

doi:10.3788/gzxb20174610.1006003

# 光纤布拉格光栅传感器应变传递耦合机理分析

吴入军<sup>1</sup>, 郑百林<sup>2</sup>, 陈田<sup>1</sup>, 常远<sup>3</sup>, 付昆昆<sup>3</sup>

(1 上海电机学院 机械学院, 上海 201306)

(2 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

(3 悉尼大学 宇航、机械与机电工程学院, NSW 2006, 澳大利亚)

**摘 要:**建立了半平面体与光纤布拉格光栅传感器双向耦合的应变传递理论,得到表面粘贴式光纤布拉格光栅传感器测量应变与半平面体应变之间的关系.将理论解、有限元解和实验数据进行对比以验证该理论的正确性,并分析了应变传递率与半平面体弹性模量、半粘结长度的关系.结果表明:理论解与实验值非常接近,误差在 4% 以内,应变传递率随着半平面体弹性模量的增大、半粘结长度的增长而逐渐增大,对光纤布拉格光栅传感器的设计和应用具有一定的参考价值.

**关键词:**应变传递率;表面粘贴;剪应力;数值解;光纤布拉格光栅;预应变;应力

中图分类号:TH89; TN253; TH706

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2017)10-1006003-10

## Coupled mechanism Analysis of strain transfer of Fiber Bragg Grating Sensors

WU Ru-jun<sup>1</sup>, ZHENG Bai-lin<sup>2</sup>, CHEN Tian<sup>1</sup>, CHANG Yuan<sup>3</sup>, FU Kun-kun<sup>3</sup>

(1 School of Mechanical Engineering, Shanghai Dianji University, Shanghai 201306, China)

(2 School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(3 School of Aerospace, Mechanical and Mechatronic Engineering, University of Sydney, NSW 2006, Australia)

**Abstract:** Strain transfer theory of two-way coupled between the Half-plane and the Fiber Bragg Grating sensor was established, the relationship between the measured strain of the surface-bonding Fiber Bragg Grating sensor and the strain of the Half-plane was obtained. The theoretical solution, the Finite Element solution and the experimental date were compared to verify the correctness of the theory, and the relationship between the strain transfer rate and the Young's modulus of the Half-plane and the half bonding length was analyzed. The result show that the error of the theoretical solution and experimental value is very small, less than 4%, the strain transfer rate increases with the increasing both the Young's modulus of the Half-plane and the half bonding length, it has some reference value for the design and application of Fiber Bragg Grating sensors.

**Key words:** Strain transfer rate; Surface-bonding; Shear stress; Numerical solution; Fiber Bragg Grating; Pre-strain; Stress

**OCIS Codes:** 060.2370; 060.2300; 060.2280; 060.3735; 060.3738

## 0 引言

光纤传感技术具有灵敏度高、适应性强、便于空间多点分布以及抗电磁干扰等特性,被广泛应用于航空、医疗、土木工程、机械装备等领域进行安全检测.根据被测结构的不同,安装光纤布拉格光栅(Fiber Bragg Grating, FBG)传感器有埋入和表面粘贴两种方式,但是在安装时,光纤与被测结构之间需要保护层、粘结层等中间结构连接在一起,造成光纤与被测结构并不直接接触;同时,由于 FBG 传感器的存在增强了被测结构局部强度,改变了局部应变分布状态,导致光纤应变(测量应变)与被测结构实际应变并不相等,因此研究

**基金项目:**国家高技术研究发展计划(No.2012AA040106)、上海市教委科研创新重点项目(No.14ZZ169)、上海市自然科学基金(No.15ZR1417200)和上海电机学院登峰学科建设项目资助(No.16DFXK01)资助

**第一作者:**吴入军(1979—),男,讲师,博士,主要研究方向为固体力学与光纤传感技术. Email: wurujunwurujun@163.com

**收稿日期:**2017-04-18; **录用日期:**2017-06-23

<http://www.photon.ac.cn>

FBG 传感器与被测结构之间的双向耦合作用,建立光纤应变与被测结构实际应变之间的关系对于提高测量精度具有重要意义<sup>[1-3]</sup>.

ANSARI F<sup>[4]</sup> 在 1998 年利用剪滞原理分析了埋入式 FBG 传感器应变传递机理,并通过实验验证其理论的正确性;在 ANSARI F 研究基础上,LI Qing-bin<sup>[5]</sup> 等人利用理想弹性理论研究了 FBG 传感器应变传递特性,将应变传递理论扩大到弹塑性范畴.李东升<sup>[6-8]</sup> 等人修正了 ANSARI F 提出的“光纤中间各层应变相等”的假设,提出“各层应变率相等”的假设,得到精度更高的应变传递理论.同济大学的吴永红<sup>[9-10]</sup> 等人利用弹性力学理论对 FBG 传感器光-力转换问题进行了研究,建立了波长偏移量与被测结构应变之间的关系;刘德华<sup>[11]</sup> 等人将 FBG 传感器埋入到混凝土结构中,利用剪滞原理计算出 FBG 传感器测量应变的理论值,并与实验测量值进行了比较,得到了比较满意的结果.梁德智<sup>[12]</sup> 等人利用 CAE 软件得到的数值解验证了李东升等人提出的 FBG 传感器应变传递理论比 ANSARI F 提出的应变传递理论具有更高的精度;针对 FBG 传感器,吴入军<sup>[13]</sup> 等人没有使用剪滞原理,而是提出了多项式形式的层间剪应力分布,建立了应变传递理论,经论证具有较高的精度.为了得到被测结构弹性模量对应变灵敏度系数的影响,孙丽<sup>[14]</sup> 等人分别对钢板和有机玻璃进行了应变灵敏度标定实验,得到有机玻璃的应变传递系数要远小于钢板,即应变传递效果与被测结构的弹性模量是密切相关的.

