

doi:10.3788/gzxb20174610.1016002

空间梁声子晶体带隙结构

齐晓巧,李团结,张震,唐雅琼

(西安电子科技大学 机电工程学院,西安 710071)

摘 要:为解决空间桁架、框架等复杂结构的稳定性,对其基本单元组成的空间梁声子晶体的带隙结构进行研究,运用行波法对梁单元的拉压、扭转、弯曲以及三者耦合的振动方程进行求解,并结合梁声子晶体节点处力和位移的连续性条件和 Bloch 定理,正向推导出空间梁声子晶体的色散方程和带隙特.运用遗传算法以相对带宽为目标函数(带隙总宽度与带隙下限角频率比值)对空间梁声子晶体的材料和结构尺寸进行优化,得到多组可行解并结合工程经验和经济效益逆向获得特定带隙位置和宽度的最优空间梁声子晶体结构,为空间梁声子晶体带隙结构研究提供了新思路.

关键词:声子晶体;带隙;行波法;遗传算法;空间梁

中图分类号:O734

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2017)10-1016002-8

Research of Band-gap Structure of the Spatial Beam Phononic Crystal

QI Xiao-qiao, LI Tuan-jie, ZHANG Zhen, TANG Ya-qiong

(Xidian University, School of Mechano-Electronic Engineering, Xi'an 710071, China)

Abstract: The problem of band-gap structure were studied for the spatial beam phononic crystal to solve the stability of complex structure such as space truss, frame and so on. The axial, torsional, flexural and coupled vibration equations of beam element were solved by the traveling method. The dispersion equation and band-gap properties were forward obtained by the traveling wave method combined with the continuous conditions of force and displacement at the node of beam phononic crystal and Bloch theory. Genetic algorithm was used to reverse obtained the spatial beam phononic crystal structure with specified location and width of band gap by optimizing the material and structure size, taking relative bandwidth (the ratio total width and lowest angular frequency of band gap). The optimal solution was obtained by combing with engineering experience and economic benefit. This paper provided a new way for the study of band gap structure of spatial beam phononic crystal.

Key words: Phononic crystal; Band gap; Traveling wave method; Genetic algorithm; spatial beam

OCIS Codes: 160.4236; 160.5298; 310.6870; 350.4238; 350.7420

0 引言

梁单元是组成空间技术领域复杂结构的基本单元,如复杂的桁架、框架等结构,空间梁单元可同时存在拉压、扭转、弯曲变形,由不同介质空间梁单元组成的周期性结构被称之为空间梁声子晶体,声子晶体按其带隙产生机理可分为 Bragg 散射型和局域共振型^[1-3],按其周期结构的维数可分为一维、二维和三维,一维声子晶体又可分为一维层状声子晶体、一维杆梁声子晶体和一维管环声子晶体.Wang 等人^[4]对含压电分流梁声子晶体弹性波的传输特性进行了研究;Xiao 等人^[5]应用谱元法对带谐振器梁声子晶体的弯曲波传播特性进行了理论和实验研究;Yu 等人^[6]对局域共振铁摩辛柯梁中弯曲振动带隙进行了研究;Han 等人^[7]介绍了一种改进的传递矩阵法并对欧拉梁声子晶体弯曲振动进行了研究;Xiang 等人^[8]应用微分求积法对梁声子晶体弯曲振动带隙进行分析,提供了一种有效精确的带隙计算方法;Li 等人^[9]用行波法对空间变截面梁周期结构带隙特性进行了研究.这些研究均是在已知梁声子晶体的结构尺寸和材料前提下对振动的传输特性

基金项目:国家自然科学基金(Nos.51775403,U1537213)资助

第一作者:齐晓巧(1987—),女,博士研究生,主要研究方向为声子晶体振动与降噪. Email:qixiaoqiao315@163.com

导师(通讯作者):李团结(1972—),男,教授,博士,主要研究方向为功能结构能带特性. Email:tjli888@126.com

收稿日期:2017-04-19; **录用日期:**2017-06-27

<http://www.photon.ac.cn>

展开的,而实际工程应用中往往需要解决的是其逆向问题即已知带隙位置及宽度欲知声子晶体的结构.目前还没有有效的解析表达式来解决此问题,但国内外已有学者利用遗传算法对声子晶体进行优化,将遗传算法分别和传递矩阵法^[10]、有限元方法^[11-13]、平面波展开法^[14,15]以及多重散射法^[16]结合对二维声子晶体进行结构拓扑优化,利用多目标进化遗传算法对声子晶体进行结构优化^[17,18],这些研究虽都能找到满足目标函数最大化的解,但并未考虑加工成本、加工难易程度等客观因素,这些因素难以以表达式的方式表述,因此本文用遗传算法的思想寻找满足预定频率范围为禁带的解的集合,然后根据工程经验及经济效益选出最优解.本文以空间梁声子晶体为研究对象,以行波法推导其色散方程,并利用遗传算法实现空间梁声子晶体材料参数和结构尺寸的优化设计,以便能获得在特定频率范围内相对带宽最大的空间梁声子晶体结构.

