

doi: 10.3788/gzxb20174607.0701005

# 基于湍流球泡折射的空间量子密钥分发性能分析

薛阳<sup>1</sup>, 马丽华<sup>1</sup>, 石磊<sup>1</sup>, 罗均文<sup>1</sup>, 徐志燕<sup>1</sup>, 李娜<sup>1</sup>, 姬一鸣<sup>2</sup>

(1 空军工程大学 信息与导航学院, 西安 710077)

(2 空军大连通信士官学校, 辽宁 大连 116600)

**摘 要:** 为了研究大气湍流对自由空间量子密钥分发的性能影响, 将大气湍流建模为空间中随机分布的空气球泡, 利用几何光学原理分析单光子在湍流球泡中的传播, 定量计算了经过两次折射后由于偏振态变化造成的光子透射率比值  $k$  和误码率  $E_p$  的起伏, 利用蒙特卡洛方法模拟了湍流折射率随机变化时二者的趋势; 最后推导了经过湍流折射后的诱骗态空间量子密钥分发成码率公式并通过分析误码来源得到满足成码率需要的  $k$  值上限, 建立偏振误码率与入射角和湍流折射率的关系并得到  $E_p$  的安全阈值. 仿真结果表明当入射角在  $44.8^\circ \sim 76.5^\circ$ , 湍流折射率在  $1 \sim 1.33$  范围内可以满足误码率的上限约束. 该研究为湍流条件下进行空间量子通信实验提供了理论参考.

**关键词:** 自由空间量子密钥分发; 湍流球泡模型; 偏振态; 误码率; 诱骗态

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2017)07-0701005-6

## Performance Analysis of Free Space Quantum Key Distribution Based on Refraction of Turbulence Bubble

XUE Yang<sup>1</sup>, MA Li-hua<sup>1</sup>, SHI Lei<sup>1</sup>, LUO Jun-wen<sup>1</sup>, XU Zhi-yan<sup>1</sup>, LI Na<sup>1</sup>, JI Yi-ming<sup>2</sup>

(1 Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710072, China)

(2 Air Force Communication Sergeant School, Dalian, Liaoning 116600, China)

**Abstract:** In order to analyze the influence of atmospheric turbulence on the performance of free space Quantum Key Distribution (QKD), the turbulence is modeled as randomly distributed atmospheric bubbles so as to conceive the propagation process of single photon using geometric optics. The fluctuation of photon transmission ratio  $k$  and Quantum Bit Error Rate (QBER)  $E_p$  has been quantitatively calculated, which both are caused by the change of polarization state after continuous refractions. Then the trends of these two values are simulated with random turbulence refractive index using Monte-Carlo method. Furthermore, the key generation rate of decoy state free space QKD has been derived under turbulence situation. The upper bound of  $k$  is achieved through analyzing the source of QBER and the relationship between  $E_p$  and incident angle and turbulence refractive index is established which defines the secure threshold of  $E_p$ . Simulation results show that when incident angle is between  $44.8^\circ$  and  $76.5^\circ$  while the refractive index falls within  $1 \sim 1.33$  will meet the required upper bound of  $E_p$ , which provides theoretical reference to quantum communication in turbulence scenario.

**Key words:** Free space quantum key distribution; Turbulence bubble model; Polarization state; Error rate; Decoy state

**OCIS Codes:** 010.1330; 270.5565; 200.2605

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61168068)资助

第一作者: 薛阳(1993-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为空间量子密钥分发. Email: relnix@sina.cn

导师(通讯作者): 马丽华(1974-), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为光纤通信和量子通信. Email: hua\_marry@sohu.com

