

doi:10.3788/gzxb20174603.0314004

用傅里叶分析法研究艾里光束远场传播特性

吴云龙, 聂劲松, 邵立, 孙晓泉

(电子工程学院 脉冲功率激光技术国家重点实验室, 合肥 230037)

摘 要:为了从理论上深入分析新型无衍射光束艾里光束在有限能量条件下的远场传播特性,首先,从决定光波在自由空间传播的一维旁轴波动方程入手,采用傅里叶分析法,结合艾里函数的特殊性质,并利用经过指数衰减的有限能量初始条件,完整给出了有限能量条件下用于精确描述一维艾里光束在自由空间传播特性的波动方程解析解.然后,利用所得解析解分别对一维和二维艾里光束在自由空间的传播特性进行了研究,重点分析了不同参量条件对艾里光束进行无衍射传播和横向自加速的影响.研究表明:当任意横向尺度为 $100\ \mu\text{m}$,衰减系数为 0.03、0.05、0.07、0.1、0.2 时,二维艾里光束无衍射传播距离分别为 1 014、624、455、338、193 mm;当横向尺度保持不变时,衰减系数越小,艾里光束保持无衍射传播的距离越大;当衰减系数保持不变时,横向尺度越小,艾里光束横向自加速越大.所采用的研究方法也可用于研究艾里光束在介质中的传播特性.

关键词:艾里光束;传播特性;傅里叶分析;旁轴波动方程;解析解

中图分类号:TN24

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2017)03-0314004-12

Propagation Characteristics of Airy Beams in the Far-field with Fourier Analysis

WU Yun-long, NIE Jin-song, SHAO Li, SUN Xiao-quan

(State Key Laboratory of Pulsed Power Laser Technology, Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

Abstract: In order to analyze the far-field propagation characteristics of the new non-diffractive Airy beams deeply in theory on the condition of finite energy, firstly, the one-dimensional paraxial wave equation which decides the propagation characteristics of light waves in free space was analyzed by taking advantage of the Fourier analysis method. Moreover, the special characteristics of Airy function and the initial condition of finite energy with exponential decay were also taken into consideration. As a result, the analytical solution of the wave equation can describe the propagation characteristics of one-dimensional Airy beams accurately in free space under the condition of finite energy. Then, the propagation characteristics of one-dimensional and two-dimensional Airy beams were studied by utilizing the acquired analytical solution. What's more, the influence of various parameters on non-diffractive propagation and transverse acceleration characteristics of Airy beams were studied in detail. Study results indicate the non-diffractive propagation distances of two-dimensional Airy beams are 1014, 624, 455, 338, 193 mm separately when the arbitrary transverse scale is $100\ \mu\text{m}$ and the decay factors are 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.2, separately. The non-diffractive propagation distances will become longer if the decay factor becomes smaller when the arbitrary transverse scale keeps invariant. Moreover, the transverse acceleration of Airy beams will become larger with the decrease of arbitrary transverse scale when the decay factor keeps invariant. The adopted study method is also fit for analysis of Airy beams' propagation characteristics in the media with refractive index.

基金项目:脉冲功率激光技术国家重点实验室基金(No. 2015J1003)资助

第一作者:吴云龙(1988-),男,博士研究生,主要研究方向为激光技术. Email:jackwu1225@126.com

导师(通讯作者):聂劲松(1970-),男,研究员,博士,主要研究方向为激光技术. Email:njs7001@sina.com

收稿日期:2016-08-29;录用日期:2016-12-09

<http://www.photon.ac.cn>

Key words: Airy beams; Propagation characteristics; Fourier analysis; Paraxial wave equation; Analytical solution

OCIS Codes: 140.3295; 140.3430; 070.0070; 070.2580; 350.5500

0 引言

1979年, Berry和Balazs在量子力学领域证明了用于描述粒子在自由空间传播的一维旁轴波动方程存在一个遵循艾里函数的波包解, 该波包解具有无衍射、自加速等新奇的特性. 然而, 这一研究成果并没有得到广大学者的足够重视, 因为理想的艾里波包解携带无限大的能量, 这在实际中显然是无法被实现的^[1]. 直到2007年, 中佛罗里达大学的Siviloglou等在前人工作的基础上进一步研究发现经过指数“截趾”的艾里函数也是波动方程的特解^[2], 从理论上解决了理想艾里波包携带无限能量的问题. 同一年, 该研究团队利用液晶空间光调制器在实验室条件下首次产生了具有无衍射、横向自加速、自愈和等奇异特性的艾里光束^[3]. 自此, 对于新型无衍射光束艾里光束的研究成为一个热点问题. 目前, 研究人员的关注点主要集中在艾里光束的产生^[4-8], 如2013年, Voloch等用电子波函数代替高斯光束产生电子艾里光束; 特殊型艾里光束^[9-13], 如2016年, Chen等研究了圆环涡旋艾里-高斯光束在非线性介质中的传输特性; 光束的控制^[14-16], 如2013年, Wang等利用复合相位膜片实现艾里光束的轨迹控制和二维空间扫描; 以及该特殊光束的潜在应用前景, 如微粒的定向操控^[17]、光子弹的产生^[18-19]等.

可以看出, 这些研究工作主要集中在利用已知结论对艾里光束的特性及其潜在应用前景进行研究. 如果想对艾里光束的远场传播特性进行深入的研究, 从初始条件出发会是一条直接、方便的途径, 这也是其他文献很少涉及的. 因此, 本文从原始的一维旁轴波动方程入手, 采用经典的傅里叶分析方法, 结合艾里函数的特殊性质, 得到在含有指数“截趾”条件下遵循艾里函数的电场包络. 该电场包络决定了艾里光束在自由空间的传播特性. 然后, 利用所得电场包络重点对一维和二维艾里光束的无衍射特性和横向自加速特性进行研究. 所采用的分析方法同样适用于研究艾里光束在介质中的传播特性.

1 采用傅里叶分析法的理论研究

一维艾里函数在旁轴条件下的自由传输满足

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0 \quad (1)$$

式中, φ 表示艾里光束的电场包络, $s = x/x_0$ 表示无量纲的横坐标, x_0 表示任意横向尺度, $\xi = z/kx_0^2$ 表示归一化传播距离, $k = 2\pi n/\lambda_0$ 代表波数, λ_0 表示中心波长.