1 梁单元行波动力学模型

行波法是针对振动方程提出的,任何位置的振动都可以被描述为左行波和右行波的叠加,令 $\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r$ 分别为其左行波模式向量和右行波模式向量, $\mathbf{W}=(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r)^\top$.某一截面处的模态位移和内力在总体坐标系下表示为^[19]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{Y}(x, \omega) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_r \end{pmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{Y}(x, \omega)\mathbf{W} \quad (1)$$

式中, $(\mathbf{U}, \mathbf{F})^\top$ 为空间总体坐标下的位移和内力, \mathbf{H} 为坐标转换矩阵, $(\mathbf{u}, \mathbf{f})^\top$ 为局部坐标下的位移和内力, $\mathbf{Y}(x, \omega)$ 为状态转换矩阵.

传递矩阵可以用来描述波模式沿着一个方向的传递,因此由位置 x_1 到位置 x_2 波模式传递的关系可表达为

$$\mathbf{W}_{(x_2, \omega)} = \mathbf{t}(x_2, x_1, \omega)\mathbf{W}_{(x_1, \omega)} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{t}(x_2, x_1, \omega)$ 为单元传递矩阵.

1.1 梁单元拉压变形动力学模型

设理想弹性体为等截面细直梁,取其轴向为 x 轴,设 x 处的横截面位移为 $u_A(x, t)$,其拉压变形的振动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} \quad (3)$$

式中 ρ, E 分别为 x 处的密度、杨氏模量,令 $u_A(x, t) = u_A(x) e^{i\omega t}$ 代入式(3)可得

$$\frac{\partial u_A(x)}{\partial x^2} + \frac{\rho\omega^2}{E} u_A(x) = 0 \quad (4)$$

解得二阶微分方程式(4)为

$$u_A(x, \omega) = u_l + u_r = c_{ul} e^{jk_a x} + c_{ur} e^{-jk_a x} \quad (5)$$

式中 $k_a = \sqrt{\rho\omega^2/E}$, u_l 和 u_r 分别代表左行波和右行波波模式, c_{ul} 和 c_{ur} 左行波和右行波的振幅.

将式(5)代入轴向力 $N(x, t)$,可得

$$N(x, t) = jk_a EA u_l - jk_a EA u_r \quad (6)$$

梁单元轴向波的状态转换方程为

$$\begin{pmatrix} u_A \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ jk_a EA & -jk_a EA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_r \end{pmatrix} \quad (7)$$

梁单元轴向波的传递方程为

$$\begin{pmatrix} u_l \\ u_r \end{pmatrix}_{x_2} = \begin{pmatrix} e^{jk_a l} & 0 \\ 0 & e^{-jk_a l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l \\ u_r \end{pmatrix}_{x_1} \quad (8)$$

式中 $l = x_2 - x_1$.

1.2 梁单元扭转变形动力学模型

取等截面细直梁的轴向为 x 轴,梁受绕 x 轴扭转振动时,设 t 时刻 x 处的转矩为 $T_t(x, t)$,绕 x 方向的转角为 $\phi(x, t)$,其扭转变形的振动方程为

$$\frac{\partial T_t}{\partial x} - \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

式中, ρ 为 x 处的密度, I_p 为横截面的极惯性矩, $T_l = GI_p \frac{\partial \phi}{\partial x}$, 令 $\phi(x, t) = \phi(x) e^{j\omega t}$ 代入式(9)可得

$$G \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \phi(x) = 0 \quad (10)$$

式中 G 为材料的剪切模量, 解得二阶微分方程式(10)为

$$\phi(x, \omega) = \phi_l + \phi_r = c_{\phi_l} e^{jk_l x} + c_{\phi_r} e^{-jk_l x} \quad (11)$$

式中 $k_l = \sqrt{\rho \omega^2 / G}$, ϕ_l 和 ϕ_r 分别代表左行波和右行波波模式, c_{ϕ_l} 和 c_{ϕ_r} 左行波和右行波的振幅。

梁单元扭转波的状态转换方程为

$$\begin{pmatrix} \phi \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ jk_l GI_p & -jk_l GI_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_l \\ \phi_r \end{pmatrix} \quad (12)$$

梁单元扭转波的传递方程为

$$\begin{pmatrix} \phi_l \\ \phi_r \end{pmatrix}_{x_2} = \begin{pmatrix} e^{jk_l l} & 0 \\ 0 & e^{-jk_l l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_l \\ \phi_r \end{pmatrix}_{x_1} \quad (13)$$

式中 $l = x_2 - x_1$.

