对于粒径  $300 \sim 1\,000 \mu\text{m}$  的液滴,当高斯光位于上偏极限和下偏极限时,反演计算的液滴粒径的相对误差的绝对值小于  $5\%$ .与平行光相比较,采用高斯光束为入射光可以得到较高的光能聚集区,同时可以较好地定义测量区的大小.因此既可以有效避免多个液滴同时出现在测量区的情况,又可以使该技术适用于液滴浓度较高的雾化场,还可以提高信号的强度.

### 参考文献

- [1] 曹建明. 液体喷雾学[M]. 北京大学出版社, 2013.
- [2] TROPEA C. Optical particle characterization in flows[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2011, **43**(1): 399-426.
- [3] XUN Min, SHEN Jin, ZHU Xin-jun, *et al.* Recovery of bimodal particle size distributions with multiangle dynamic light scattering[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2017, **46**(2): 229001.  
徐敏, 申晋, 朱新军, 等. 双峰分布颗粒体系的多角度动态光散射数据反演[J]. 光子学报, 2017, **46**(2): 229001.
- [4] ROTH N, ANDERS K, FROHN A. Simultaneous measurements of temperature and size of droplets in the micrometer range. in proceedings of the seventh international congress on optical methods in flow and particle diagnostics[J]. *Journal of Laser Applications*, 1989, **2**(37): 294-304.
- [5] PAN Qi, WANG Shi-min. Study on optical particle measurement base on rainbow phenomena[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 388-393.  
潘琦, 王式民. 基于彩虹现象的光学测粒技术研究[J]. 光学学报, 2009, **29**(2): 388-393.
- [6] JIANG Hui-fen, HAN Xiang'e, REN Kuan-fang, *et al.* Reconstruction of intensity of the second and fifth rainbows and its applications to homogeneous droplet[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1561-1565.  
姜会芬, 韩香娥, 任宽芳, 等. 均匀球形液滴二阶和五阶彩虹重建及应用[J]. 光学学报, 2004, **24**(11): 1561-1565.
- [7] VAN BEECK J, RIETHMULLER M L. Nonintrusive measurements of temperature and size of single falling raindrops [J]. *Applied Optics*, 1995, **34**(10): 1633-1639.
- [8] YU Hai-tao, XU Feng, TROPEA C. Spheroidal droplet measurements based on generalized rainbow patterns[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2013, **126**: 105-112.
- [9] MARSTON P L, TRINH E H. Hyperbolic umbilic diffraction catastrophe and rainbow scattering from spheroidal drops [J]. *Nature*, 1984, **312**: 529-531.
- [10] MARSTON P L. Cusp diffraction catastrophe from spheroids: generalized rainbows and inverse scattering[J]. *Optics Letters*, 1985, **10**(12): 588-590.
- [11] YU Hai-tao, XU Feng, TROPEA C. Optical caustics associated with the primary rainbow of oblate droplets: simulation and application in non-sphericity measurement[J]. *Optics Express*, 2013, **21**(22): 25761-25771.
- [12] GUAN Lu-lu, TU Hai-tao, SHEN Jian-qi, Tropea C. Simulation of optical caustics associated with the tertiary rainbow of oblate droplets[J]. *Applied Optics*, 2016, **55**(23): 6447-6451.
- [13] GUAN Lu-lu, YU Hai-tao, SHEN Jian-qi. Third- and fourth-order rainbow fringe characteristics of homogeneous ellipsoid droplets[J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, **37**(3): 359-366.  
管露露, 于海涛, 沈建琪. 均匀椭球形液滴三阶和四阶彩虹条纹特征[J]. 光学学报, 2017, **37**(3): 359-366.
- [14] SAENGKAEW S, CHARINPARITKUL T, VANISRI H, *et al.* Rainbow refractometry on particles with radial refractive index gradients[J]. *Experiments in Fluids*, 2007, **43**(4): 595-601.
- [15] SONG Fei-hu, XU Chuan-long, WANG Shi-min. Reversion algorithm for liquid column parameter with rainbow technique[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(12): 121-131.  
宋飞虎, 许传龙, 王式民. 基于德拜理论的液柱参数彩虹反演算法研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(12): 121-131.
- [16] VAN BEECK J, GIANNOULIS D, ZIMMER L, *et al.* Global rainbow thermometry for droplet temperature measurement[J]. *Optics Letters*, 1999, **24**(23): 1696-1698.
- [17] VETRANO M R, VAN BEECK J, RIETHMULLER M L. Global rainbow thermometry: improvements in the data inversion algorithm and validation technique in liquid-liquid suspension[J]. *Applied Optics*, 2004, **43**(18): 3600-3607.
- [18] WU Ying-chun, WU Xue-cheng, SAENGKAEWI S, *et al.* Concentration and size measurements of sprays with global rainbow technique[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(9): 090703.



- 吴迎春,吴学成,Saengkaewi S,等. 全场彩虹技术测量喷雾浓度及粒径分布[J]. 物理学报,2013, **62**(9):0907031-8.
- [19] WANG Jia-jie, GRÉHAN G, HAN Yi-ping, *et al.* Numerical study of global rainbow technique sensitivity to non-sphericity of droplets[J]. *Experiments in Fluids*, 2011, **51**(1): 149-159.
- [20] MIE G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metsllösungen[J]. *Annals of Physics*, 1908, **330**(3): 376-445.
- [21] XIANG Jian-sheng, HE Jun-hua, CHEN Min, *et al.* Study of Character of the forward scattered light of bubbles based on Mie's light scattering theory[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(11): 2111-2114.  
项建胜,何俊华,陈敏,等. 基于 Mie 光散射理论的尾流气泡前向散射光特性研究[J]. 光子学报,2007, **36**(11):2111-2114.
- [22] GOUESBET G, MAHEU B, GRÉHAN G. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 1988, **5**(9): 1427-1443.
- [23] LOCK J A, GOUESBET G. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. I. on-axis beams[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 1994, **11**(9): 2503-2515.
- [24] REN Kuan-fang, GRÉHAN G, GOUESBET G. Localized approximation of generalized Lorenz-Mie theory: faster algorithm for computation of the beam shape coefficients,  $g_m^n$  [J]. *Particle & Particle Systems Characterization*, 1992, **9**(4): 144-150.
- [25] SHEN Jian-qi, JIA Xiao-wei, YU Hai-tao. Compact formulation of the beam shape coefficients for elliptical Gaussian beam based on localized approximation[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 2016, **33**(11): 2256-2263.
- [26] BARTON J P. Internal and near-surface electromagnetic fields for a spheroidal particle with arbitrary illumination[J]. *Applied Optics*, 1995, **34**(24): 5542-5551.
- [27] XU Feng, REN Kuan-feng, GOUESBET G, *et al.* Generalized Lorenz-Mie theory for an arbitrarily oriented, located, and shaped beam scattered by a homogeneous spheroid[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 2007, **24**(1): 119-131.
- [28] LOCK J A. Contribution of high-order rainbows to the scattering of a Gaussian laser beam by a spherical particle[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 1993, **10**(4): 639-705.
- [29] XU Feng, LOCK J A, TROPEA C. Debye series for light scattering by a spheroid[J]. *Journal of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 2010, **27**(4): 671-686.
- [30] XU Feng, LOCK J A, GOUESBET G. Debye series for light scattering by a nonspherical particle[J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(4): 043824-42.
- [31] GOUESBET G. Debye series formulation for generalized Lorenz-Mie theory with the Bromwich method[J]. *Particle & Particle Systems Characterization*, 2003, **20**(6): 382-386.