

doi:10.3788/gzxb20164506.0627001

# 基于 M&M' 态的量子照明目标探测

徐世龙<sup>1,2</sup>, 胡以华<sup>1,2</sup>, 赵楠翔<sup>1,2</sup>, 李乐<sup>1,2</sup>, 郭力仁<sup>1,2</sup>

(1 电子工程学院 脉冲功率激光技术国家重点实验室, 合肥 230037)

(2 电子工程学院 电子制约技术安徽省重点实验室, 合肥 230037)

**摘要:**在目标回波光子仍为纯态的假设前提下, 推导了 M&M' 态的量子照明目标探测错误概率边界, 并与非纠缠 Fock 态、NOON 态进行了对比. 仿真结果表明: M&M' 态相对于非纠缠 Fock 态的探测优势仅受限于信号与闲置光路间光子数的分配比例; 这使得以 M&M' 态作为光源的量子照明探测, 能够在更大信噪比动态范围内(至少两倍于 NOON 态)获得优于非纠缠 Fock 态的目标探测性能.

**关键词:**量子信息; 量子感知; 量子纠缠; 量子照明; 路径纠缠 Fock 态; 目标探测

**中图分类号:** TN918; O431.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2016)06-0627001-5

## Target Detection of Quantum Illumination Based on M&M' State

XU Shi-long<sup>1,2</sup>, HU Yi-hua<sup>1,2</sup>, ZHAO Nan-xiang<sup>1,2</sup>, LI Le<sup>1,2</sup>, GUO Li-ren<sup>1,2</sup>

(1 State key Laboratory of Pulsed Power Laser, Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

(2 Key Laboratory of Electronic Restriction of Anhui Province, Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

**Abstract:** NOON states and M&M' states are both typical path-entangled Fock state. M&M' state is a new class of path-entangled photon Fock states which possesses photons in both path, and has been confirmed with a good performance in loss environment. In this paper, the detecting error-probability bound of quantum illumination based on M&M' state was derived under the assumption that the target echo photons are pure states, which was also compared with the error-bounds of Fock state and NOON state. The simulation results show that the error bounds of M&M' states are no longer limited by the total photon number, but influenced by the proportion of photon number between the signal path and the unused path. Therefore, the quantum illumination system with M&M' states can offer an enhanced performance over Fock state in a larger dynamic range of signal to noise ratio(at least double time of NOON states).

**Key words:** Quantum information; Quantum Sensing; Quantum entanglement; Quantum illumination; Path-entangled fock states; Target detection

**OCIS Codes:** 270.1670; 270.4180; 270.5585

## 0 引言

近年来,将量子理论应用于各类传统信息处理设备性能改进已经成为研究的热点. 量子光学与量子信息理论为目标探测技术带来了新的发展方向<sup>[1-3]</sup>. 2008 年 Lloyd 等在量子信道辨识理论的基础上,提出了用量子照明机理来判别在嘈杂和耗散环境中是否存在目标<sup>[4]</sup>,其利用纠缠光源产生的信号光子照射目标,目标回波与另一路闲置信号进行联合测量. 在这种工作机

理下,由于回波光子与闲置光子间存在纠缠,使得淹没背景噪声中的目标回波更容易被检测出来.

在量子照明机理的研究中,研究人员多以相干态与自发参量下转换(Spontaneous Parametric Down Conversion, SPDC)产生的高斯纠缠态作为比较对象,并以判别的错误概率作为对比参量结果;其基本过程为:由回波与闲置光的平均光子数得到回波与闲置光子态之间的 Wigner 分布协方差阵,并对其进行辛式对角化,通过量子切尔诺夫边界计算相应的错误概率上