1.3 梁单元弯曲变形动力学模型

同样取等截面细直梁的轴向为 x 轴, 以 y 方向弯曲振动为例, w_y 代表梁在 y 方向的挠度, 其弯曲变形的振动方程为

$$EI_z \frac{\partial^4 w_y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

式中, E 、 ρ 、 A 分别为梁单元的弹性模量、密度和横截面积, 令 $u(x, t) = u(x) e^{j\omega t}$, 代入式(14)可得

$$w_y(x, \omega) = w_{y1}(x) + w_{y2}(x) + w_{y3}(x) + w_{y4}(x) = c_{y1} e^{jk_z x} + c_{y2} e^{k_z x} + c_{y3} e^{-jk_z x} + c_{y4} e^{-k_z x} \quad (15)$$

式中 $k_z = \sqrt[4]{(\rho A / EI_z) \omega^2}$, $w_{y1}(x)$ 、 $w_{y2}(x)$ 和 $w_{y3}(x)$ 、 $w_{y4}(x)$ 分别代表左行波和右行波波模式。

由材料力学和梁的小挠度变形可得梁的弯矩 $M(x)$ 、剪切力 $F(x)$ 及绕 z 轴的转角 φ_z 的表达式为

$$M(x) = EI_z \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = -EI_z k_z^2 w_{y1} + EI_z k_z^2 w_{y2} - EI_z k_z^2 w_{y3} + EI_z k_z^2 w_{y4} \quad (16)$$

$$F(x) = EI_z \frac{\partial^3 w_y}{\partial x^3} = -jEI_z k_z^3 w_{y1} + EI_z k_z^3 w_{y2} + jEI_z k_z^3 w_{y3} - EI_z k_z^3 w_{y4} \quad (17)$$

$$\varphi_z \approx \tan \varphi_z = \frac{dw_y}{dx} = jk_z w_{y1} + k_z w_{y2} - jk_z w_{y3} - k_z w_{y4} \quad (18)$$

式中 I_z 代表横截面绕 z 轴的惯性矩且 $I_z = \int_A y^2 dA$.

梁单元 y 方向弯曲波的状态转换方程为

$$\begin{pmatrix} w_y \\ \varphi_z \\ F_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ jk_z & k_z & -jk_z & -k_z \\ -jEI_z k_z^3 & EI_z k_z^3 & jEI_z k_z^3 & -EI_z k_z^3 \\ -EI_z k_z^2 & EI_z k_z^2 & -EI_z k_z^2 & EI_z k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{y1} \\ w_{y2} \\ w_{y3} \\ w_{y4} \end{pmatrix} \quad (19)$$

梁单元 y 方向弯曲波的传递方程为

$$(w_{y1} \ w_{y2} \ w_{y3} \ w_{y4})_{x_2}^T = \text{diag}(e^{jk_z l}, e^{k_z l}, e^{-jk_z l}, e^{-k_z l}) (w_{y1} \ w_{y2} \ w_{y3} \ w_{y4})_{x_1}^T \quad (20)$$

同理也可得到梁单元 z 方向弯曲波的状态转换方程和传递方程。

1.4 梁单元耦合变形动力学模型

空间梁单元可同时存在拉压、扭转、弯曲(y 方向和 z 方向)三种变形, 令截面位移向量为 \mathbf{u} , 截面内力向量为 \mathbf{f} , 左行波模式向量为 \mathbf{w}_l , 右行波模式向量为 \mathbf{w}_r , 在三种波模式耦合作用下, \mathbf{u} 、 \mathbf{f} 、 \mathbf{w}_l 、 \mathbf{w}_r 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_A \ w_y \ w_z \ \phi \ \varphi_y \ \varphi_z)^T \\ \mathbf{f} &= (N \ F_y \ F_z \ T \ M_y \ M_z)^T \\ \mathbf{w}_l &= (u_l \ w_{y1} \ w_{z1} \ \phi_l \ w_{z2} \ w_{y2})^T \\ \mathbf{w}_r &= (u_r \ w_{y3} \ w_{z3} \ \phi_r \ w_{z4} \ w_{y4})^T \end{aligned} \quad (21)$$

其对应的状态转换方程可由式(7)、(12)和(19)可得,其传递方程可由式(8)、(13)和(20)可得.

2 空间梁结构声子晶体带隙计算

声子晶体是由两种或两种以上材料组成的,具有弹性波带隙的周期性复合材料或结构,本文所研究的空间梁声子晶体由材料 A 和材料 B 两种材料组成,如图 1 所示, $o'x'y'z'$ 为总体坐标系,A、B 单元的长度分别

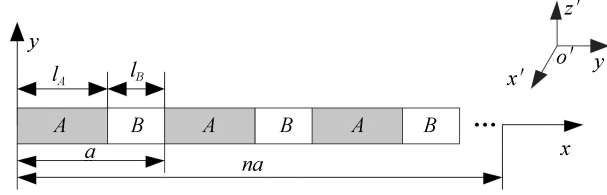


图 1 空间梁声子晶体结构

Fig.1 Spatialbeam phononic crystal structure

为 l_A 、 l_B ,晶格常数 $a=l_A+l_B$, \mathbf{U}_{nB}^R 和 \mathbf{F}_{nB}^R 分别表示第 n 个周期单元的输出位移和力矢量, \mathbf{U}_{nA}^L 和 \mathbf{F}_{nA}^L 分别表示第 n 个周期单元的输入位移和力矢量,L 和 R 分别表示梁单元的左端和右端,根据节点力和位移连续条件可得:

第 n 个周期 A 单元与 B 单元节点为

$$\mathbf{F}_{nA}^R = \mathbf{F}_{nB}^L, \mathbf{U}_{nA}^R = \mathbf{U}_{nB}^L \quad (22)$$

第 $n-1$ 个周期与第 n 个周期单元节点

$$\mathbf{F}_{(n-1)B}^R = \mathbf{F}_{nA}^L, \mathbf{U}_{(n-1)B}^R = \mathbf{U}_{nA}^L \quad (23)$$

令 $\mathbf{P}_{(n-1)B}^R = (\mathbf{U}_{(n-1)B}^R, \mathbf{F}_{(n-1)B}^R)^T$ 是第 n 个周期单元的输入状态矢量, $\mathbf{P}_{nB}^R = (\mathbf{U}_{nB}^R, \mathbf{F}_{nB}^R)^T$ 是第 n 个周期单元的输出状态矢量,由式(22)和(23)得

$$\mathbf{P}_{nA}^R = \mathbf{P}_{nB}^L, \mathbf{P}_{(n-1)B}^R = \mathbf{P}_{nA}^L \quad (24)$$

将式(1)代入式(24)得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{nA}^R &= \mathbf{H}_{nA}^R \mathbf{Y}_{nA}^R \mathbf{W}_{nA}^R = \mathbf{P}_{nB}^L = \mathbf{H}_{nB}^L \mathbf{Y}_{nB}^L \mathbf{W}_{nB}^L \\ \mathbf{P}_{(n-1)B}^R &= \mathbf{H}_{(n-1)B}^R \mathbf{Y}_{(n-1)B}^R \mathbf{W}_{(n-1)B}^R = \mathbf{P}_{nA}^L = \mathbf{H}_{nA}^L \mathbf{Y}_{nA}^L \mathbf{W}_{nA}^L \end{aligned} \quad (25)$$

将式(2)和式(25)得

$$\mathbf{P}_{nB}^R = \mathbf{D} \mathbf{P}_{(n-1)B}^R \quad (26)$$

式中 $\mathbf{D} = \mathbf{H}_{nB}^R \mathbf{Y}_{nB}^R \mathbf{t}_B^{L \rightarrow R} (\mathbf{H}_{nB}^L \mathbf{Y}_{nB}^L)^{-1} \mathbf{H}_{nA}^R \mathbf{Y}_{nA}^R \mathbf{t}_A^{L \rightarrow R} (\mathbf{H}_{nA}^L \mathbf{Y}_{nA}^L)^{-1}$ 为第 $n-1$ 个单元到第 n 个单元的传递矩阵,引入 Bloch 定理可得

$$\mathbf{P}_{nB}^R = e^{ika} \mathbf{P}_{(n-1)B}^R \quad (27)$$

式中 k 为波矢,将式(27)代入式(26)中得到空间梁声子晶体的色散方程为

$$|\mathbf{D} - e^{ika} \mathbf{I}| = 0 \quad (28)$$

式中 \mathbf{I} 为与矩阵 \mathbf{D} 同维数的单位矩阵,由式(28)可得波矢 k 和角频率 ω 的关系即色散曲线,从而得到周期结构的能带特性,当 k 解满足 $0 \leq |\text{Re}(k)| \leq \pm \pi/a - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 且 $|\text{Im}(k)| > 0$ 时,本征波均为衰减波,因此将这些频带被称之为带隙(或禁带).当 k 解满足 $0 \leq |\text{Re}(k)| \leq \pm \pi/a$ 且 $|\text{Im}(k)| = 0$ 时,本征波均为自由行波,将这样的频带被称之为通带.

3 空间梁声子晶体带隙优化

研究表明,影响声子晶体带隙位置和带宽的因素较多,既受组元材料的影响又受结构参数的影响,影响梁声子晶体带隙的因素主要有:组元材料密度 ρ 、弹性模量 E 、剪切模量 G 、晶格常数 a 及组元结构尺寸 l_A 和 l_B .由于这些因素对带隙位置和宽度的影响只有定性分析并没有定量描述,因此针对已知梁声子晶体带隙位置和带宽而求其组元信息的问题亦没有行之有效的公式进行描述,但是可以使用智能算法通过迭代寻优获得满足带隙要求的梁声子晶体结构.