在初始条件下, φ 电场包络满足

$$\varphi(\xi=0, s) = \text{Ai}(s) \quad (2)$$

由于理想艾里光束携带无穷能量, 所以需要给初始条件加一个衰减项, 比较通用有效的做法是加一个指数衰减项, 研究结果表明加了指数衰减项的初始条件仍然满足式(1), 经过指数衰减的初始条件可以表示为^[2-3]

$$\varphi(\xi=0, s) = \text{Ai}(s) \exp(as) \quad (3)$$

式中, a 表示衰减系数, $0 < a < 1$, $\text{Ai}(\cdot)$ 代表艾里函数, 即

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt \quad (4)$$

艾里函数的另一种表示形式为

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\frac{1}{3}t^3 + xt)} dt \quad (5)$$

对式(1)进行傅里叶变换, 可得

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k_s^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

进一步, 可以得到

$$\frac{\partial \Phi(k_s, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2i} k_s^2 \Phi(k_s, \xi) \quad (7)$$

式(7)的解可以表示为

$$\Phi(k_s, \xi) = \Phi(k_s, 0) \exp\left(\frac{1}{2i} k_s^2 \xi\right) \quad (8)$$

对艾里函数式(5)的性质进行进一步研究,首先研究积分式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(\frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt\right)\right] dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\left[\frac{1}{3}(t+a)^3 + (b-a^2)(t+a) + \frac{2}{3}a^3 - ab\right]\right\} d(t+a) = \\ &= 2\pi e^{i(\frac{2}{3}a^3 - ab)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\left[\frac{1}{3}t^3 + (b-a^2)t\right]\right\} dt \end{aligned} \quad (9)$$

由式(5)和式(9)可以进一步得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(\frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt\right)\right] dt = 2\pi e^{i(\frac{2}{3}a^3 - ab)} \text{Ai}(b - a^2) \quad (10)$$

对初始条件式(3)进行傅里叶变换,可得

$$\begin{aligned} \Phi(k_s, 0) &= F(\varphi(\xi = 0, s)) = F(\text{Ai}(s) \exp(as)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ai}(s) \exp(as) \exp(-ik_s s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ai}(s) \exp((a - ik_s)s) ds \end{aligned} \quad (11)$$

根据艾里函数的积分性质^[20],可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ai}(t) \exp(kt) dt = \exp(k^3/3) \quad (12)$$

联立式(11)和(12)可得

$$\Phi(k_s, 0) = \exp((a - ik_s)^3/3) = \exp(-ak_s^2) \exp\left(\frac{i}{3}(k_s^3 - 3a^2 k_s - ia^3)\right) \quad (13)$$

联立式(8)和(13),可得

$$\begin{aligned} \Phi(k_s, \xi) &= \exp(-ak_s^2) \exp\left(\frac{i}{3}(k_s^3 - 3a^2 k_s - ia^3)\right) \exp\left(\frac{1}{2i} k_s^2 \xi\right) = \\ &= \exp\left(i\frac{1}{3} k_s^3 ia^2 k_s - i\frac{1}{3} a^3 - ak_s^2 - \frac{i}{2} k_s^2 \xi\right) \end{aligned} \quad (14)$$

对式(14)进行反傅里叶变换可得

$$\varphi(\xi, s) = F^{-1}(\Phi(\xi, s)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{1}{3} k_s^3 - ia^2 k_s - i\frac{1}{3} a^3 - ak_s^2 - \frac{i}{2} k_s^2 \xi + isk_s\right) dk_s \quad (15)$$

对式(15)进行化简可得

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\left[\frac{1}{3} k_s^3 + k_s^2\left(ia - \frac{1}{2}\xi\right) + k_s(s - a^2) + \frac{1}{3}a^3\right]\right\} dk_s = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{a^3/3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\left[\frac{1}{3} k_s^3 + k_s^2\left(ia - \frac{1}{2}\xi\right) + k_s(s - a^2)\right]\right\} dk_s \end{aligned} \quad (16)$$

联立式(10)和(16),可得

$$\varphi(\xi, s) = \frac{1}{2\pi} e^{a^3/3} \cdot 2\pi e^{i\left(ia - \frac{1}{2}\xi\right)\left[\frac{2}{3}\left(ia - \frac{1}{2}\xi\right)^3 - (s - a^2)\right]} \text{Ai}\left((s - a^2) - \left(ia - \frac{1}{2}\xi\right)^2\right) \quad (17)$$

进一步化简可得

$$\varphi(\xi, s) = \text{Ai}\left(ia\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + s\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}ia^2\xi - \frac{1}{2}a\xi^2 - \frac{1}{12}i\xi^3 + \frac{1}{2}is\xi + as\right) \quad (18)$$

式(18)所表示的是一维艾里光束的电场包络,该公式最早由文献[3]给出,但文献[3]得到该公式采取了对式(1)直接积分的方法且没有给出推导过程,不便于读者理解.而本文采取了经典傅里叶分析法并利用艾里函数的特殊性质得到了有限能量条件下一维艾里光束的电场包络,该方法更加简单易懂.进一步,可以得到二维艾里光束的电场包络,表示为

$$\varphi(x, y, z) = \prod_{k=x, y} \varphi_k(\xi_k, s_k) \quad (19)$$

以上讨论的是艾里光束在自由空间的传播情况,如果希望研究在介质中,例如非线性介质中的传播情况,只需将式(1)变换为

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \delta_n \varphi = 0 \quad (20)$$

式中, δ_n 表示非线性介质的折射率变化,其余可完全参照以上研究思路得到相应电场包络.

2 数值仿真和结果分析

2.1 艾里光束的无衍射特性研究

根据式(18)和(19),首先可以分别得到当 $\omega_0 = 100 \mu\text{m}$, $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$ 时一维艾里光束在无限能量(理想情况)条件下和有限能量条件下的远场传播情况,如图1.