针对表面粘贴式 FBG 传感器,现有的理论大多都会假定被测结构是刚性的,不考虑 FBG 传感器的存在对被测结构应变分布的影响,因此属于单向耦合范畴,所以这些理论在测量低模量被测结构时会产生较大误差,如文献[14]所述.基于此,本文针对 FBG 传感器粘贴于半平面体的情况,基于弹性力学半平面理论,建立了 FBG 传感器与半平面体之间的双向耦合的应力/应变关系,用以校正测量应变的误差.

### 1 理论推导

图 1 为 FBG 传感器模型,半平面体  $x$  方向承受一均匀预应变  $\epsilon_\infty$ ,利用半平面理论建立半平面体与光纤应变耦合关系.假设<sup>[2-13]</sup> 图 1 中的 FBG 传感器各层结构均为线弹性材料,各层结构之间的界面均为理想界面,FBG 传感器主要是轴向变形,与轴向变形( $x$  方向)相比,可忽略厚度方向( $r$  方向)的变形.

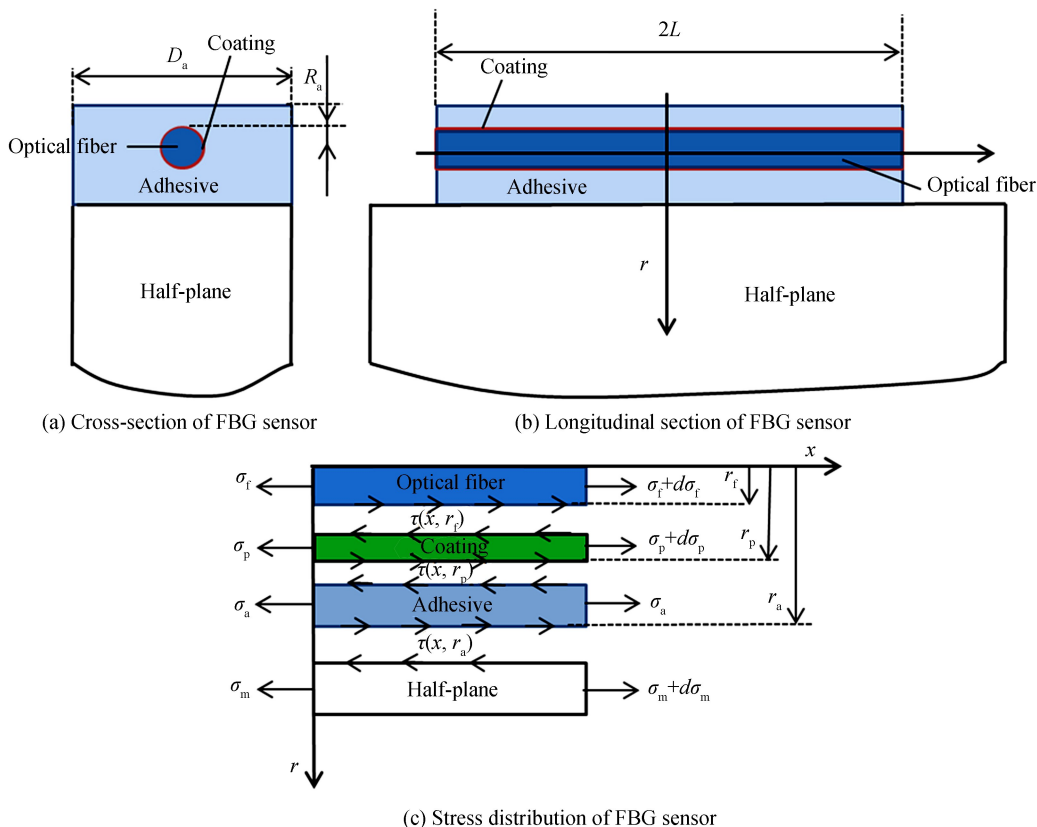


图 1 传感器模型

Fig.1 Modal of FBG sensor

下标符号  $f, p, a$  和  $m$  依次代表光纤、保护层、粘结层和半平面体;半粘结长度为  $L$ , 粘结长度为  $2L$ ;  $r_f$  为光纤半径、 $r_p$  为保护层外径、 $R_a$  和  $D_a$  分别代表粘结层上厚度和传感器宽度、 $r_a$  为光纤中心与半平面体之间的距离、 $r$  代表以光纤中心为原点的坐标、 $\sigma, \epsilon, \tau$  和  $\gamma$  代表正应力、正应变、剪应力和剪应变。

根据受力平衡,建立光纤平衡方程

$$\pi r_f^2 \sigma_f = \pi r_f^2 (\sigma_f + d\sigma_f) + 2\pi r_f dx \tau(x, r_f) \quad (1)$$