本文假设晶格常数 a 为定值,研究角频率范围为 $[c, d]$ rad/s,变量参数为组元 A、B 的材料和组元 A 的

长度,声子晶体带隙越宽频率越低则其减振效果越好,因此带隙宽度和带隙频率均为优化目标,由于多目标优化问题比较复杂所以本文以相对带宽(带隙总宽度与带隙下限角频率比值)为目标函数,带隙越宽以及带隙下限频率越低则相对带宽越大,因此相对带宽可对带隙总宽度和带隙下限角频率进行综合考虑,数学模型可表达为

$$\begin{aligned}
 & \text{find } M(:, X_1), M(:, X_2), l_A \\
 & \text{min } F = -\frac{BW_{\text{total}}}{WS} \\
 & \text{s.t. } 0 \leq BW_{\text{total}} \leq d - c \\
 & c \leq WS \leq d \\
 & 0 \leq X_1 \leq n \\
 & 0 \leq X_2 \leq n \\
 & 0 \leq l_A \leq a
 \end{aligned} \tag{29}$$

式中 M 为 $3 \times n$ 的二维数组,行代表材料的参数(密度、弹性模量、剪切模量), X_1 、 X_2 均为列编号代表材料种类, n 为可供选择材料的种类, BS_{total} 为研究角频率范围内禁带宽度, WS 为禁带的下限角频率。

由于遗传算法具有高效、并行全局优化搜索、通用性和鲁棒性强的特点,故本文选择此智能算法。遗传算法流程为:1)产生初始种群,对梁声子晶体单胞进行二进制编码随机生成染色体,每个染色体代表材料种类 X_1 、 X_2 和组元 A 的长度 l_A ;2)对生成的种群进行解码操作,将二进制串转换为单胞组元材料和长度,结合行波法计算每个染色体对应单胞生成的相对带宽的负值,防止早熟现象,本文采用线性排序方式进行适应度分配,选出适应度高的染色体,如果相对带宽的负值达到其下限,则将其对应的染色体保存;3)对种群染色体进行选择、交叉、变异操作,使种群不断更新向着适应度高的方向进化,选择操作采用轮盘赌选择方式,交叉操作采用平均交叉方式;4)终止条件判断,当迭代数达到预设的代数时,终止算法,输出最优解,否则转到2);5)根据工程经验和经济效益对2)中保存的染色体进行选择,获得最优解。

4 数值算例

取铝(Al)和环氧树脂(Epoxy resin)组成的梁声子结构为例,其材料参数见表1,横截面积均为 $6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $l_A = 0.5 \text{ m}$, $l_B = 0.5 \text{ m}$,对梁声子晶体结构的拉伸、扭转、弯曲及三者耦合变形情况下的带隙进行计算分析。

表1 材料参数

Table 1 Material Parameters

No.	Materials	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E/GPa	G/GPa	No.	Materials	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E/GPa	G/GPa
1	Pb	11 600	40.8	14.9	9	Silicone rubber 2	1 300	1.37×10^{-4}	4.68×10^{-5}
2	Cu	8 950	164.6	75.3	10	NBR	1 300	1.2×10^{-2}	4×10^{-3}
3	steel	7 780	210.6	81.0	11	Vulcanized rubber 1	1 300	1×10^{-3}	3.4×10^{-4}
4	Al_2O_3	3 970	396.4	159.8	12	Vulcanized rubber 2	1 300	7.7×10^{-4}	2.6×10^{-4}
5	Al	2 730	77.6	28.7	13	PMMA1	1 142	2	0.72
6	Al2	2 799	72.1	26.8	14	PMMA 2	1 062	3.2	1.2
7	Epoxy resin	1 180	4.35	1.59	15	Plastics	1 190	2.2	0.8
8	Silicone rubber	1 300	1.175×10^{-4}	4×10^{-5}					

图2(a)、(b)、(c)和(d)分别为梁在拉压变形、扭转变形、弯曲变形及三者耦合的情况下形成的带隙结构,由带隙结构图可知:拉压波在角频率 $4\ 615 \sim 11\ 1452 \text{ rad/s}$ 范围内被衰减;扭转波在角频率为 $2\ 809 \sim 6\ 937 \text{ rad/s}$ 范围内被衰减;弯曲波在角频率 $1\ 261 \sim 2\ 035 \text{ rad/s}$ 和 $5\ 260 \sim 9\ 904 \text{ rad/s}$ 范围内被衰减;三种波耦合角频率为 $5\ 905 \sim 6\ 937 \text{ rad/s}$ 和 $7\ 324 \sim 9\ 646 \text{ rad/s}$ 范围内的弹性波被衰减。这些角频率范围分别被称之为各种情况下的禁带,其他角频率范围则被称为通带,弹性波在通带范围内可自由传播。

利用遗传算法优化梁结构声子晶体带隙,假设晶格常数 $a = 1 \text{ m}$,角频率范围为 $[100, 13000] \text{ rad/s}$,本文所选材料参数如表1所示,将其存储在 3×15 的二维数组 M 中,遗传算法的种群规模为40,最大进化代数为50,交叉概率为0.7,变异概率为0.0017。