**基金项目:**国家自然科学基金(No. 61271353)资助

**第一作者:**徐世龙(1988-),男,博士研究生,主要研究方向为空间光电技术. Email: xushi1988@yeah.net

**导师(通讯作者):**胡以华(1962-),男,教授,博士,主要研究方向为光电信息处理. Email: skl\_hyh@163.com

**收稿日期:**2015-10-12; **录用日期:**2016-01-27

<http://www.photon.ac.cn>

下边界<sup>[5-7]</sup>;结果表明,低亮度量子照明(利用连续波泵浦 SPDC 所产生的纠缠光子)比传统相干态更优. Guha<sup>[8]</sup> 提出利用光参量放大(Optical Parametric Amplification, OPA)接收的方式,在高噪声低亮度的条件下使错误概率降低 3dB,并在实验中得到了优于相干光 0.5dB 的结果<sup>[9]</sup>. 2009 年,Devi 等<sup>[10]</sup> 借助于纯最大纠缠态在信道辨别上的明显优势,对理想信道下(即不考虑环境损耗且目标反射率为 1 时),量子信道辨识最小错误概率的边界表达式进行了化简,并对 Fock 态与 NOON 态、相干态与高斯态的性能进行比较.

研究者们对于路径纠缠 Fock 态的研究表明,在信号光平均光子数比热噪声水平低的情况下,NOON 态的探测性能优于 Fock 态,当平均光子数较多时,这种优势消失.而在激光雷达技术中,研究人员总是希望能够尽可能多地发射光子来照射目标,而这又将使得路径纠缠所带来的优势不能得以体现.在量子干涉测量中,M&M' 态在恶劣的耗散环境中仍具有较好的探测能力<sup>[11-12]</sup>.作为另外一种路径纠缠 Fock 态,M&M' 态在量子照明体制中的探测性能还有待分析研究.为了解决 NOON 态在低信噪比探测环境才能体现其优势的问题,本文以 M&M' 态作为量子照明光源,在 Devi 的简化模型基础上,对理想信道下 M&M' 态量子照明的目标探测错误概率上下边界进行推导,并探讨其目标探测性能.

## 1 目标探测错误概率边界

在量子照明机理的目标探测中,以目标存在或不存在的信号光子传输过程作为两个信道,通过进行信道辨识达到感知目标有无的目的.以量子态  $\rho$  作为输入,目标探测信道辨识的基本假设分别为: $H_0$ :目标不存在,此时探测器所接收到的光子均为热噪声光子,用  $\rho_0 = \varphi_0(\rho)$  表示; $H_1$ :目标存在,此时探测器所接收到的光子为信号光子通过传输与目标反射所产生的回波光子和背景热噪声光子的叠加,用  $\rho_1 = \varphi_1(\rho)$  表示.

若向目标发射  $K$  次脉冲信号,相当于进行  $K$  次重复性测量.当两种假设出现的概率相当时,在最小容错量子态分辨的基础上,能够得到的最小探测误差概率为<sup>[13]</sup>

$$P_e^{(K)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \| \rho_1^{\otimes K} - \rho_0^{\otimes K} \|_1 \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_n \gamma_n^{(+)} \right) \quad (1)$$

式(1)中,  $\| A \|_1 = \text{Tr} \left[ \sqrt{A^+ A} \right]$ ,  $\{ \gamma_n^{(+)} \}$  为  $\rho_1^{\otimes K} - \rho_0^{\otimes K}$  的非负本征值.由于计算该本征值非常困难,因此研究人员以探测错误概率的边界值作为讨论对象.

量子信息理论中的量子切尔诺夫边界(Quantum

Chernoff Bound, QCB) 给出了信道辨识的最小错误概率上限

$$P_e^{(K)} \leq P_{e,\text{QCB}}^{(K)} \equiv \frac{1}{2} \left( \min_{0 \leq s \leq 1} \text{Tr} \left[ \rho_0^s \rho_1^{1-s} \right] \right)^K \quad (2)$$

该边界是指数收敛的,其下限为

$$P_e^{(K)} \geq P_{e,\text{LB}}^{(K)} \equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \text{Tr} \left[ \rho_0^{1/2} \rho_1^{1/2} \right]} \right)^K \quad (3)$$

由于该下限与  $s=1/2$  时的 Bhattacharyya 上限边界具有相似形式,本文主要讨论这两种边界.