式中,  $\tau(x, r_f)$  代表光纤与保护层之间的界面剪应力。

保护层和粘结层的平衡微分方程为

$$\pi(r^2 - r_f^2)\sigma_p + 2\pi r dx \tau(x, r_f) = \pi(r^2 - r_f^2)(\sigma_p + d\sigma_p) + 2\pi r dx \tau_p(x, r) \quad (r_f \leq r \leq r_p) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [D_a(R_a + r_p + r) - \pi r_p^2]\sigma_a + 2\pi r_p dx \tau_p(x, r_p) &= \tau_a(x, r) D_a dx + \\ [D_a(R_a + r_p + r) - \pi r_p^2](\sigma_a + d\sigma_a) &\quad (r_p < r \leq r_a) \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\tau_p(x, r)$  和  $\tau_a(x, r)$  分别为保护层和粘结层的剪应力;  $\tau_p(x, r_p)$  为保护层与粘结层之间的界面剪切力。

由式(1)~(3)可以得到

$$\begin{cases} \tau_p(x, r) = -\frac{r_f^2 d\sigma_f}{2r dx} - \frac{(r^2 - r_f^2) d\sigma_p}{2r dx} & (r_f \leq r \leq r_p) \\ \tau_a(x, r) = -\frac{2\pi r_p}{D_a} \left( \frac{r_f^2 d\sigma_f}{2r_p dx} + \frac{(r_p^2 - r_f^2) d\sigma_p}{2r_p dx} \right) - \left( R_a + r_p + r - \frac{\pi r_p^2}{D_a} \right) \frac{d\sigma_a}{dx} & (r_p < r \leq r_a) \end{cases} \quad (4)$$

假定 FBG 传感器各层结构具有相同的应变梯度,即存在<sup>[6-8]</sup>

$$\frac{d\epsilon_f}{dx} \approx \frac{d\epsilon_p}{dx} \approx \frac{d\epsilon_a}{dx} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),得

$$\begin{cases} \tau_p(x, r) = -\left[ \frac{r_f^2 E_f}{2r} + \frac{(r^2 - r_f^2) E_p}{2r} \right] \frac{d\epsilon_f}{dx} \\ \tau_a(x, r) = -\frac{1}{D_a} [\pi(r_f^2(E_f - E_p) + r_p^2 E_p) + E_a(D_a(R_a + r_p + r) - \pi r_p^2)] \frac{d\epsilon_f}{dx} \end{cases} \quad (6)$$

$x$  方向是主要变形方向,  $r$  与  $x$  方向变形相比可以忽略不计<sup>[6, 11-13]</sup>, 则存在式(7)

$$\tau(x, r) = G \left( \frac{du}{dr} + \frac{dv}{dx} \right) \cong G \frac{du}{dr} \quad (7)$$

式中,  $u = u(x), v = v(x)$  分别为  $x, r$  方向变形。

将式(6)代入式(7)并积分,得

$$\int_{r_f}^{r_a} \left( \frac{du}{dr} \right) dr = \int_{r_f}^{r_p} \frac{\tau_p(x, r)}{G_p} dr + \int_{r_p}^{r_a} \frac{\tau_a(x, r)}{G_a} dr \quad (8)$$

求解式(8)得

$$u_x(x, r_a) - u_f(x) = -\frac{1}{k^2} \frac{d\epsilon_f(x)}{dx} \quad (9)$$

式中,  $u_x(x, r_a), \epsilon_f(x)$  为半平面体和光纤的  $x$  方向位移,  $k$  值为

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &= \frac{2r_f^2(\ln r_p - \ln r_f)(E_f - E_p) + (r_p^2 - r_f^2)E_p}{4G_p} + \{ \pi(r_a - r_p)[r_f^2(E_f - E_p) + r_p^2 E_p] + \\ &E_a \{ [D_a(R_a + r_p) - \pi r_p^2](r_a - r_p) + (r_a^2 - r_p^2)D_a/2 \} \} / D_a G_a \end{aligned} \quad (10)$$

对式(9) $x$  求导得

$$\epsilon_x(x, r_a) = \epsilon_f(x) - \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \epsilon_f(x)}{dx^2} \quad (11)$$

式中,  $\epsilon_f(x), \epsilon_x(x, r_a)$  分别为光纤应变和半平面体轴向应变。

根据式(6)可知:粘结层与半平面体之间的界面剪应力为

$$\tau(x, r_a) = -\frac{1}{D_a} \{ \pi(r_f^2(E_f - E_p) + r_p^2 E_p) + E_a(D_a(R_a + r_p + r_a) - \pi r_p^2) \} \frac{d\epsilon_f}{dx} = -E_{eq} \frac{d\epsilon_f}{dx} \quad (12)$$

式中

$$E_{\text{eq}} = \frac{1}{D_a} \{ \pi (r_i^2 (E_t - E_p) + r_p^2 E_p) + E_a (D_a (R_a + r_p + r_a) - \pi r_p^2) \} \quad (13)$$

令参数  $E_{\text{eq}}$  定义为 FBG 传感器的等效弹性模量。

为了方便对半平面体进行应变分析,建立 FBG 传感器与半平面体之间的双向耦合关系,提出参数  $y = r - r_a$ 。

半平面体上表面所受剪应力为奇函数,所以半平面体  $\sigma_x$  和  $\sigma_r$  为偶函数,  $\tau_{xr}$  为奇函数,设双调和函数通解为<sup>[16-17]</sup>

$$U(x, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} + C \lambda y e^{\lambda y} + D \lambda y e^{-\lambda y}] \cos \lambda x \, d\lambda \quad (14)$$

为保证  $y \rightarrow \infty$  时的解有界,必须保证:  $A = C = 0$ ,同时,式(14)中的  $\lambda$  需取绝对值(因为  $\lambda$  从  $-\infty$  到  $+\infty$ ),因此,式(14)进一步简化为

$$U(x, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(B + D |\lambda| y) e^{-|\lambda| y}] \cos \lambda x \, d\lambda \quad (15)$$