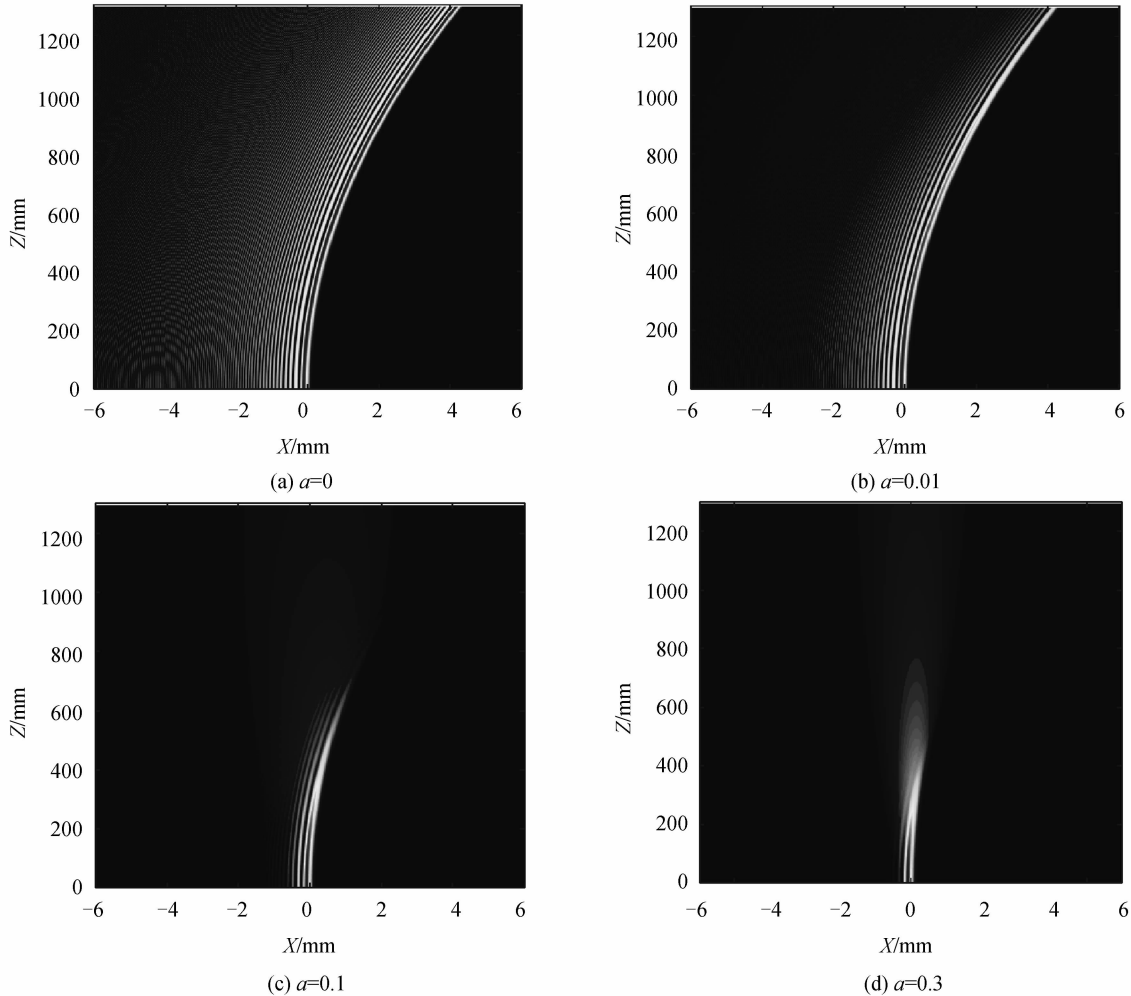


图1 一维艾里光束远场传播情况

Fig. 1 Far field propagation property of 1D Airy beams

由图1可以看出,在理想情况下,一维艾里光束在传播过程中随着传播距离的增加,其主瓣和旁瓣宽度保持不变,即始终保持无衍射状态.当受到“截趾”后,在一定传播距离范围内,其依旧可以保持近似无衍射的状态.如果超过该距离,艾里光束不再维持原有状态,而是退化为其他光束.同时,其保持无衍射状态的传播距离会随着衰减系数的增大而减小.将一维艾里光束拓展到二维,为了方便研究二维艾里光束的无衍射特性,需要先对其主瓣宽度进行定义.借鉴高斯光束光斑直径的定义,可以将二维艾里光束的主瓣宽度定义为由光强最大值下降为最大值 $1/e^2$ (e 为自然常量) 所对应的光斑直径,具体可以表示为

$$d = x_2 - x_1 \quad x_2 \geq x_1 \quad (21)$$

其中横坐标 x_2 和 x_1 对应的光强为

$$I_2 = I_1 = I_{\max}/e^2 \quad (22)$$

在不同衰减系数条件下,当 $a=0.01$ 时,相应的二维艾里光束的远场传播情况及其归一化强度分布如图2.

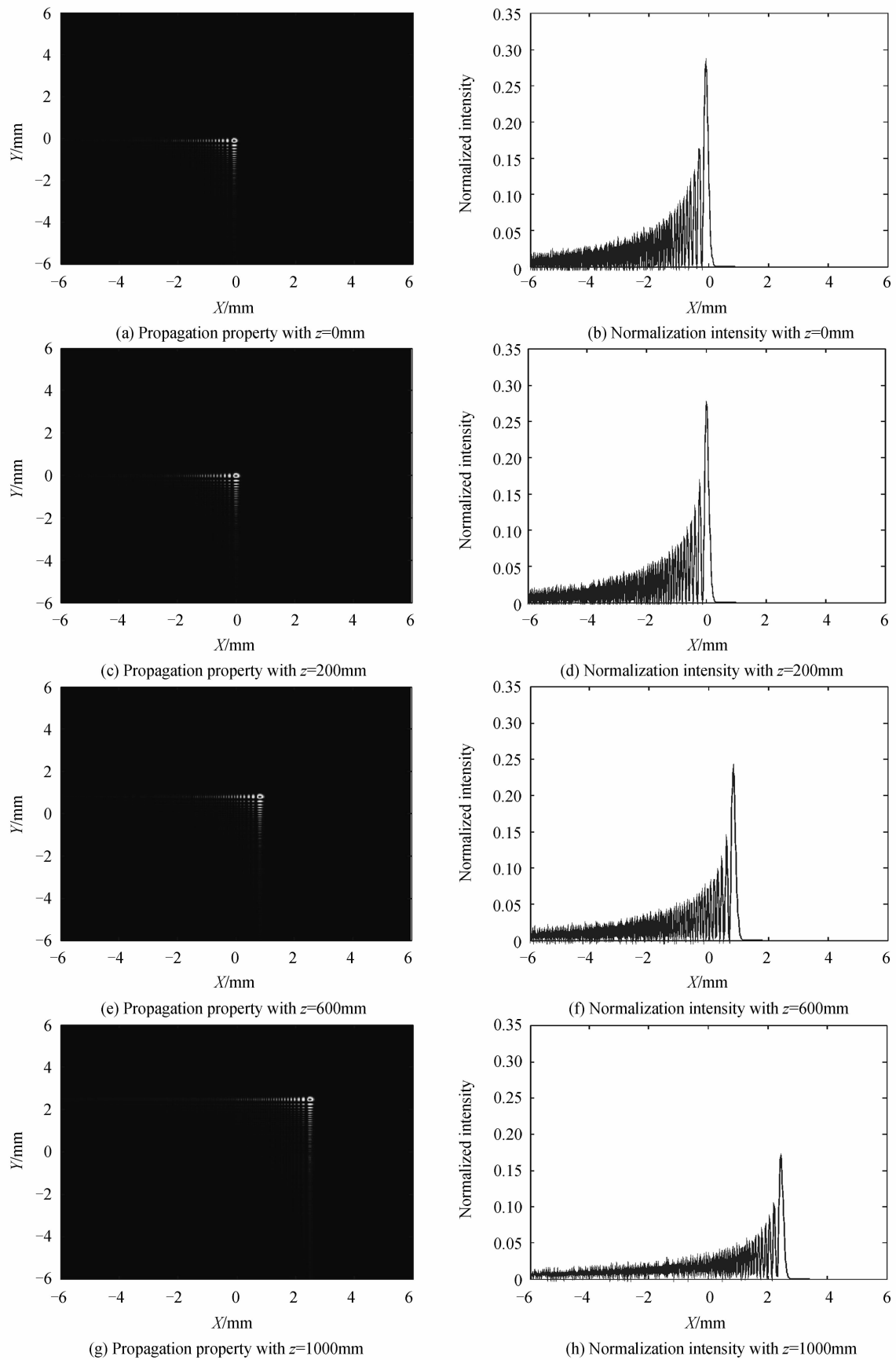


图2 $a=0.01$ 时二维艾里光束传播特性及归一化强度分布

Fig. 2 Propagation property of 2D Airy beams and its normalization intensity distribution graph when $a=0.01$