文献[10]以理想信道与完全退化信道作为目标存在与不存在时的两种假设,信道辨识的边界可以得到进一步简化.当两类待辨识的量子态中,有一类态为纯态时(假设  $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$  为纯态),其量子 Chernoff 边界化简为

$$P_e^{(K)} \leq P_{e,\text{QCB}}^{(K)} = \frac{1}{2} \langle \psi_1 | \rho_0 | \psi_1 \rangle^K \quad (4)$$

按照化简后的边界计算方法,得 Fock 态与 NOON 态的错误概率边界为

Fock 态  $\rho = |n\rangle\langle n|$ :

$$P_{e,n}^{(K)} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\beta})^K e^{-\beta n} \quad (5)$$

式(5)中,热噪声的平均光子数  $N_B = e^{-\beta} / (1 - e^{-\beta})$ ,  $\beta = hf/kT$ ,  $h$  为普朗克常数,  $f$  为光子频率,  $K$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为背景温度<sup>[14]</sup>.

NOON 态  $|\psi_{\text{NOON}}^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |2n, 0\rangle + |0, 2n\rangle ]$  的上下

限分别为

$$P_{e,\text{QCB,NOON}}^{(K)} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta n} \left( \frac{\cosh(\beta n)}{2} \right)^K \quad (6)$$

$$P_{e,\text{LB,NOON}}^{(K)} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{e^{-\beta n} (1 - e^{-\beta})}{2} \cosh\left(\frac{\beta n}{2}\right) \right)^{2K}} \right] \quad (7)$$

式(7)中,Fock 态的平均光子数为  $n$ ;NOON 态泵浦光子数为  $n$ ,即单路的平均光子数为  $2n$  或  $0$ .对比式(5)、(6)可以得到,当  $\cosh(\beta n)/2 < 1$  时 NOON 态才能够得到优于 Fock 态的探测性能.当热噪声环境不变时, $\beta$  为一个确定的值,而双曲余弦函数在非负象限内是单调递增函数,若要满足  $\cosh(\beta n)/2 < 1$  的条件则光子数  $n$  就不能大于某一上限  $N_{\text{th}}$ .因此,在高信噪比环境下,具有纠缠特性的 NOON 态并不能表现出优于非纠缠态的探测能力.

## 2 基于 M&M' 态的量子照明

在光子数纠缠态中,M&M' 态表示信号光与闲置光两条路径中的平均光子数分别为  $m$  与  $m'$ ,NOON 态则视为其中的一种情况,即所有光子集中在同一光路中.作为比 NOON 态具有更广泛概念的光子数纠缠态,以 M&M' 态作为光源的量子照明能够实现怎样的探测能力需要探讨.

## 2.1 M&M' 态的产生

关于制备路径光子数纠缠态光场的理论和实验工作已有较多报道,研究人员利用单光子源,如 SPDC 和线性光学元件制备 NOON 态光场;非线性光学以及腔量子电动力学法制备 NOON 态<sup>[15]</sup>.

立足于 NOON 态制备方法的研究,在 M&M' 态被提出后不久, Glasser, Ryan T. 等就提出了以 NOON 态注入两个光参量放大器(OPA)的 M&M' 态制备方案<sup>[16]</sup>. 如图 1,该方法将 SPDC 产生的纠缠光子对入射到 50:50 的分束器(Beam Splitter, BS)中,产生  $N=2$  的 NOON 态,并分别入射到两个参数相同的 OPA,通过监测四个输出路径中外侧的两路光子,对内侧两路光子进行预选,得到 M&M' 态. 其中内侧两路光子分别被称为信号光与闲置光.