由式(15)得到半平面体应力场为<sup>[16-17]</sup>

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 U(x, r)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 [(B - 2D) e^{-|\lambda| y} + D |\lambda| y e^{-|\lambda| y}] \cos(\lambda x) \, d\lambda \\ \sigma_r = \frac{\partial^2 U(x, r)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 [(B + D |\lambda| y) e^{-|\lambda| y}] \cos(\lambda x) \, d\lambda \\ \tau_{xr} = -\frac{\partial^2 U(x, r)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |\lambda| [(D - B) e^{-|\lambda| y} - D |\lambda| y e^{-|\lambda| y}] \sin(\lambda x) \, d\lambda \end{cases} \quad (16)$$

半平面体上表面承受来自 FBG 传感器的剪切力,其边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial^2 U(x, r)}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xr}(x, r_a) = \tau(x, r_a) \quad (y = 0) \end{cases} \quad (17)$$

根据边界条件(17),求解  $B$  和  $D$  为

$$\begin{cases} B = 0 \\ D = -\frac{\sigma_x(\lambda, r_a)}{2\lambda^2} \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)中的参数代入式(16)中的第三式,可得半平面体上表面剪应力为

$$\tau_{xr}(x, r_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D \lambda |\lambda| \sin \lambda x \, d\lambda \quad (19)$$

对式(19)进行傅里叶逆变换得

$$\tau_{xr}(\lambda, r_a) = -\frac{|\lambda| \sigma_x(\lambda, r_a)}{2\lambda} \quad (20)$$

将式(20)变形为

$$\sigma_x(\lambda, r_a) = -\frac{2\lambda \tau_{xr}(\lambda, r_a)}{|\lambda|} \quad (21)$$

对式(21)进行傅里叶逆变换,得到半平面体  $x$  方向应变为

$$\epsilon_x(x, r_a) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda \tau_{xr}(\lambda, r_a)}{|\lambda| E_1} \cos \lambda x \, d\lambda \quad (22)$$

式中,平面应力情况  $E_1 = E_m$ ,平面应变情况  $E_1 = E_m / (1 - \mu^2)$ ,  $\mu$  为泊松比。

由于半平面体预应变为  $\epsilon_\infty$ ,因此半平面体上表面  $x$  方向应变为

$$\epsilon_x(x, r_a) = \epsilon_\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda \tau_{xr}(\lambda, r_a)}{|\lambda| E_1} \cos \lambda x \, d\lambda \quad (23)$$

将式(23)代入式(11)得

$$\epsilon_{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda\tau_{xr}(\lambda, r_a)}{|\lambda|E_1} \cos\lambda x d\lambda = \epsilon_f(x) - \frac{1}{k^2} \frac{d^2\epsilon_f(x)}{dx^2} \quad (24)$$

将式(12)代入式(24),建立光纤应变与半平面体预应变之间的二阶微分方程为

$$\epsilon_{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda^2\tau_{xy}(\lambda, r_a)E_{eq}i\epsilon_f(\lambda)}{|\lambda|E_1} \cos\lambda x d\lambda = \epsilon_f(x) - \frac{1}{k^2} \frac{d^2\epsilon_f(x)}{dx^2} \quad (25)$$

FBG 传感器两端面为自由端面,存在如(26)所示边界条件<sup>[4-13]</sup>

$$\epsilon_f(L) = \epsilon_f(-L) = 0 \quad (26)$$

公(25)难以得到解析解,为了求得解析解将方程(11)简化为

$$\epsilon_f(x) = \epsilon_x(0, r_a) \left[ 1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)} \right] \quad (27)$$

根据式(27),半平面体所受剪应力(12)简化为

$$\tau_{xr}(x, r_a) = \tau(x, r_a) = \frac{E_{eq}k\epsilon_x(0, r_a) \sinh(kx)}{\cosh(kL)} \quad (28)$$

对(28)中剪应力进行傅里叶变换,得到

$$\tau_{xr}(\lambda, r_a) = \frac{E_{eq}k\epsilon_x(0, r_a)f(\lambda, r_a)}{\cosh(kL)} \quad (29)$$

式中

$$f(\lambda, r_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L \sinh(kx) \sin(\lambda x) dx \quad (30)$$

利用式(29)和式(22),得

$$\epsilon_x(0, r_a) - \epsilon_{\infty} = -\frac{E_{eq}k\epsilon_x(0, r_a)}{\cosh(kL)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda f(\lambda, r_a)}{|\lambda|E_1} d\lambda \quad (31)$$

整理式(31),得  $\epsilon_x(0, r_a)$  的表达式为

$$\epsilon_x(0, r_a) = \frac{\epsilon_{\infty}}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda f(\lambda, r_a)}{|\lambda|E_1} d\lambda} = \frac{\epsilon_{\infty}}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{4}{\sqrt{2\pi}E_1} \int_0^{+\infty} f(\lambda, r_a) d\lambda} \quad (32)$$

由式(27)和(32)得到光纤应变(测量应变)为

$$\epsilon_f(x) = \frac{\epsilon_{\infty} \left[ 1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)} \right]}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda f(\lambda, r_a)}{|\lambda|E_1} d\lambda} = \frac{\epsilon_{\infty} \left[ 1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)} \right]}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{4}{\sqrt{2\pi}E_1} \int_0^{+\infty} f(\lambda, r_a) d\lambda} \quad (33)$$