收稿日期: 2016-12-27; 录用日期: 2017-03-21

<http://www.photon.ac.cn>

## 0 引言

航空通信的可靠性和安全性一直以来是人们研究的重点,自由空间量子密钥分发可以实现随机密钥在地空双方之间绝对安全地共享,被认为是构建安全航空通信链路和全球保密通信网络的重要手段,自提出以来逐渐发展为量子通信领域最具有实用价值和发展潜力的技术之一.目前关于自由空间量子密钥分发的研究主要集中在可行性分析和安全性证明上<sup>[1]</sup>,奥地利学者 Ursin 实验证明了在相距较远的终端之间分发单光子或纠缠光子对的可能性<sup>[2]</sup>.意大利帕多瓦大学 Villorosi 团队 2008 年通过角反射器模拟单光子源首次实现了地面站与卫星之间的单光子收发<sup>[3]</sup>,迈出了自由空间量子通信的重要一步.2010 年中科大潘建伟团队实现了 16km 的量子隐形传态<sup>[4]</sup>,进一步突破了自由空间量子通信实验的距离记录.为了研究针对航空环境下的量子密钥分发性能,2013 年德国开展了世界首个机载量子密钥分发实验<sup>[5]</sup>,2014 年 Capraro 等研究了光通信链路中湍流对单光子传输的影响<sup>[6]</sup>,2016 年聂敏等研究了雾霾、沙尘等气象条件对空间量子密钥分发的影响<sup>[7-10]</sup>,文献[11]建立了量子信道纠缠度与湍流强度的关系,为研究航空环境下的量子通信性能提供了理论参考.由于空间量子通信广泛采用偏振编码<sup>[12]</sup>,当信号光在湍流大气中传输会受到许多因素的影响,其中电介质界面折射对偏振态的改变是造成误码的主要原因<sup>[13]</sup>,所以研究单光子经过湍流折射后的状态变化以及误码率起伏对空间量子密钥分发具有重要意义.

本文针对湍流条件下采用诱骗态协议的量子密钥分发过程<sup>[14]</sup>,研究偏振光子在大气中传输的特点.目前关于空间光通信已有许多不同的湍流模型<sup>[15]</sup>,为了简化问题主要考虑了湍流的折射作用对光子偏振的影响,基于现有的湍流球泡模型<sup>[16]</sup>将单光子经过湍流球泡的实际情形抽象为单光子在折射率不同的介质间的连续折射问题.由于偏振光的不同分量在界面折射时,透射率各不相同,并且会随着入射角的变化而起伏,从而影响偏振态的传递并产生误码<sup>[17]</sup>,因此可以从偏振态的变化入手分析湍流条件下的空间量子密钥分发性能.

## 1 湍流球泡模型

当单光子在大气信道中传播时,可将湍流抽象成尺度随机变化,折射率起伏不定的空气湍流球泡,由于球泡内外的折射率存在差异导致光子穿过球泡界面时发生两次折射,第一次从折射率为  $n_1$  的空气进入折射率为  $n_2$  的湍流球泡,第二次再从球泡射入空气,其光路示意图如图 1.

设单光子信号从球泡表面 A 点以  $\theta_1$  角度入射,穿过湍流后从 B 点射出,其中发生第一次折射的折射角为  $\theta_2$ ,由几何关系可得也恰好等于第二次折射的入射角,在球泡内折射率为定值的前提下第二次折射角也等于  $\theta_1$ .  $r_1$  和  $r_2$  分别为两次反射光,  $m$  表示在球泡内部传播的一部分光路.根据光的偏振表示方法,令入射光  $i$  的波矢量为  $E$ ,由菲涅尔折射原理<sup>[18]</sup>可以分别求出两次折射的 S 分量与 P 分量满足

$$\frac{E_s^{(m)}}{E_s^{(i)}} = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \quad (1)$$

$$\frac{E_p^{(m)}}{E_p^{(i)}} = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \quad (2)$$

$$\frac{E_s^{(t)}}{E_s^{(m)}} = \frac{2\cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin(\theta_2+\theta_1)} \quad (3)$$

$$\frac{E_p^{(t)}}{E_p^{(m)}} = \frac{2\cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1)} \quad (4)$$

同时两次折射过程都满足斯涅尔折射定律

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \quad (5)$$

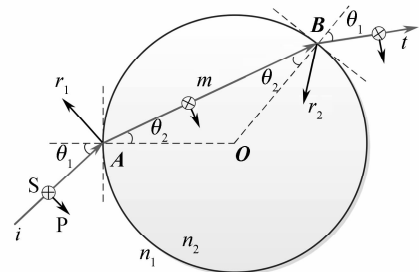


图 1 单光子连续折射示意图

Fig. 1 Diagram of continuous refraction of single photon

则根据式(1)~(4)比较出射光  $t$  和入射光  $i$  之间的两分量可以得到其振幅透射率比值为

$$k = (\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)^2 \quad (6)$$

对式(6)仿真可得  $k$  与入射角  $\theta_1$  的关系如图 2.