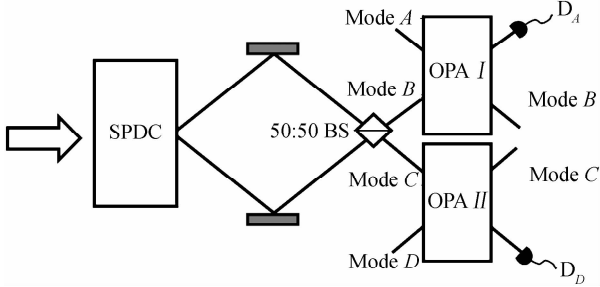


图 1 基于纠缠注入双 OPA 的 M&M' 态产生

Fig. 1 M&M' states generated from entanglement-seeded-dual OPA

当探测器  $D_A$  与  $D_D$  所探测得到的光子数相等时(假设皆为  $k$ ),则内侧的两路光子所得到的 M&M' 态即为:  $[|k+2, k\rangle + |k, k+2\rangle]/\sqrt{2}$ . 由于采用了  $N=2$  的纠缠光入射,因此所得到的 M&M' 态中两路光子数之差为 2. 若以更高光子数的 NOON 态入射则能够得到其他形式的 M&M' 态.

## 2.2 M&M' 照明目标探测错误概率

作为输入态的 M&M' 态表示为

$$|\psi_{M\&M'}^{SI}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|m, m'\rangle + |m'+m\rangle] \quad (8)$$

式中,  $m > m'$  且  $m + m' = 2n$ ,  $n$  为泵浦光光子数.

当目标不存在时,热噪声光子与闲置光子的联合测量所得到的量子态为

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_{th}(N_B) \otimes \text{Tr}_S[|\psi_{M\&M'}^{SI}\rangle\langle\psi_{M\&M'}^{SI}|] = \\ & \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_B^i}{(N_B+1)^i} |k\rangle\langle k| \right) \otimes \\ & \frac{1}{2}[|m\rangle\langle m| + |m'\rangle\langle m'|] \end{aligned} \quad (9)$$

当目标存在时,以理想的传输与目标反射作为前提,最终为全部信号光子与闲置光子的联合测量,即

$$\rho_1 = |\psi_{M\&M'}^{SI}\rangle\langle\psi_{M\&M'}^{SI}| \quad (10)$$

此处,  $\rho_1$  为纯态,因此计算上限时能够利用式(4)中的化简形式进行推导.

$$\begin{aligned} P_{e, QCB, M\&M'}^{(K)} &= \frac{1}{2} \left\{ \langle\psi_{M\&M'}^{SI} | \rho_{th}(N_B) \otimes \frac{1}{2}[|m\rangle\langle m| + |m'\rangle\langle m'|] | \psi_{M\&M'}^{SI}\rangle \right\}^K = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{N_B^m}{(N_B+1)^{m+1}} + \frac{N_B^{m'}}{(N_B+1)^{m'+1}} \right] \right\}^K = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4(N_B+1)} \left[ \frac{N_B^m}{(N_B+1)^m} + \frac{N_B^{m'}}{(N_B+1)^{m'}} \right] \right\}^K = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (1 - e^{-\beta}) e^{-\frac{\beta(m+m')}{2}} [e^{-\frac{\beta(m-m')}{2}} + e^{\frac{\beta(m-m')}{2}}] \right\}^K = \\ & \frac{1}{2} (1 - e^{-\beta})^K e^{-\frac{\beta(m+m')}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{\beta(m-m')}{2}\right) \right\}^K \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中  $(m+m')/2$  恰好为泵浦光平均光子数,与式(6)中的  $n$  对应. 此时式(11)与式(6)所不同的地方为双曲余弦函数中的参数. 当 NOON 态中的变量  $n$  被  $(m-m')/2$  取代时,与同样的 Fock 态相比, M&M' 态要达到更低的错误概率不再要求  $n$  必须低于某一上限,

只要  $(m-m')/2$  满足这个上限即可.