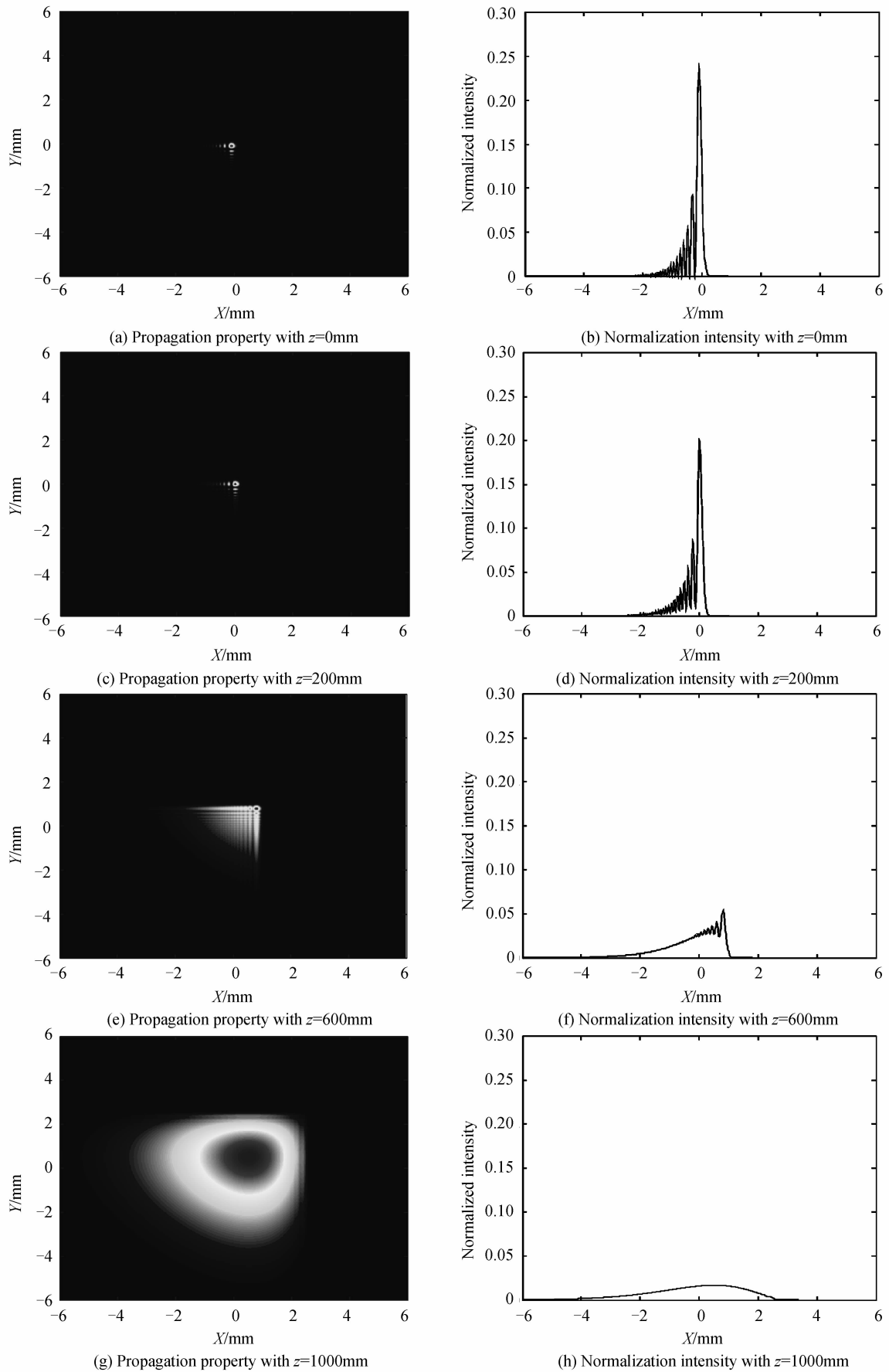


图3 $a=0.1$ 时二维艾里光束传播特性及归一化强度分布图

Fig.3 Propagation property of 2D Airy beams and its normalization intensity distribution graph when $a=0.1$

图 2 中,(a)、(c)、(e)、(g)分别表示当 $a=0.01$ 时,二维艾里光束在传播 0、200、600、1 000 mm 后 X-Y 平面的光斑分布图,(b)、(d)、(f)、(h)表示对应的归一化强度分布图.可以看出,二维艾里光束在传输了 1 000 mm 之后,主瓣及旁瓣宽度并没有发生明显变化,无衍射特性保持较好.在传播相同距离后,当 $a=0.1$ 时,二维艾里光束远场传播情况及其归一化强度分布如图 3.

通过对比二维艾里光束在不同衰减系数条件下传播相同距离的仿真结果可以看出,衰减系数的存在会有效地“截趾”艾里光束主瓣和旁瓣的能量,尤其是对旁瓣的“截趾”作用更加明显.衰减系数越大,“截趾”作用越显著.在传播一定的距离后,艾里光束将无法保持初始形貌特征,并不再以无衍射状态传播,而是退化为高斯光束.进一步,可以得到在不同衰减系数条件下,二维艾里光束主瓣宽度随传播距离的演化情况,如图 4.