由图 2 可见,当入射角为  $0^\circ$  时,光子沿球泡直径方向透射,透射率比值达到最大;当入射角超过  $44.8^\circ$  后,透射率比值开始迅速下降,经过连续折射后的光子偏振态保真能力变差.虚线表示湍流折射率小于外界大气折射率的情况,当入射角超过全反射临界角时,没有折射光从球泡中透射出来,因此曲线达到极小值 0.66 后就不再延续.

当选取入射角为  $45^\circ$  时,联立式(5)~(6)可以得到  $k$  与湍流折射率  $n_2$  的关系如图 3.

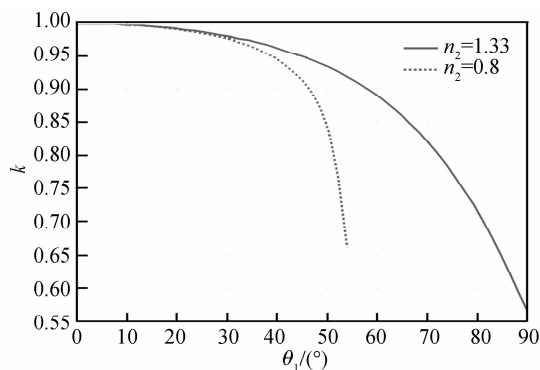


图 2 振幅透射率比值与入射角的关系

Fig. 2 Relationship between transmission ratio and incident angle

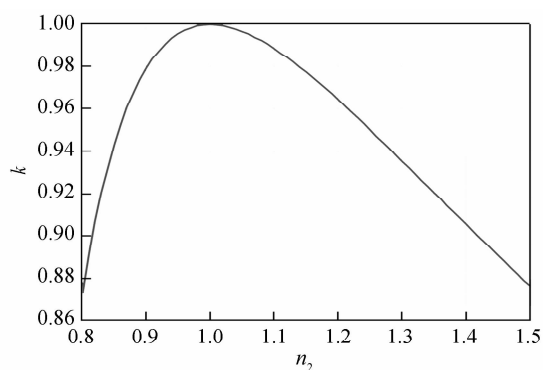


图 3 振幅透射率比值与湍流折射率的关系

Fig. 3 Relationship between transmission ratio and turbulence refractive index

湍流折射率的大小很大程度上影响着透射率比值  $k$  的起伏,理想的情况是湍流折射率与外界大气折射率相等时,单光子的透射性能最好,引起的偏振变化也最小;一般情况下  $n_2 > n_1$ ,随着湍流折射率的增加,透射率逐渐下降,将造成较大的偏振误码,而  $n_2 < n_1$  时,趋势恰好相反,这是由于光子从折射率高的大气进入折射率低的湍流后可能发生全反射的现象从而没有光子透射.

然而实际的大气湍流情况更为复杂,研究表明湍流的折射率满足正态分布<sup>[19]</sup>,本文中假设每个湍流球泡内部折射率为均匀定值,而对于随机分布在大气信道中的多个湍流球泡,其折射率  $n_2$  服从  $N(1, 0.01)$  的正态分布,利用 Monte-Carlo 方法仿真 10 组光子穿过不同折射率的湍流球泡的情形如图 4、5 所示.

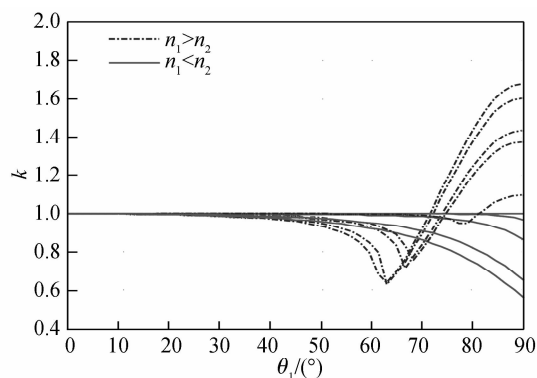


图 4 折射率随机情况下  $k$  与入射角的关系

Fig. 4 Relationship between  $k$  and incident angle at random refractive index

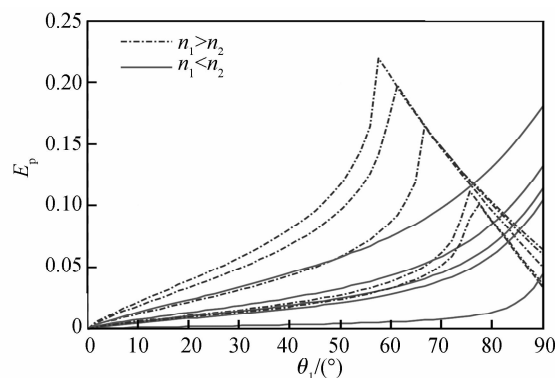


图 5 折射率随机情况下  $E_p$  与入射角的关系

Fig. 5 Relationship between  $E_p$  and incident angle at random refractive index