根据式(33)得到 FBG 传感器应变传递率为

$$\eta(x) = \frac{\epsilon_f(x)}{\epsilon_{\infty}} = \frac{1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)}}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda f(\lambda, r_a)}{|\lambda|E_1} d\lambda} = \frac{1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)}}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{4}{\sqrt{2\pi}E_1} \int_0^{+\infty} f(\lambda, r_a) d\lambda} \quad (34)$$

测量应变为光纤各处应变的平均值,因此平均应变传递率为

$$\bar{\eta} = \frac{\int_{-L}^L \eta(x) dx}{2L} = \frac{1 - \frac{\sinh(kL)}{kL \cosh(kL)}}{1 + \frac{E_{eq}k}{\cosh(kL)} \frac{4}{\sqrt{2\pi}E_1} \int_0^{+\infty} f(\lambda, r_a) d\lambda} \quad (35)$$

根据式(28)和(32),得到剪应力表达式为

$$\tau_{xr}(x, r_a) = \frac{E_{eq}k\epsilon_x(0, r_m) \sinh(kx)}{\cosh(kL)} = \frac{\epsilon_{\infty} E_{eq}k \sinh(kx)}{\cosh(kL) + \frac{4E_{eq}k}{\sqrt{2\pi}E_1} \int_0^{+\infty} f(\lambda, r_a) d\lambda} \quad (36)$$

式(34)~(36)是积分形式解,求解相对困难,可以利用傅里叶变换,将无限域转化为有限域来求解,如

$$\eta(x) = \frac{1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)}}{1 + \frac{E_{eq}k}{E_1 \cosh(kL)} \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}L} \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n, r_a)} \quad (37)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1 - \frac{\sinh(kL)}{kL \cosh(kL)}}{1 + \frac{E_{eq}k}{E_1 \cosh(kL)} \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}L} \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n, r_a)} \quad (38)$$

$$\tau_{xy}(x, r_a) = \frac{\epsilon_{\infty} E_{eq} k \sinh(kx)}{\cosh(kL) + \frac{4E_{eq}k\pi}{E_1 \sqrt{2\pi}L} \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n, r_a)} \quad (39)$$

式中,  $\lambda_n = n\pi/L$  ( $n=1,2,3\cdots$ ).

当半平面体弹性模量远大于 FBG 传感器等效弹性模量,即  $E_{eq}/E_1 \approx 0$  时,式(37)和(38)简化为特解

$$\eta(x) = 1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL)} \quad (40)$$

$$\bar{\eta} = 1 - \frac{\sinh(kL)}{kL \cosh(kL)} \quad (41)$$

文中理论虽然是根据含有保护层的 FBG 传感器模型建立的,但是该理论是统一的理论,令  $r_f = r_p$  可以应用于无保护层的裸光纤 FBG 传感器.

利用式(38)得到的平均应变传递率对测量应变进行修正,用以提高测量精度,修正公式为

$$\epsilon_{\text{modified}} = \frac{\epsilon_{\text{measured}}}{\bar{\eta}} \quad (42)$$

式中,  $\epsilon_{\text{modified}}$  代表修正应变,  $\epsilon_{\text{measured}}$  代表测量应变,  $\bar{\eta}$  由式(38)得到.

## 2 理论验证和参数分析

### 2.1 有限元验证

利用 CAE 软件 Ansys 验证理论的正确性,根据对称性,取一半结构进行分析,使用一阶六面体单元,有限元模型见图 2.粘结长度 40 mm,半平面体的弹性模量依次取 2 000 MPa、3 000 MPa 和 5 000 MPa,其他参数见表 1.

表 1 材料属性  
Table 1 Material properties

|                      | Optical fiber | Coating | Adhesive |
|----------------------|---------------|---------|----------|
| Young's modulus /MPa | 72 000        | 2.55    | 4 000    |
| Thickness /mm        | 0.062 5       | 0.04    | 0.1      |
| Poisson ratio        | 0.17          | 0.48    | 0.3      |

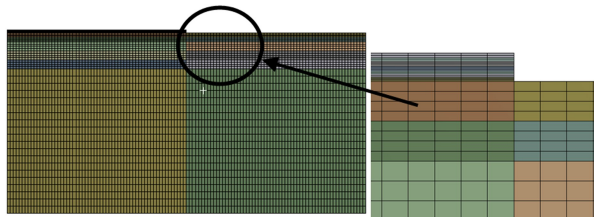


图 2 FBG 传感器有限元模型  
Fig.2 FEM of FBG Sensors

图 3 为由 CAE 软件 Ansys 计算得到的有限元(Finite element method, FEM)解、式(37)得到的双向耦合理论解和单向耦合理论解的对比图.从图 3 可以看出:双向耦合解、FEM 解和单向耦合解的变化趋势是相同的,均是光纤两端为 0,随着靠近光纤中心,应变传递率逐渐增大;但是,由于双向耦合理论考虑了半平面

体弹性模量的影响,因此针对不同弹性模量的被测结构具有不同的应变传递率;而单向耦合理论忽略了FBG传感器对被测结构应变的影响,因此针对不同弹性模量的被测结构只有一种应变传递率.同单向耦合理论解相比,双向耦合理论解与FEM解更为接近,具有更高的精度;被测结构弹性模量越低,单向耦合解与FEM解误差越大;由于双向耦合解考虑了FBG传感器与被测结构之间的双向耦合作用,不但保证了高模量被测结构的应变传递理论精度,还大大提高了低模量被测结构的应变传递理论精度,从而大大扩展了被测结构的范围.表2为平均相对误差表,由表2可以看出:双向耦合解与FEM解的平均相对误差要远小于单向耦合解与FEM的平均相对误差;同时,单向耦合理论解与FEM解的平均相对误差随被测结构弹性模量的降低是逐渐增大的,而双向耦合理论解与FEM解的平均相对误差较小,且比较稳定.因此,在被测结构是低模量材料时,必须考虑FBG传感器与被测结构之间的相互耦合作用,以提高应变测量精度.