当满足  $\cosh(\beta(m-m')/2)/2 < 1$  的条件时,随着  $K$  的增加该误差概率呈指数级的下降. 而这样的过程同时受到了错误概率下限的约束. 在计算其下限时,首先需要计算  $\text{Tr}[\rho_0^{1/2} \rho_1^{1/2}]$ , 即

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\rho_0^{1/2} \rho_1^{1/2}] &= \langle\psi_{M\&M'}^{SI} | \rho_{th}^{1/2}(N_B) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}[|m\rangle\langle m| + |m'\rangle\langle m'|] | \psi_{M\&M'}^{SI}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{N_B^{m/2}}{(N_B+1)^{(m+1)/2}} + \frac{N_B^{m'/2}}{(N_B+1)^{(m'+1)/2}} \right] = \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_B+1}} [e^{-\beta m/2} + e^{-\beta m'/2}] = \sqrt{\frac{e^{-\beta(m+m')/2} (1 - e^{-\beta})}{2}} \cosh\left(\frac{\beta(m-m')}{4}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)带入式(3),得到 M&M' 态的误差概率 下限  $P_{e, LB, M\&M'}^{(K)}$  为

$$P_{e, LB, M\&M'}^{(K)} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \sqrt{\frac{e^{-\beta(m+m')/2} (1 - e^{-\beta})}{2}} \cosh\left(\frac{\beta(m-m')}{4}\right) \right)^{2K}} \right] \quad (13)$$

### 3 仿真分析

图 2 为  $\beta=0.05, N_B \approx 20$ , Fock 态光子数  $n=100$  或  $n=20$ , NOON 态与 M&M' 态总光子数均为  $2n$  且  $m-m'=0, 4n$  时三种量子态的探测概率边界. 其中实线表示 Fock 态的探测错误概率, 虚线为 NOON 态的上下边界, 点断线则表示 M&M' 态的上下边界.

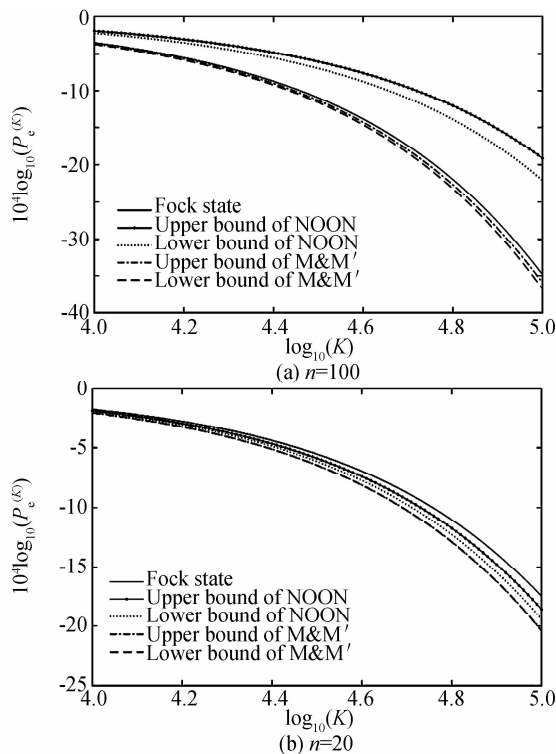


图 2 M&M' 态与 Fock 态, NOON 态量子照明错误概率边界  
 Fig. 2 Error-probability bounds of M&M', NOON and Fock states

以 NOON 态与 M&M' 态的上限为例, 在式(6)与式(11)中当双曲余弦函数取值小于 2 时, 就能够达到优于 Fock 态的效果, 即 NOON 态要求  $n < N_{th}$ , M&M' 态要求  $(m-m')/2 < N_{th}$ . 而在图 2 的仿真条件下, 当  $n=100$  时 NOON 态双曲函数的计算结果为  $74.2 \gg 2$ , 而 M&M' 态中的双曲函数计算结果为  $1.54 < 2$ . 因此在图 2 中可以明显看到, 在  $n=100$  即光子数较大时, NOON 态性能远不如 Fock 态, 而 M&M' 态则达到了优于 Fock 态的探测能力. 当  $n=20$  时, NOON 态与 M&M' 态的双曲函数均小于 2, 因此均达到了优于 Fock 态的探测效果.