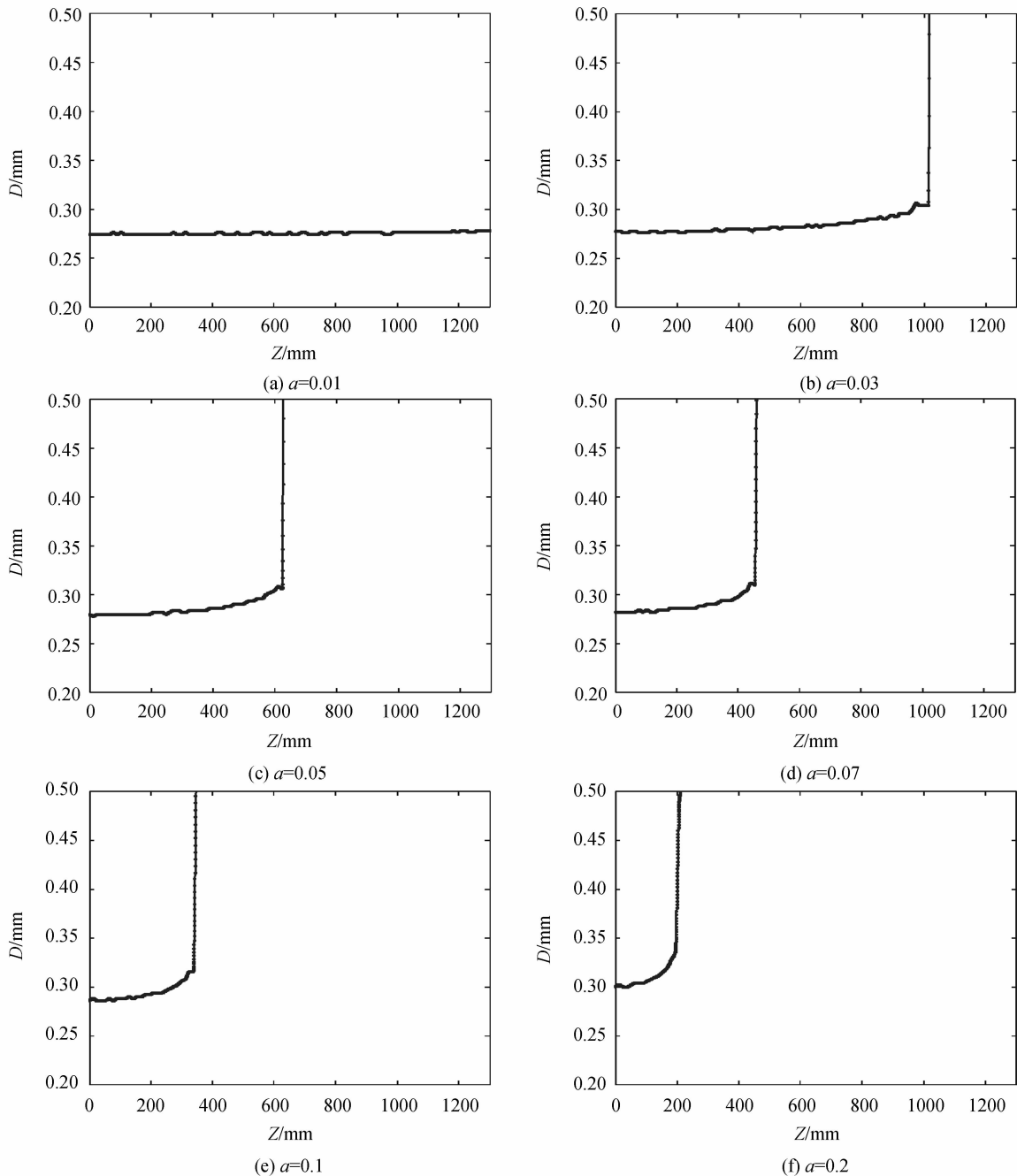


图 4 不同衰减系数条件下二维艾里光束主瓣宽度演化

Fig. 4 Main lobe width's evolution graph of 2D Airy beams with different decay factors

由图 4 可以看出,当 $a=0.01$,二维艾里光束在 1 300 mm 的范围内近似为无衍射传播.当 $a=0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.2$ 时,二维艾里光束保持近似无衍射传播的距离 z 如表 1 所示.

表 1 不同衰减系数条件下无衍射传播距离

Table 1 Non-diffractive propagation distances with different decay factors

a	0.03	0.05	0.07	0.1	0.2
z/mm	1014	624	455	338	193

在该距离之外,艾里光束的主瓣宽度将急剧增加,直至最后演化为高斯光束.因此,在横向尺度相同情况下,衰减系数越大,艾里光束保持近似无衍射传播的距离越短.当衰减系数保持不变时,例如 $a=0.05$,在不同横向尺度条件 ω_0 下,二维艾里光束主瓣宽度演化情况如图 5.

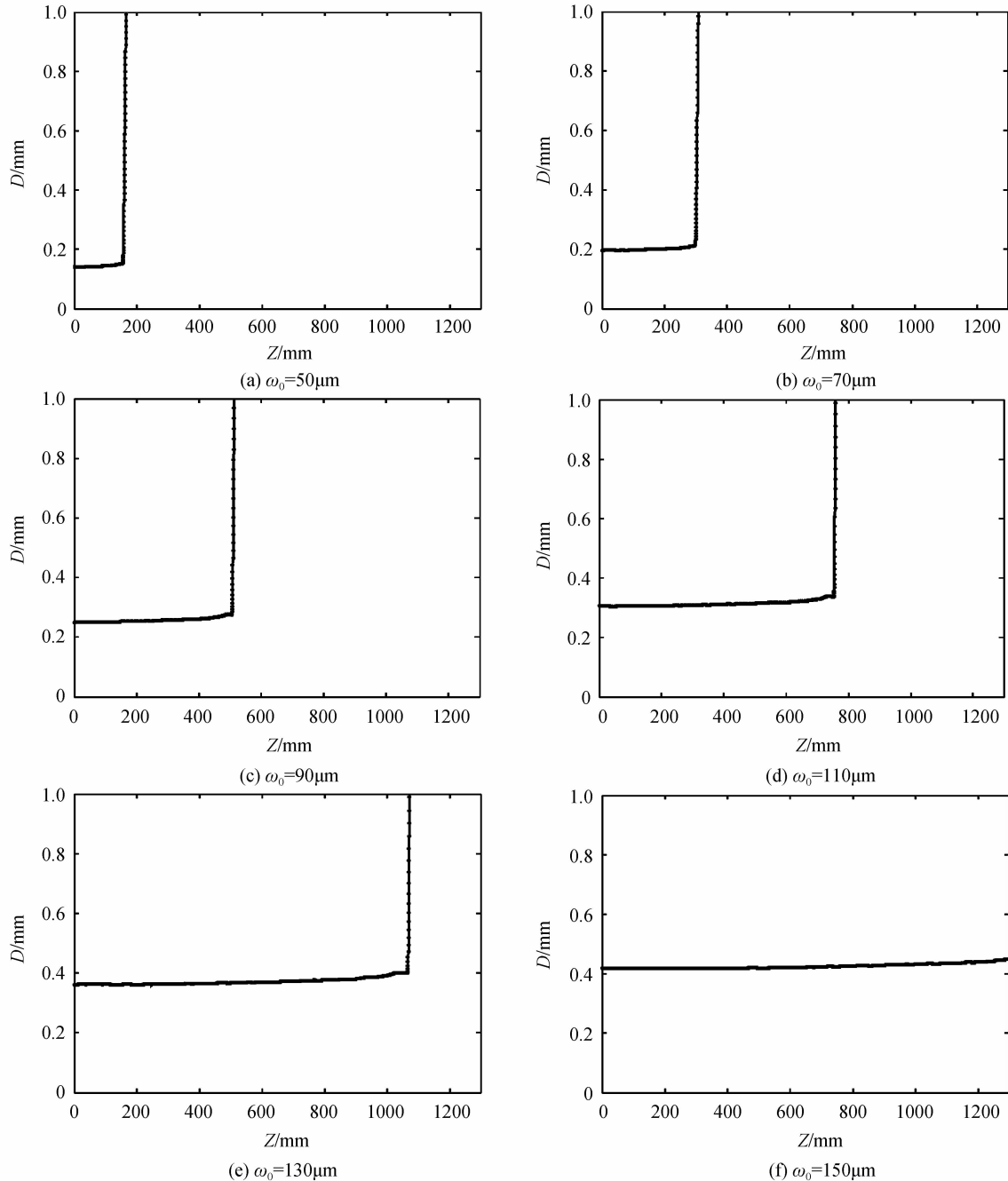


图 5 不同横向尺度条件下二维艾里光束主瓣宽度演化

Fig. 5 Main lobe width's evolution graph of 2D Airy beams with different arbitrary transverse scale