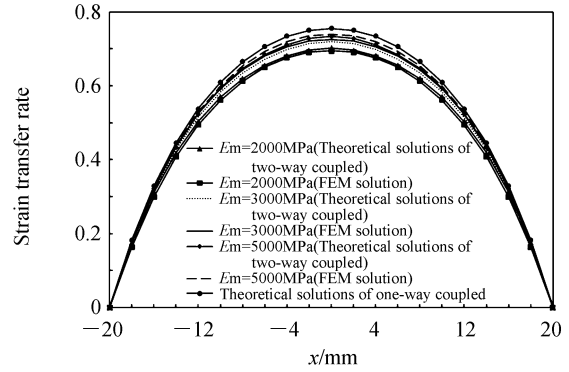


图3 理论解与有限元解的对比  
Fig.3 Comparison of FEM solution and theoretical solution

表2 平均相对误差  
Table 2 Average relative error

| Young's modulus/MPa | Two-way coupled | One-way coupled |
|---------------------|-----------------|-----------------|
| 2 000               | 2.12%           | 6.6%            |
| 3 000               | -1.39%          | 4.33%           |
| 5 000               | -0.71%          | 2.63%           |

### 2.2 实验论证

为验证所设计FBG传感器应变传递理论的正确性,利用文献[15]中的相关实验数据及参数和FEM解进行验证.表3为平均应变传递率理论解、测量数据和FEM解对照表,其中测量数据和FEM解均来自文献[15]中的表4,理论解是根据式(38)求得的.从表3可以看出:随着粘结长度的增大,平均应变传递率是变大的,且理论解、测量数据和FEM解的变化趋势相同,三者之间的误差较小;且与FEM解相比,理论解更接近测量数据;理论解与实验数据之间的误差除粘结长度为23 mm时的误差稍大外,其他误差都控制在4%以内.利用式(42)对测量数据修正后得到的修正应变非常接近真实应变,见表4.由此可见,文中提出的应变传递理论具有较高的精度、可以有效的修正测量应变,以达到提高FBG传感器测量精度的目的.

表3 平均应变传递率  
Table 3 Average strain transfer rate

| Bonding length/mm | Theoretical solution | Experimental data | FEM solution | Absolute error |
|-------------------|----------------------|-------------------|--------------|----------------|
| 23                | 79.59%               | 85.49%            | 76.89%       | 5.9%           |
| 33                | 85.77%               | 89.07%            | 84.18%       | 3.3%           |
| 44                | 89.33%               | 90.22%            | 87.78%       | 0.89%          |
| 54                | 91.31%               | 93.69%            | 90.1%        | 2.38%          |

表4 测量应变、修正应变和实际应变  
Table 4 Measured strain modified strain and actual strain

| Bonding length/mm | Measured strain/Actual strain | Modified strain/Actual strain |
|-------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 23                | 79.59%                        | 93.1%                         |
| 33                | 85.77%                        | 96.3%                         |
| 44                | 89.33%                        | 99.01%                        |
| 54                | 91.31%                        | 97.46%                        |

### 2.3 参数分析

利用式(37)~(39)对半平面体弹性模量、半粘结长度等参数对应变传递率、半平面体界面剪应力、平均应变传递率的影响进行分析.

图4(a)为不同半粘结长度下,应变传递率在粘结方向的分布曲线,图4(b)为不同半粘结长度下,平均应

变传递率随半平面体弹性模量的分布曲线.由图 4(a)可知,半粘结长度对应变传递率非常敏感,应变传递率随着半粘结长度的增加而逐渐增大,但增大的趋势逐渐减小;由图 4(b)可知,平均应变传递率也随着半粘结长度的增加而逐渐增大的,与图 4(a)相对应,同时,平均应变传递率随着半平面体的弹性模量逐渐增大,增大趋势逐渐减小.

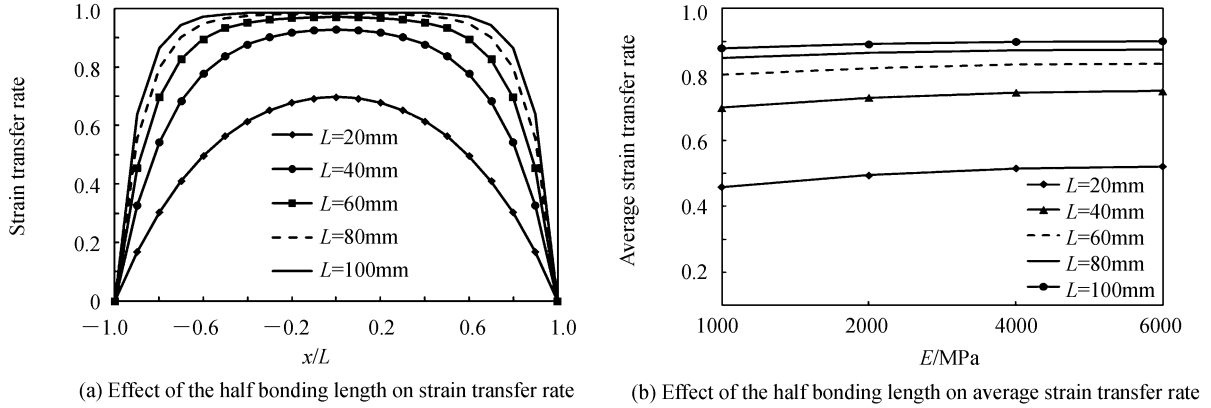


图 4 半粘结长度对应变传递率和平均应变传递率的影响

Fig.4 Effect of the half bonding length on strain transfer rate and average strain transfer rate