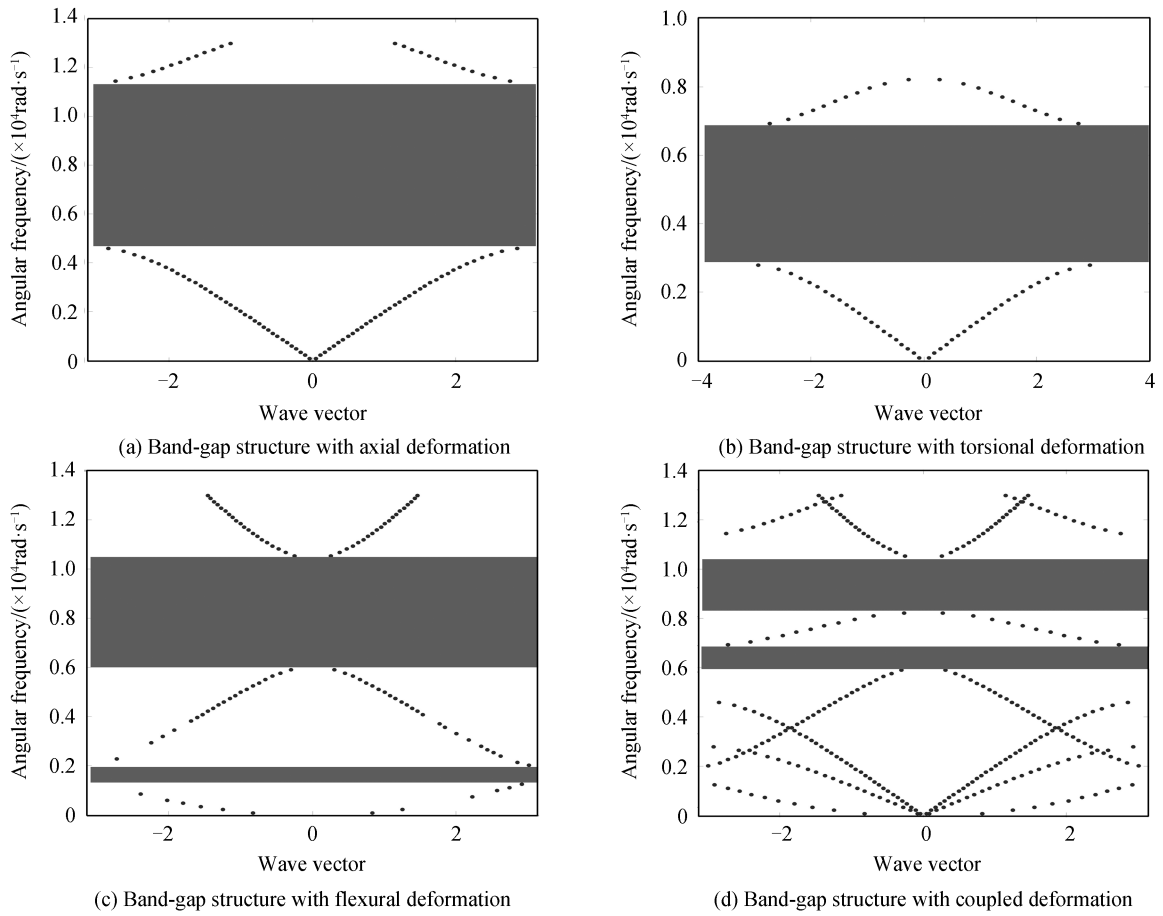


图 2 空间梁声子晶体的能带结构

Fig.2 Band-gap structure of spatial beam phononic crystal

图 3~图 6 分别为拉压变形、扭转变形、弯曲变形及三者变形耦合情况下经 50 次迭代种群均值变化及最优解变化,经过迭代优化后四种情况下相对带宽均可达到最大值 129,即角频率 $[100, 13000]$ rad/s 为禁带,满足设计要求,组元之间的连接可根据实际工程情况选择铰接、粘接或其他方式,由图 3、图 4、图 5 和图 6 可知,此算例在 10 代前均已取得最大相对带宽,达到收敛状态,种群的均值却不断变化,所以存在很多个可行解,其中拉伸、扭转、弯曲以及耦合变形带隙优化分别得到了 1 227、1 397、744 和 845 组可行解,本文只列出部分可行解如表 2 所示, X_1 、 X_2 所取数值均为表 1 中材料编号,根据工程经验和经济效益可获得如表 3 所示的优化结果.