由两图 4、5 可得,折射率  $n_2$  随机变化时,单光子信号在大气中传播性能十分不稳定,实线表明当光子穿过折射率较高的湍流时,虽然能量衰减较大但误码率上升缓慢,如果发射频率足够大的情况下可以满足空间量子密钥分发的要求;但穿过折射率较低的湍流时光子有一定几率会因为全反射的原因而不能出射,从而造成较高误码率甚至中断正常的密钥分发过程,其总体趋势也验证了对图 2 的分析.

## 2 湍流球泡模型下的诱骗态量子密钥分发性能

2003年 Hwang 将诱骗态思想用于自由空间量子密钥分发<sup>[20]</sup>, 本文采用高度衰减的弱相干态光源进行模拟, 设光源的弱相干态为

$$|\varphi\rangle = e^{-\frac{|\varphi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7)$$

则每脉冲的平均光子数  $\mu$  服从泊松分布

$$p(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad (8)$$

根据经典的诱骗态密钥率公式<sup>[21]</sup>可得

$$R \geq \frac{1}{2} \{-Q_\mu fH(E_\mu) + Q_1[1 - H(E_1)]\} \quad (9)$$

式中,  $E_1$  表示单光子接收引起的误码,  $E_\mu$  表示接受到光子态的总误码率.

多光子增益为

$$Q_\mu = \sum_n Y_n P(n, \mu) \quad (10)$$

由含  $n$  个光子的脉冲引起的误码率可以写为

$$E_n = \frac{\frac{1}{2}Y_b + e_d P(n, \mu)}{Y_n} \quad (11)$$

式中,  $Y_b$  表示背景光噪声增益,  $e_d$  是光子接收的误码率, 该误码包含偏振变化、时间抖动、强度涨落等几个方面的来源, 其中偏振误码是对系统性能影响最大的因素<sup>[22]</sup>. 大量空间量子通信的研究结果表明, 大气信道衰减为  $\alpha = 0.18$  dB/km, 信道传输率与入射光的偏振方向无关, 与传输距离的平方成反比<sup>[23]</sup>.

$$\eta_{\text{atm}} \sim -\frac{\alpha}{L^2} \quad (12)$$

系统总的误码率  $Q_\mu E_\mu$  等于

$$Q_\mu E_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n e_n \frac{\mu^n}{n!} \exp(-\mu) = e_0 Y_0 + e_d (1 - e^{-\mu \eta_{\text{atm}}}) \quad (13)$$

一般情况下 BB84 协议密钥分发过程最终成码率为  $1 - H_2(E_b) - H_2(E_p)$ , 其中  $H_2(E_b)$  为单光子比特误码得到的二元香农熵函数,  $H_2(E_p)$  则表示光子脉冲穿过湍流由于折射导致偏振误码的二元熵. 本文只考虑折射造成的偏振误码情况, 根据式(13)可以求出成码率和透射率比值  $k$  的关系, 当成码率低于 50% 认为接收端无法进行正确的基矢对比, 密钥分发的质量无法得到保证, 此时计算可得透射率比值的安全区间为  $0 < k \leq 0.53$ .

由式(6)得当入射角为  $0^\circ$ , 即  $k=1$  时, 该过程只涉及湍流引起的光子能量衰减, 而不存在由于折射导致的光子偏振态变化, 而一般情况下,  $0^\circ < \theta_1 < 90^\circ$ ,  $k \neq 1$ , 且两分量的透射率不相等, 所以折射前后会造成光子偏振态的改变, 这是一种非么正变换, 从而引起偏振基矢误码率的增加, 根据文献[17]的定义推导可得误码率的上限  $E_p^n$  与  $k$  的关系为

$$E_p^n \leq \frac{(1-k)^2}{2(1+k)} \approx 0.086 \quad (14)$$

进而联立式(6)~(7)可得在湍流外大气折射率保持不变的前提下, 入射角  $\theta_1$  和折射率  $n_2$  在一定程度上共同决定着误码率  $E_p$  的大小, 仿真三者关系得到如图 6.