图 5(a)为不同半平面体弹性模量下,应变传递率在粘结方向的分布曲线,图 5(b)为不同半平面体弹性模量下,平均应变传递率随着半粘结长度的分布曲线.由图 5 可知,应变传递率与平均应变传递率均随着半平面体弹性模量、粘结长度的增大而逐渐增大;在半平面体弹性模量较低时,FBG 传感器的应变传递效果变差,因此在测量低模量结构时,必须考虑 FBG 传感器与被测结构之间的双向耦合作用.

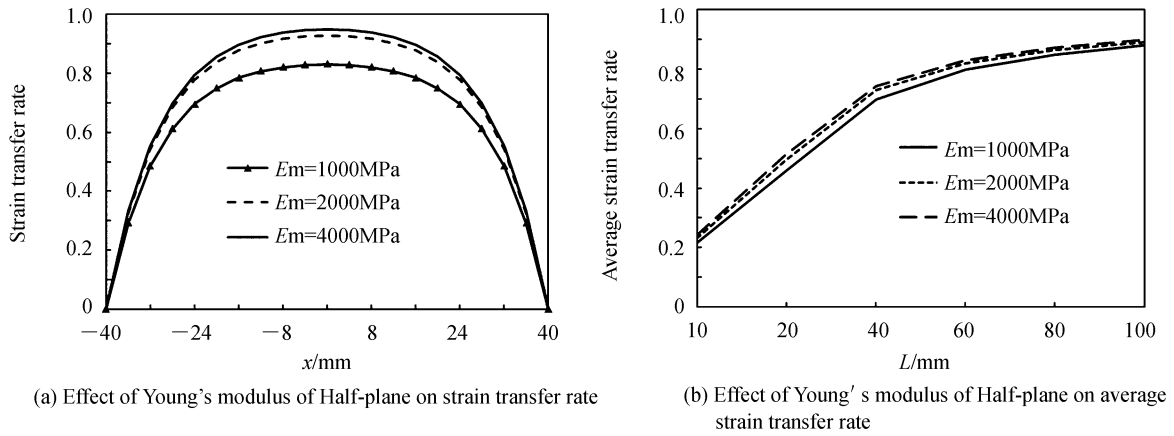


图 5 半平面体弹性模量对应变传递率和平均应变传递率的影响

Fig.5 Effect of Young's modulus of Half-plane on strain transfer rate and average strain transfer rate

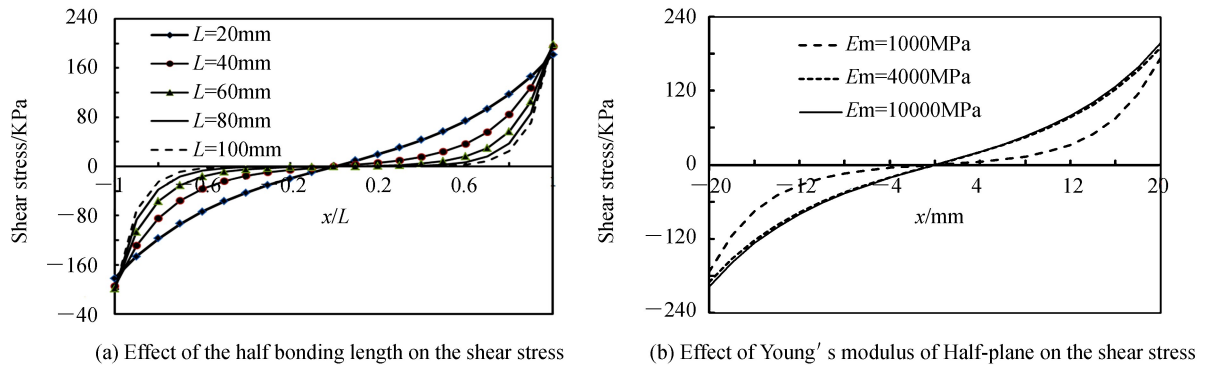


图 6 剪应力分布

Fig.6 Shear stress along the optical fiber

图 6(a)和图 6(b)为半平面体预应变  $\epsilon_\infty = 0.001$  时,不同半粘结长度、不同半平面体弹性模量下,FBG 传



感器与半平面体之间的界面剪应力在  $x$  方向分布曲线.由图 6 可知,剪应力是关于粘结中心点奇函数,且在粘结长度的两端区域最大,中心点最小;随着半粘结长度的增大和半平面体弹性模量的减小,剪应力趋于分布在 FBG 传感器的两端的区域;由图 6(b)可以得到,剪应力随着半平面弹性模量的增大而增大,应变传递率也随之增大;由于在两端存在结构突变,因此两端的剪应力存在奇异现象,剪应力急剧增大.