由图 5 可知,当衰减系数 $a=0.05$,横向尺度 $\omega_0=50,70,90,110,130 \mu\text{m}$ 时,二维艾里光束无衍射传播距离 z 如表 2 所示.

当 $\omega_0=150 \mu\text{m}$ 时,艾里光束在 1 300 mm 的传播范围内近似为无衍射传播.因此,可以推断横向尺度越大,艾里光束保持近似无衍射传播的距离越远.同时,还可以看出,横向尺度对艾里光束初始主瓣大小也有影

响,与横向尺度大小对应的主瓣宽度 D 分别为 0.157、0.217、0.281、0.343、0.406、0.425 mm,这说明横向尺度越大,光束的初始主瓣越大.

表 2 不同横向尺度条件下无衍射传播距离

Table 2 Non-diffractive propagation distances with different arbitrary transverse scale

$\omega_0/\mu\text{m}$	50	70	90	110	130
z/mm	156	299	507	754	1 066

2.2 艾里光束的自加速特性研究

由图 1~3 可以看出,艾里光束在传播过程中存在明显的横向自加速现象.同时,由式(18)可知,艾里光

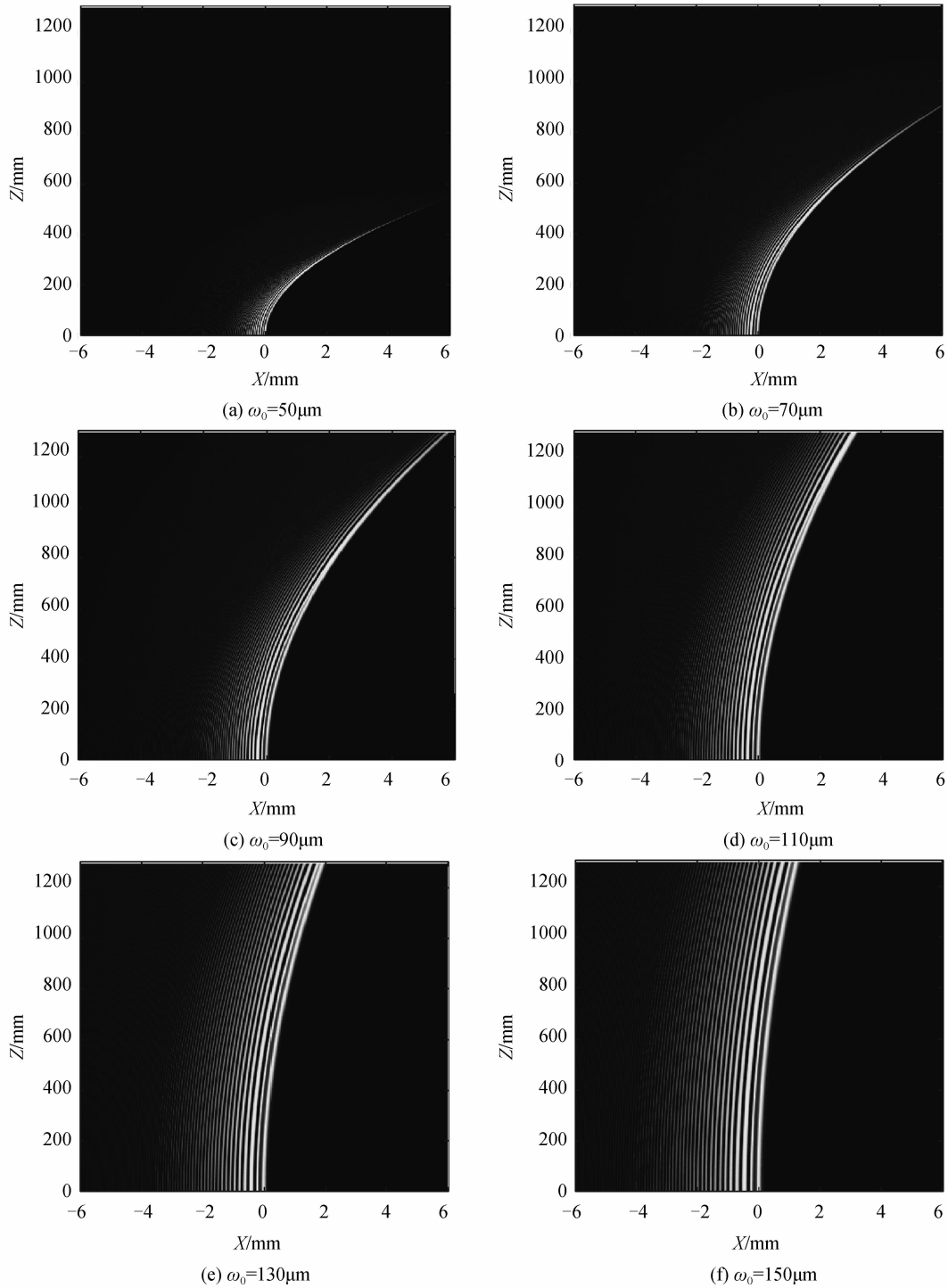
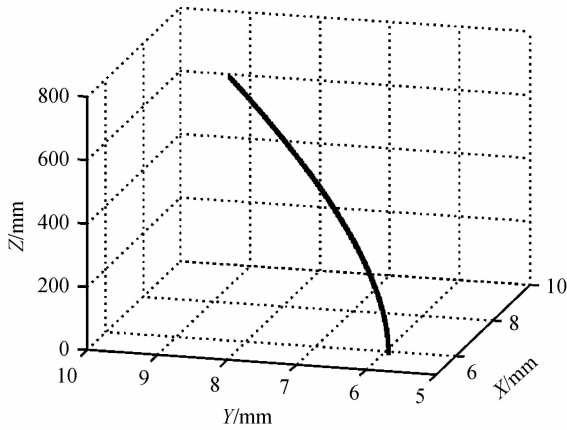