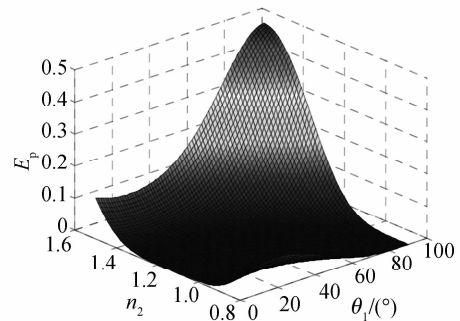


图 6 偏振误码率与折射率和入射角的关系  
Fig. 6 Relationship between QBER and refractive index and incident angle

由图 6 可得在入射角接近  $90^\circ$ , 湍流折射率为 1.5 时, 对于发射任意偏振态的单光子, 透射后其偏振态趋于  $|p\rangle$  或  $|s\rangle$  态, 所导致的误码率逐渐逼近 50%. 而除了理想入射情况(入射角等于  $0^\circ$ , 折射率为 1), 还能得出  $44.8^\circ < \theta_1 < 76.5^\circ, 1 < n_2 < 1.33$  这样既能避免全反射现象造成传输中断, 又可以满足空间量子密钥分发安全误码率条件的参量约束区间, 为开展湍流条件下的空间量子密钥分发实验提供了理论依据.

实际条件往往更为复杂, 大气信道变化莫测, 任何实验条件的变化都会严重影响误码率的大小. 其中入射角主要取决于地面发送端的俯仰角度  $\theta_{\text{send}}$ 、湍流球泡的半径大小  $r$  以及单光子信号入射球泡的位置等. 大气的折射率是多重气象因素共同决定的参量, 具有很强的时变性和随机性, 为此有学者专门针对大气折射率结构常数  $C_n^2$  开展了大量研究, 结果表明折射率  $n_2$  受大气风速和密度的影响较大. 为了直观形象地反映偏振误码率受人射角和折射率的影响, 在设置仿真实验条件时给出了  $n_2$  的一般统计范围. 入射角则选取了从  $0^\circ$  到  $90^\circ$  的所有可能值.

### 3 结论

研究了诱骗态空间量子密钥分发在大气湍流环境下的性能, 基于湍流球泡模型将偏振光子的传输过程简化为连续折射的偏振态变化问题, 分析了不同折射率条件下偏振光透射率以及误码率随入射角度变化的趋势, 根据成码率与透射率的关系推导了满足空间量子密钥分发需求的误码率上限, 并通过计算误码率与入射角度和湍流折射率的关系, 给出了适合于湍流条件下空间量子密钥分发的入射角和折射率的参量范围, 结果表明湍流会改变偏振光子的传输状态从而在一定程度上引起偏振误码继而影响空间量子密钥分发的性能, 通过选取合适的入射角度等参量可以确保应对不同折射率的湍流都能使误码率满足正常密钥分发的上限约束.