### 3 结论

利用弹性力学半平面理论,建立了粘贴于半平面体的 FBG 传感器与半平面体双向耦合的应变传递理论,讨论了半平面体实际应变与测量应变之间的关系,得到以下结论:

1) 随着 FBG 传感器半粘结长度的增加、半平面体弹性模量的增大,应变传递率和平均应变传递率均逐渐增大,具有更好的应变传递效果.2) FBG 传感器与半平面体之间的剪切力呈奇函数分布,越靠近两端,剪应力越大,由于粘结长度两端结构突变,造成剪应力奇异.3) 由于 FBG 传感器在测量半平面体应变时,会改变半平面体局部应变状态,使测量应变减小,特别是当半平面体弹性模量较低时,必须考虑 FBG 传感器与半平面体之间的双向耦合作用.

### 参考文献

- [1] XU Guo-quan, XIONG Dai-yu. Applications of fiber Bragg grating sensing technology in engineering [J]. *Chinese Optics*, 2013, **6**(3): 306-317.  
徐国权, 熊代余. 光纤光栅传感器技术在工程中的应用[J]. *中国光学*, 2013, **6**(3): 306-317.
- [2] CHANG Xin-long, LI Ming, WANG Wei-ping, *et al.* Analyses of parameters influencing strain transfer of embedded polymer optical fiber sensors [J]. *Laser & Infrared*, 2010. **40**(5): 515-519.  
常新龙, 黎明, 王渭平, 等. 埋入式聚合物光纤传感器应变传递影响参数分析[J]. *激光与红外*, 2010, **40**(5): 515-519.
- [3] ZHOU Zhi, LI Ji-long, OU Jin-ping. Interface strain transfer mechanism and error modification of embedded FBG strain sensors [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2006, **38**(1): 49-55.  
周智, 李冀龙, 欧进萍. 埋入式光纤光栅界面应变传递机理与误差修正[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2006, **38**(1): 49-55.
- [4] ANSARI F, YUAN L. Mechanics of bond and interface shear transfer in optical fiber Sensors [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, **12**(4): 385-394.
- [5] LI Qing-bin, LI Guang, WANG Guang-lun, *et al.* Elasto-plastic bonding of embedded optical fiber sensors in concrete [J]. *Journal of Engineering Mechanical*, 2002, **128**(4): 471-478.
- [6] LI Dong-sheng, LI Hong-nan. Strain transferring of embedded fiber Bragg grating sensors[C]. SPIE, 2005, **5765**: 1085-1093.
- [7] LI Dong-sheng, LI Hong-nan. Strain transferring analysis of embedded fiber Bragg grating sensors[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2005, **37**(4): 435-441.  
李东升, 李宏男. 埋入式封装的光纤光栅传感器应变传递分析[J]. *力学学报*, 2005, **37**(4): 435-441.
- [8] LI Dong-sheng, LI Hong-nan, REN Liang, *et al.* Strain transferring analysis of fiber Bragg grating sensors[J]. *Optical Engineering*, 2006, **45**(2): 02440.
- [9] WU Yong-hong, SHAO Chang-jiang, QU Wen-jun, *et al.* Nonlinear time dependent equation of light force transition of fiber optic grating strain[J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2011, **39**(1): 53-56.  
吴永红, 邵长江, 屈文俊, 等. 光纤光栅应变传感器光-力转换的非线性时变方程[J]. *同济学报(自然科学版)*, 2011, **39**(1): 53-56.
- [10] WU Yong-hong, SHAO Chang-jiang, QU Wen-jun, *et al.* Simplified time-dependant optical mechanical transformation equation for FBG strain sensors[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(7): 1965-1970.  
吴永红, 邵长江, 屈文俊, 等. 简化的光纤光栅应变传感器光-力转换的时变方程[J]. *光学学报*, 2010, **30**(7): 1965-1970.
- [11] LIU De-hua, JIN Wei-liang, ZHANG Yu-xiang. Strain transfer relationship between optical fiber sensor and structure matrix[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2006, **40**(11): 1847-1851.  
刘德华, 金伟良, 张玉香. 光纤传感器与结构基体的应变传递关系[J]. *浙江大学学报*, 2006, **40**(11): 1847-1851.
- [12] LIANG De-zhi, SUN Li, HUANG Chang-tie, *et al.* Comparison of strain transfer of embedded FBG sensors calculated by FEM and theory formula[J]. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, 2008, **24**(1): 72-76.  
梁德志, 孙丽, 黄昌铁, 等. 埋入式 FBG 传感器应变传递的有限元计算与理论分析比较[J]. *沈阳建筑大学学报*, 2008, **24**(1): 72-76.
- [13] WU Ru-jun, ZHENG Bai-lin, HE Peng-fei, *et al.* Influence of encapsulation structures for embedded fiber-optic Bragg grating sensors on strain measurement[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, **22**(1): 24-30.  
吴入军, 郑百林, 贺鹏飞, 等. 埋入式光纤布拉格光栅传感器封装结构对测量应变的影响[J]. *光学精密工程*, 2014, **22**

(1): 22-30.

- [14] 孙丽. 光纤光栅传感应用问题解析[M]. 北京: 科学技术出版社, 2011.
- [15] WAN K T, LEUNG C K Y, OLSON N G. Investigation of the strain transfer for surface-attached optical fiber strain sensors[J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, **17**(3): 035037.
- [16] WU Ru-jun, FU Kun-kun, ZHENG Bai-lin, *et al.* Error modification of FBG strain sensors bonded on plates[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2016, **24**(4): 747-755.  
吴入军, 付昆昆, 郑百林, 等. 粘贴于薄板表面的光纤布拉格光栅应变传感器误差修正[J]. 光学精密工程, 2016, **24**(4): 747-755.
- [17] 吴家龙. 弹性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1993.