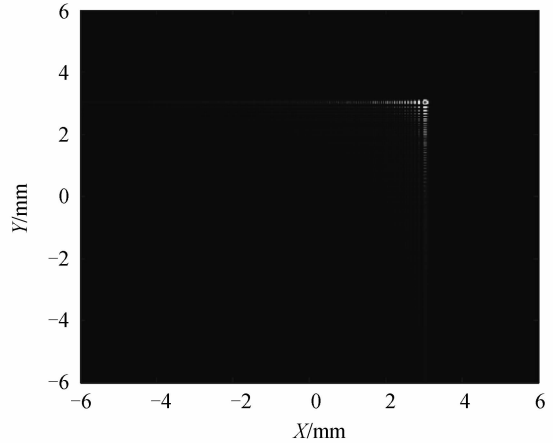
图 6 一维艾里光束传播演化
Fig. 6 Evolution graph of 1D Airy beams

束的横向自加速由 $s - \xi^2/4$ 决定, 其加速度大小为 $dx/dz = \lambda_0^2 z^2 / (16\pi^2 \omega_0^2)$. 因此, 艾里光束的横向自加速大小由中心波长 λ_0 , 传播距离 Z 以及横向尺度 ω_0 决定, 而与衰减系数大小无关. 当入射波长一定时, 艾里光束的横向加速度大小仅与传播距离和横向尺度有关, 传播距离越远、横向尺度越小, 横向加速度越大. 当衰减系数保持不变时, 例如 $a=0.01$, 在不同横向尺度条件 ω_0 下, 一维艾里光束横向自加速情况如图 6.

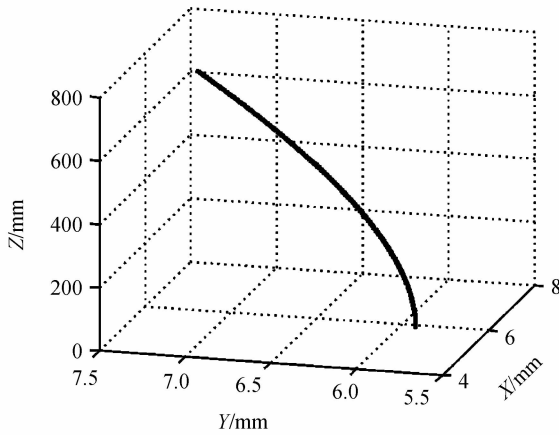
由图 6 可以看到, 当衰减系数和横向尺度固定时, 一维艾里光束随着传播距离的增加其“弯曲”程度不断增大, 也就是横向加速度越来越大. 当仅衰减系数固定时, 横向尺度越小, 在传播相同距离后, 横向移动距离越大, 说明横向加速度越大. 这一现象与理论相符. 进一步, 可以得到在横向尺度 ω_0 分别为 70、90、110、130 μm 时, 二维艾里光束光强中心随传播距离的关系曲线, 如图 7(a)、(c)、(e)、(g). 需要指出的是这里的光强中心指的是光束主瓣的中心. 计算可知, 在传播相同距离 648.7 mm 后, 当 $\omega_0 = 70, 90, 110, 130 \mu\text{m}$ 时,



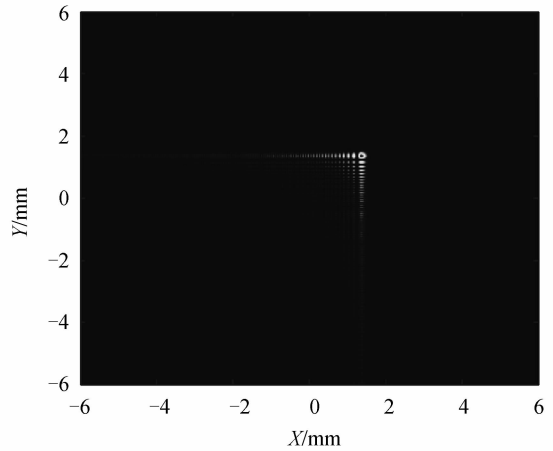
(a) Light intensity shift with $\omega_0=70\mu\text{m}$



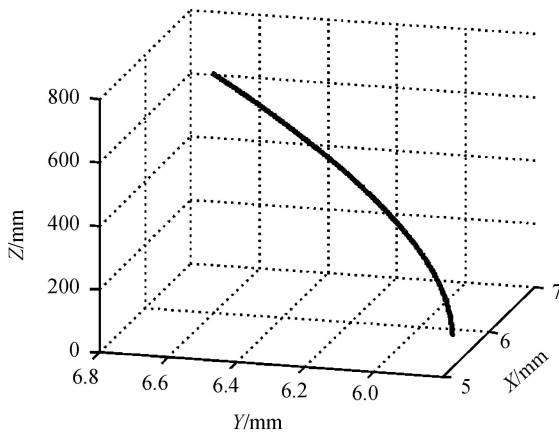
(b) Optical field distribution with $\omega_0=70\mu\text{m}$



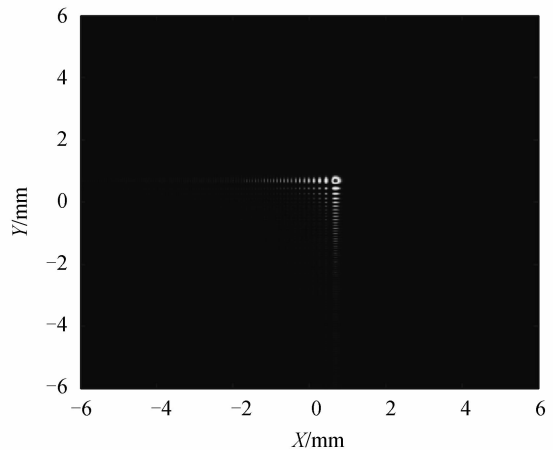
(c) Light intensity shift with $\omega_0=90\mu\text{m}$