图 3 为 M&M' 态的错误概率随光子分配比例  $(m-n)/n$  的变化曲线, 实线表示 Fock 态, 点断线表示 M&M' 的上下限. 图中当  $(m-n)/n=1$  时, 表示该 M&M' 态退化为 NOON 态. 随着光子数  $m$  在总光子数中所占比例的增加, M&M' 态探测误差逐渐增大最终达到与 NOON 态相同的水平. 图中上下限曲线与 Fock 态的两个交点 A、B 所代表的物理意义为, 在 A 点左侧

M&M' 态的错误概率上限均小于 Fock 态的错误概率, 即该范围内 M&M' 态严格优于 Fock 态. 同理, 在 B 点右侧则表示 M&M' 态严格劣于 Fock 态.

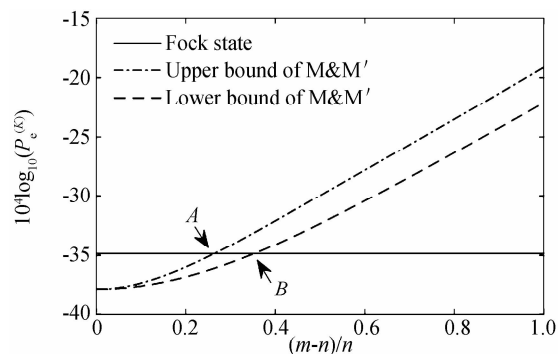


图 3 M&M' 态错误概率边界与光子分配比例的关系  
 Fig. 3 Relationship of error-probability bounds of M&M' states and photon distribution rate

这里令 M&M' 态的光子数分配比例  $(m-n)/n=a$ , 由于  $(m+m')=2n$  且  $m > m'$ , 则有  $0 < a < 1$  且  $(m-m')/2=an$ . 当背景噪声光子较强时, 可以认为  $\beta=1/N_B$ . 由双曲余弦函数取值小于 2 可推导出 NOON 态信号光平均光子数  $n < 1.317N_B$  即信噪比必须小于 1.317. 而 M&M' 态信号光平均光子数  $an < 1.317N_B$  即信噪比低于  $1.317/a$ . 由于系数  $0 < a < 1$ , 因此只要光源能够使参数  $a$  足够小, M&M' 态就能够在很高的信噪比时仍达到优于 Fock 态的探测能力.

对于 M&M' 态而言, 在总光子数为  $2n$  的条件下, 得到的光子数之差最大的态为  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2n-1, 1\rangle + |1, 2n-1\rangle)$ , 此时  $a=1-1/n$ ; 光子数之差最小的态为  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|n-1, n+1\rangle + |n+1, n-1\rangle)$ , 此时  $a=1/n$ . 在 2.1 节所述的 M&M' 态制备方法中, 得到的最小总光子数  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 1\rangle + |1, 3\rangle)$  为, 因而 M&M' 态的光子数分配比例  $a$  最大取值为 0.5. 这使得以 M&M' 态作为光源的量子照明探测, 在至少两倍于 NOON 态信噪比条件下仍能够获得优于 Fock 态的探测性能.

### 4 结论

针对 NOON 态不能在高信噪比条件下达到优于 Fock 态的目标探测概率这一问题, 本文通过推导 M&M' 态的探测错误概率边界, 对其在量子照明机理下的目标探测性能进行了分析. 研究表明, M&M' 态相对于 Fock 态的探测优势不再受到总光子数的限制, 而是受到光子分配比例的影响, 这使得利用 M&M' 态作为光源进行量子照明, 能够在更大的信噪比动态范围内达到优于 Fock 态的目标探测性能. 但是由于目前光子数纠缠光源还不能产生足够多的纠缠光

子<sup>[17-18]</sup>,因此距离实现能够体现  $M\&M'$  态优势的较高信噪比( $M\&M'$  态总光子数至少大于  $2.634N_0$ ) 目标探测,仍有一定差距.本文研究使量子照明不再局限在低信噪比的工作条件下,为进一步发展量子照明目标探测系统提供了参考.