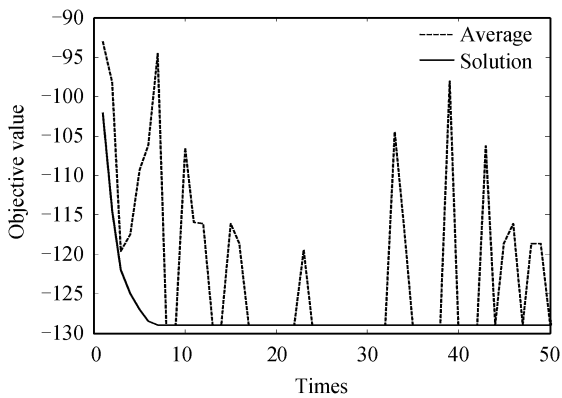


图 3 拉压变形种群均值变化和最优解变化
Fig.3 The variation of population average and solution with axial deformation

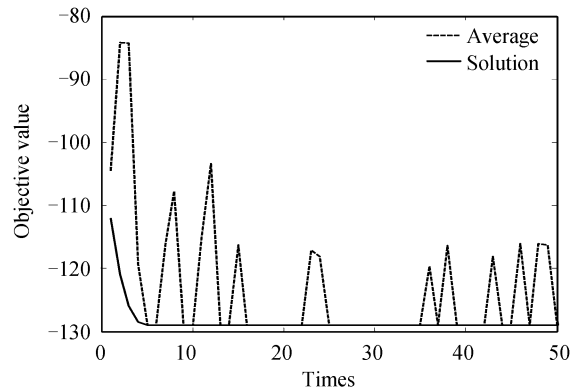


图 4 扭转变形种群均值变化和最优解变化
Fig.4 The variation of population average and solution with torsional deformation

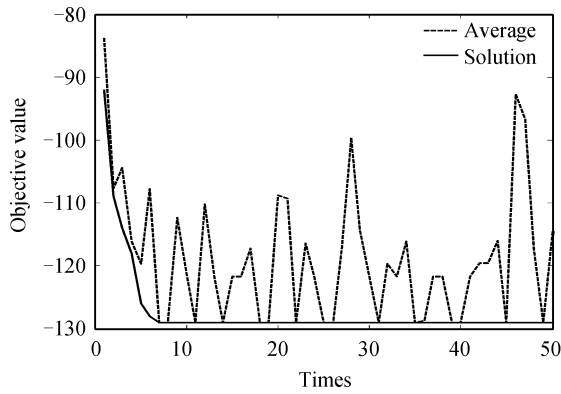


图5 弯曲变形种群均值变化和最优解变化

Fig.5 The variation of population average and solution with flexural deformation

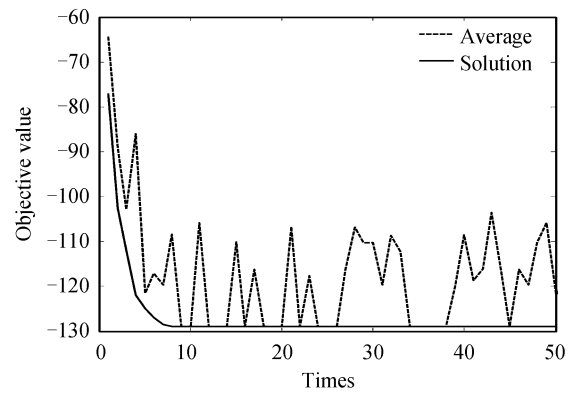


图6 三者变形耦合种群均值变化和最优解变化

Fig.6 The variation of population average and solution with coupled deformation

表2 带隙优化部分可行解

Table 2 Partial feasible Solution of band gap optimization

Axial			Torsional			Flexural			Coupled		
X_1	X_2	l_A/m	X_1	X_2	$l_A(m)$	X_1	X_2	l_A/m	X_1	X_2	l_A/m
11	3	0.264 2	11	3	0.360 8	9	13	0.882 1	8	5	0.598 3
11	3	0.365 7	11	5	0.639 2	8	13	0.879 6	8	4	0.505 2
11	3	0.345 2	11	6	0.638 2	9	10	0.875 3	9	5	0.665 8
11	3	0.325 7	11	3	0.264 2	9	10	0.783 7	8	4	0.504 6
11	3	0.326 7	11	3	0.326 7	9	10	0.930 4	8	5	0.589 2
11	3	0.360 8	11	3	0.358 4	9	8	0.882 1	8	5	0.504 6
8	4	0.389 2	8	5	0.360 8	9	13	0.879 6	8	5	0.515 6
11	3	0.299 3	11	3	0.285 3	9	10	0.882 1	8	5	0.507 2
11	3	0.344 8	9	3	0.360 8	9	10	0.836 2	8	3	0.754 6
8	4	0.286 9	9	3	0.268 4	9	8	0.802 6	8	3	0.698 1

表3 优化结果

Table 3 Optimizedresult

Pattern	Material A	Material B	l_A/m
Axial	Vulcanized rubber 1	Steel	0.345 2
Torsional	Vulcanized rubber 1	Steel	0.264 2
Flexural	Silicone rubber 2	NBR	0.930 4
Coupled	Silicone rubber	Al	0.504 6

5 结论

利用行波法分别计算了空间梁声子晶体在拉压变形、扭转变形、弯曲变形及三者变形耦合情况下的带隙结构,可以发现三者变形耦合的带隙结构为其三者变形单独存在带隙结构的交集,由此可以证明三者变形耦合的激励可以线性解耦为三者变形激励.在带隙结构逆向问题研究中,利用遗传算法,以相对带宽为目标函数,找到多个满足带隙结构设计要求的可行解,最后根据工程经验及经济效益选择其最优解,证明了遗传算法在解决带隙结构逆向问题的可行性,避免了凭借经验设计结构的盲目性.