(d) Optical field distribution with $\omega_0=90\mu\text{m}$



(e) Light intensity shift with $\omega_0=110\mu\text{m}$



(f) Optical field distribution with $\omega_0=110\mu\text{m}$

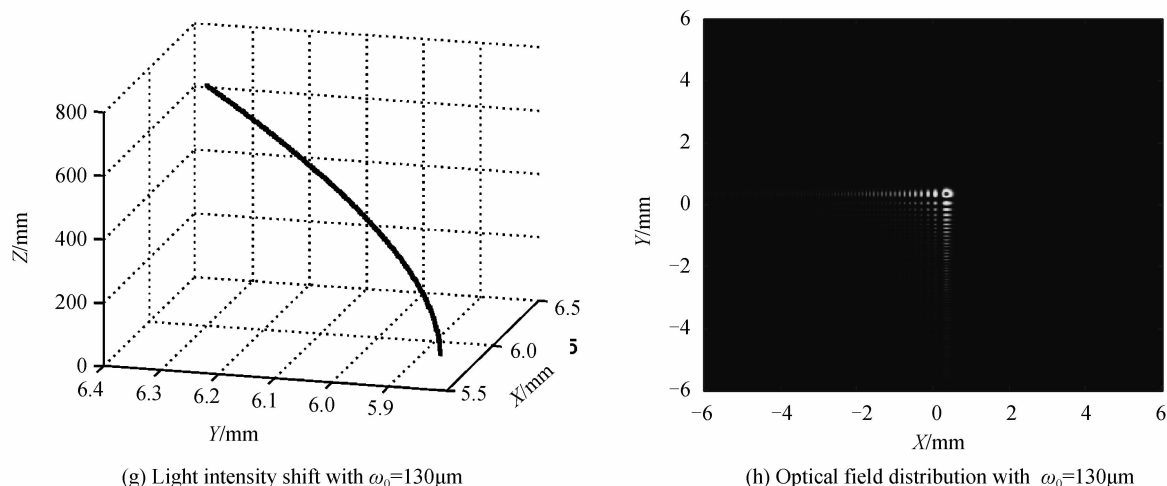


图7 二维艾里光强中心变化曲线及光场截面

Fig. 7 Light intensity shift graphs and optical field distribution graphs of 2D Airy beams

二维艾里光束的横向移动距离分别为 4.41、2.07、1.14、0.69 mm,此时,二维艾里光束在该传播距离下的横向光场截面如图 7(b)、(d)、(f)、(h). 计算结果再次表明,横向尺度越小,二维艾里光束在传播相同距离后横向移动距离越大,也就是横向加速度越大,这与理论也是相符合的。

3 结论

本文从决定艾里光束在自由空间传播特性的一维旁轴波动方程入手,采用经典的傅里叶分析方法,并结合艾里函数的特殊性质,得到了有限能量条件下一维旁轴波动方程满足艾里函数分布的精确解析解. 利用所得解析解分别对一维和二维艾里光束的远场传播特性进行了研究,重点研究了艾里光束的无衍射特性和横向自加速性质. 数值仿真结果表明,当横向尺度固定,如 $\omega_0=100\ \mu\text{m}$, $a=0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.2$ 时,二维艾里光束保持近似无衍射传播的距离分别为 1014、624、455、338、193 mm. 当衰减系数固定,如 $a=0.05$, 横向尺度 $\omega_0=50, 70, 90, 110, 130\ \mu\text{m}$ 时,二维艾里光束无衍射传播距离分别为 156、299、507、754、1 066 mm. 同时,艾里光束的横向自加速大小与衰减系数无关,波长一定,传播相同距离 648.7mm 后,当 $\omega_0=70, 90, 110, 130\ \mu\text{m}$ 时,二维艾里光束的横向移动距离分别为 4.41、2.07、1.14、0.69 mm. 本文所采用的方法可以进一步研究艾里光束在介质中的传播特性。

参考文献

- [1] BERRY M V, BALAZS N L. Nonspreading wave packets[J]. *America Journal of Physics*, 1979, **47**(3): 264-267.
- [2] SIVILOGLOU G A, CHRISTODOULIDES D N. Accelerating finite energy Airy beams[J]. *Optics Letters*, 2007, **32**(8): 979-981.
- [3] SIVILOGLOU G A, BROKY J, DOGARIU A, et al. Observation of accelerating Airy beams[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **99**(21): 213901.
- [4] WANG Xiao-zhang. Research on generation of Airy beams and propagation controlled by using spatial light modulator [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013.
王晓章. 基于相位空间光调制器的艾里光束产生和传输控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- [5] CHENG Zhen, ZHAO Shang-hong, CHU Xing-chun, et al. Research progress of the generation methods of Airy beam [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, **52**(3): 03008.
程振, 赵尚弘, 楚兴春, 等. 艾里光束产生方法的研究进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, **52**(3): 03008.
- [6] NOA V B, YOSSI L, YIGAL L, et al. Generation of electron Airy beams[J]. *Nature*, 2013, **494**(7437): 331-335.
- [7] KHILO N A, BELYI V N, KAZAK N S, et al. Acoustooptic refraction- influenced generation of tunable incomplete Airy beams[J]. *Journal of Optics*, 2014, **16**(8): 085702.
- [8] RING J D, HOWLS C J, DENNIS M R. Incomplete Airy beams: finite energy from a sharp spectral cutoff[J]. *Optics Letters*, 2013, **38**(10): 1639-1641.
- [9] PENG Y L, PENG X, CHEN B, et al. Interaction of Airy - Gaussian beams in Kerr media [J]. *Optics Communications*, 2016, **359**: 116-122.
- [10] CHEN P, CHEN Z D, PENG X, et al. Evolution of the ring Airy-Gaussian beams with a spiral phase in the Kerr

- medium[J]. *Journal of Optics*, 2016, **18**(5): 055504.
- [11] QIAN Y X, ZHANG S. Quasi-Airy beams along tunable propagation trajectories and directions[J]. *Optics Express*, 2016, **24**(9): 9489-9500.
- [12] PANAGIOTOPOULOS P, COUAIROU A, KOLESIK M, *et al.* Nonlinear plasma-assisted collapse of ring-Airy wave packets[J]. *Physical Review A*, 2016, **93**(3): 0338081.
- [13] CHEN B, CHEN C, PENG X, *et al.* Propagation of sharply autofocused ring Airy Gaussian vortex beams[J]. *Optics Express*, 2015, **23**(15): 19288-19298.
- [14] WANG X Z, LI Q, QI W. Arbitrary scanning of the Airy beams using additional phase grating with cubic phase mask [J]. *Applied Optics*, 2012, **51**(28): 6726-6731.
- [15] WANG X Z, LI Q, ZHI P X, *et al.* Generation and scanning of Airy beams array by combining multiphase patterns[J]. *Applied Optics*, 2013, **52**(13): 3039-3048.
- [16] HU Y, ZHANG P, LOU C, *et al.* Optimal control of the ballistic motion of Airy beams[J]. *Optics Letters*, 2010, **35**(13): 2260-2262.
- [17] BLECKMANN F, MINOVICH M, MOLONEY J V, *et al.* Manipulation of Airy surface Plasmon beams[J]. *Optics Letters*, 2013, **38**(9): 1443-1445.
- [18] PANAGIOTOPOULOS P, PAPAOGLOU D G, COUAIROU A, *et al.* Sharply autofocused ring-Airy beams transforming into non-linear intense light bullets[J]. *Nature Communications*, 2013, **3622**: 1-6.
- [19] ABDOLLAHPOUR D, SUNTISOV S, PAPAOGLOU D G, *et al.* Spatiotemporal Airy light bullets in the linear and nonlinear regimes[J]. *Physical Review Letters*, 2010, **105**(25): 253901.
- [20] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. *Handbook of Mathematical Functions*[M]. Washington: U. S. National Bureau of Standards, 1964.