#### 参考文献

- [1] KUMAR P, GRIGORYAN V, VASILYEV M. Noise-free amplification: towards quantum laser radar[C]. 14th Coherent Laser Radar Conference, Snowmass, Colorado. 2007: 9-13.
- [2] ALLEN E H, KARAGEORGIS M. Radar systems and methods using entangled quantum particles: U. S. Patent 7,375,802[P]. 2008-5-20.
- [3] LANZAGORTA M. Quantum radar[J]. *Synthesis Lectures on Quantum Computing*, 2011, **3**(1): 1-139.
- [4] LLOYD S. Enhanced sensitivity of photo detection via quantum illumination[J]. *Science*, 2008, **321**(5895): 1463-1465.
- [5] TAN S H, ERKMEN B I, GIOVANNETTI V, *et al.* Quantum illumination with Gaussian states [J]. *Physical review letters*, 2008, **101**(25): 253601.
- [6] SHAPIRO J H, LLOYD S. Quantum illumination versus coherent-state target detection[J]. *New Journal of Physics*, 2009, **11**(6): 063045.
- [7] GUHA S, ERKMEN B I. Gaussian-state quantum-illumination receivers for target detection[J]. *Physical Review A*, 2009, **80**(5): 052310.
- [8] MOURADIAN S L, WONG F N, SHAPIRO J H. Improved target-detection signal-to-noise ratio via quantum illumination [C]. CLEO: QELS Fundamental Science. Optical Society of America, 2013: QF1B. 1.
- [9] DEVI A R U, RAJAGOPAL A K. Quantum target detection using entangled photons[J]. *Physical Review A*, 2009, **79**(6): 062320.
- [10] HUVER S D, WILDFEUER C F, DOWLING J P. Entangled Fock states for robust quantum optical metrology, imaging, and sensing[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(6): 063828.
- [11] SMITH III J F. Quantum interferometer and radar theory based on  $N00N$ ,  $M$  and  $M$  or linear combinations of entangled states [C]. SPIE Defense, Security, and Sensing. International Society for Optics and Photonics, 2010: 77020I-77020I-13.
- [12] HELSTROM C W. Quantum detection and estimation theory [M]. Academic press, New York, 1976.
- [13] 李景镇. 光学手册[M]. 西安:陕西科技出版社,1986:p75.
- [14] XIAO Xiao-qi. Study on theory and method of precision measurement based on correlation optics [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2013, 31-33.  
肖骁琦. 基于关联光学的精密测量理论和方法研究[D]. 上海交通大学, 2013, 31-33.
- [15] GLASSER R T, CABLE H, DOWLING J P, *et al.* Entanglement-seeded-dual optical parametric amplification: applications to quantum communication, imaging, and metrology[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(1):1-6.
- [16] YAN Qiu-rong, ZHAO Bao-sheng, ZHANG Hua, *et al.* Optical Quantum random number generator based on parity of the number of photons detected in equal time intervals[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, **44**(6): 0627003-1-5.  
鄢秋荣, 赵宝升, 张华, 等. 等时间间隔内光子数奇偶随机性的光量子随机源[J]. 光子学报, . 2015, **44**(6): 0627003-1-5.
- [17] SUN Xin-mei, ZHA Xin-wei. A scheme of bidirectional quantum controlled teleportation via six-qubit maximally entangled state [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, **42**(9): 1052-1056.  
孙新梅, 查新未. 基于六粒子最大纠缠态的双向控制隐形传态方案[J]. 光子学报, 2013, **42**(9):1052-1056.