参考文献

- [1] ZHANG Jia-long, YAO Hong, DU Jun, *et al.* The reduction of low-frequency noise in phononic crystal plates with composite locally resonant structures and thin membrane[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(7): 0731002.
张佳龙,姚宏,杜军,等.局域共振单元与薄膜复合声子晶体板结构的低频降噪[J].光子学报,2016, **45**(7): 0731002.
- [2] DU JUN, QI Peng-shan, JIANG Jiu-long, *et al.* Investigation of sound isolation in composite structure of local resonant phononic crystals[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(10): 1016001.
杜军,祁鹏山,姜久龙,等.局域共振声子晶体复合结构的隔声特性[J].光子学报,2016, **45**(10): 1016001.
- [3] LIU Z Y, ZHANG X X, MAO Y W, *et al.* Locally resonant sonic materials [J]. *Science*, 2000, **289**(5485): 1734-1736.
- [4] WANG J W, WANG G, CHEN S B, *et al.* Broadband attenuation in phononic beams induced by periodic arrays of

- feedback shunted piezoelectric patches[J]. *Chinese Physics Letters*, 2012, **29**(6): 064302.
- [5] XIAO Y, WEN J H, WANG G, *et al.* Theoretical and experimental study of locally resonant and Bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2013, **135**(4): 041006.
- [6] YU D L, LIU Y Z, WANG G, *et al.* Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures [J]. *Journal of Applied Physics*, 2006, **100**(12): 124901.
- [7] HAN L, ZHANG Y, NI Z Q, *et al.* A modified transfer matrix method for the study of the bending vibration band structure in phononic crystal Euler beams [J]. *Physica B*, 2012, **407**(23): 4579-4583.
- [8] XIANG H J, SHI Z F. Analysis of flexural vibration band gaps in periodic beams using differential quadrature method [J]. *Computers and Structures*, 2009, **87**(23-24): 1559-1566.
- [9] LI T J, MA X F, ZHANG Q, *et al.* Band gap properties of periodic tapered beam structure using travelling wave method [J]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **54**(4): 1297-1308.
- [10] HUSSEIN M I, EI-BELTAGY M A. Optimization of phononic filters via genetic algorithms[C]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2007, **92**: 012110.
- [11] DONG H W, SU X X, WANG Y S. Topological optimization of two-dimensional phononic crystals based on the finite element method and genetic algorithm[J]. *Struct Multidisc Optim*, 2014, **50**(4): 593-604.
- [12] GAZONAS G A, WEILE D S, WILDMAN R, *et al.* Genetic algorithm optimization of phononic bandgap structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(18): 5851-5866.
- [13] WILDMAN R A, GAZONAS G A. Genetic programming-based phononic bandgap structure design[R]. Army Research Lab Aberdeen Proving Ground Md Weapons and Materials Research Directorate, 2011.
- [14] ZHONG Hui-lin, WU Fu-gen, YAO Li-ning. Application of genetic algorithm in optimization of band gap of two-dimensional phononic crystals[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(1): 275-280.
钟会林, 吴福根, 姚立宁. 遗传算法在二维声子晶体带隙优化中的应用[J]. *物理学报*, 2006, **55**(1): 275-280.
- [15] DONG Ya-ke, DU Jun, YAO Hong, *et al.* Optimal structure design of two-dimensional phononic crystal based on intelligent algorithm[J]. *Journal of Synthetic Crystals*, 2015, **44**(11): 3201-3204.
董亚科, 杜军, 姚宏, 等. 基于智能算法的二维声子晶体最优结构设计[J]. *人工晶体学报*, 2015, **44**(11): 3201-3204.
- [16] ROMERO-GARCIA V, FUSTER-GARCIA E, SANCHE-PEREZ J, *et al.* Genetic algorithm in the optimization of the acoustic attenuation systems[C]. *Conference on Artificial Neural Networks*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [17] HERRERO J M, GARCIA-NIETO S, BLASCO X, *et al.* Optimization of sonic crystal attenuation properties by evolutionary multiobjective algorithm[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2009, **39**(2): 203-215.
- [18] HUSSEIN M I, HAMZA K, HULBERT G M, *et al.* Multiobjective evolutionary optimization of periodic layered materials for desired wave dispersion characteristics[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, **31**(1): 60-75.
- [19] 张迁. 周期梁结构的能带特性分析[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2015.