#### 参考文献

- [1] BONATO C, TOMAELLO A, DEPPO VD, *et al.* Feasibility of satellite quantum key distribution[J]. *New Journal of Physics*, 2009, **11**(4): 045017.
- [2] URSIN R, ZEILINGER A. 143 km free-space quantum teleportation[C]. SPIE, The International Society for Optical Engineering, 2014, **9225**: 92250H.
- [3] VILLORESI P, JENNEWAIN T, TAMBURINI F, *et al.* Experimental verification of the feasibility of a quantum channel between space and earth[J]. *New Journal of Physics*, 2008, **10**(3): 3436-3440.
- [4] JIN X M, REN J G, YANG B, *et al.* Experimental free-space quantum teleportation[J]. *Nature Photonics*, 2010, **4**(6): 376-381.
- [5] NAUERTH S, MOLL F, RAU M, *et al.* Air-to-ground quantum communication[J]. *Nature Photonics*, 2013, **7**(5): 382-386.
- [6] CAPRARO I, TOMAELLO, DALLARCHE A, *et al.* Turbulent single-photon propagation in the canary optical link [J]. *No Shinkei Geka Neurological Surgery*, 2014, **1633**(1): 128-130.
- [7] NIE Min, REN Jia-min, YANG Guang, *et al.* Influences of nonspherical aerosol particles and relative humidity of atmosphere on the performance of free space quantum communication[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, **65**(19): 190301. 聂敏, 任家明, 杨光, 等. 非球形气溶胶粒子及大气相对湿度对自由空间量子通信性能的影响[J]. *物理学报*, 2016, **65**(19): 190301.
- [8] NIE Min, SHANG Peng-gang, YANG Guang, *et al.* Influences of mesoscale sandstorm on the quantum satellite communication channel and performance simulation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(24): 240303. 聂敏, 尚鹏钢, 杨光, 等. 中尺度沙尘暴对量子卫星通信信道的影响及性能仿真[J]. *物理学报*, 2014, **63**(24): 240303.
- [9] NIE Min, REN Jia-min, YANG Guang, *et al.* Influences of PM2.5 atmospheric pollution on the performance of free space quantum communication[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, **64**(15): 150301. 聂敏, 任家明, 杨光, 等. PM2.5 大气污染对自由空间量子通信性能的影响[J]. *物理学报*, 2015, **64**(15): 150301.
- [10] NIE Min, WANG Yong, YANG Guang, *et al.* Optimal mean photon number of decoy state protocol based on chameleon self-adaptive strategy under the background of rainfall[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, **65**(2): 020302. 聂敏, 王允, 杨光, 等. 降雨背景下诱骗态协议最优平均光子数的变色龙自适应策略[J]. *物理学报*, 2016, **65**(2): 020302.
- [11] NIE Min, GAO Kun, YANG Guang, *et al.* Effect of the atmospheric turbulence on the performance of free space quantum communication[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(7): 0701001. 聂敏, 高锴, 杨光, 等. 近地面大气湍流对自由空间量子通信性能的影响[J]. *光子学报*, 2016, **45**(7): 0701001.
- [12] LIU C Q, ZHU C H, WANG L H, *et al.* Polarization-Encoding-Based Measurement-Device-Independent quantum key distribution with a single untrusted source[J]. *Chinese Physics Letters*, 2016, **33**(10): 100301.

- [13] YU Chong-yuan, LI Ming, LU Peng-fei, *et al.* Photon polarizations in free-space quantum communication[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2013, **36**(2): 1-9.  
俞重远,李明,芦鹏飞,等. 自由空间量子通信的光子偏振[J]. 北京邮电大学学报,2013,**36**(2):1-9.
- [14] SCHMITT M T, WEIER H, FURST M, *et al.* Experimental demonstration of free-space decoy-state quantum key distribution over 144 km[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **98**(1): 010504.
- [15] LYLOVA A, KUDRYASHOV A, SHELDAKOVA J, *et al.* A new method of the real-time atmospheric turbulence modeling[C]. *Laser Optics, 2016 International Conference. IEEE*, 2016, R: 4-12.
- [16] YUKSEL D, YUKSEL H. Geometrical Monte Carlo simulation of atmospheric turbulence [C]. SPIE, Optical Engineering Applications. International Society for Optics and Photonics, 2013, **88740U**: 1-6.
- [17] ZHOU Fei, YONG Hai-lin, LI Dong-dong, *et al.* Study on quantum key distribution between different media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(14): 140303.  
周飞,雍海林,李东东,等. 基于不同介质间的量子密钥分发的研究[J]. 物理学报,2014,**63**(14): 140303.
- [18] CHARNOTSKII M. Extended Huygens-Fresnel principle and optical waves propagation in turbulence: discussion[J]. *Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision*, 2015, **32**(7): 1357-1365.
- [19] CHEN Chun-yi, YANG Hua-min, FENG Xin, *et al.* Monte Carlo simulation of beam wander in atmospheric turbulence based on spherical-bubble model[J]. *Journal of Changchun University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2008, **31**(3): 16-19.  
陈纯毅,杨华民,冯欣,等. 基于球泡模型的大气湍流光束漂移 Monte-Carlo 模拟[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2008, **31**(3): 16-19.
- [20] HWANG W Y. Quantum key distribution with high loss: toward global secure communication[J]. *Physical Review Letters*, 2003, **91**(5): 057901.
- [21] GOTTESMAN D, LO H K, LUTKENHAUS N, *et al.* Security of quantum key distribution with imperfect devices[C]. *Information Theory, ISIT 2004. Proceedings International Symposium on. IEEE*, 2004: 136.
- [22] XU F, CURTY M, QI B, *et al.* Practical aspects of measurement-device-independent quantum key distribution[J]. *New Journal of Physics*, 2013, **15**(21): 3813-3818.
- [23] COLES P J, METODIEV E M, LUTKENHAUS N. Numerical approach for unstructured quantum key distribution [J]. *Nature Communications*, 2016, **7**: 11712.