

doi: 10.3788/gzxb20164502.0226002

# 无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥的聚焦特性

谢晓霞, 纪佳位, 王硕琛, 吴逢铁

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021)

**摘 要:** 基于 Mathieu-Hankel 波理论分析了 Mathieu 光束经轴棱锥后的聚焦特性, 并利用菲涅尔衍射积分理论及稳相法, 推导出 Mathieu 光束经轴棱锥后的准确解析表达式. 数值模拟了无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥线性聚焦后的光场在不同传播距离处的截面光强分布及轴上光强分布. 理论分析及数值模拟均表明无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥聚焦后会产生周期性 Mathieu 光束. 研究结果对扩展 Mathieu 光束的应用范围提供了理论依据.

**关键词:** 物理光学; 周期 Mathieu 光束; 稳相法; 衍射理论; 轴棱锥; Mathieu Hankel 波理论

中图分类号: O439

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2016)02-0226002-5

## The Focusing Characteristics of Mathieu Beam Propagating through Axicon

XIE Xiao-xia, JI Jia-wei, WANG Shuo-chen, WU Feng-tie

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, Xiamen, Fujian 361021, China)

**Abstract:** Based on the Mathieu-Hankel wave's theory, the focusing characteristics of Mathieu beam propagating through axicon was analyzed. By Fresnel diffraction theory and the method of stationary phase, the optical fields' formula of Mathieu beam propagating through the axicon was deduced, the transverse intensity distribution in difference propagation distances was numerical simulated. The theoretical analysis and numerical simulation both show that the Mathieu beam passing through axicon can generate periodic Mathieu beam. This result has provided a theoretical basis in application of Mathieu beam.

**Key words:** Physical optics; Periodic Mathieu beam; Method of stationary phase; Diffraction theory; Axicon; Mathieu Hankel wave's theory

**OCIS Codes:** 260.1960; 050.1960; 080.2730; 080.3630

## 0 引言

无衍射贝塞尔 (Bessel) 光是由 J. Durnin<sup>[1]</sup> 等人 1987 年首次提出, 由于它在光学领域的广泛应用使其成为国内外学者研究的热点, 事实上, Durnin 提出的无衍射 Bessel 光束只是无衍射光束家族中的一员, 2005 年 J. C. Gutierrez-vega<sup>[2]</sup> 小组提出自由空间的标量波动方程能在直角坐标系、圆柱坐标系、椭圆柱坐标系和抛物柱坐标系等四组坐标系下进行分离变量求得无衍

射解. 通过在这四个不同的坐标系下求解标量亥姆赫兹方程得到四类无衍射光束, 无衍射 Cosine 光束对应直角坐标系下的无衍射光束解, 无衍射 Bessel 光束对应圆柱坐标下的解, 无衍射 Mathieu 光束<sup>[3]</sup> 对应椭圆柱坐标系下的解, 无衍射 Parabolic<sup>[4]</sup> 光束对应抛物柱坐标下的解. Durnin 首次报道无衍射 Bessel 后, 在其后的十几年间人们对无衍射 Bessel 光束的产生方法和传输特性进行了大量研究<sup>[5-10]</sup>, 但对其他几种无衍射光束的研究较少. 2000 年 J. C. Gutierrez-Vega 小组报道了

**基金项目:** 国家自然科学基金 (No. 611178015)、福建省科技创新平台计划项目 (No. 2012H2002) 和泉州市科技重点项目 (No. 2014Z127) 资助

**第一作者:** 谢晓霞 (1991-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为光束传输与变换. Email: 964335077@qq.com

**导师 (通讯作者):** 吴逢铁 (1958-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学等. Email: fengtie@hqu.edu.cn

**收稿日期:** 2015-08-19; **录用日期:** 2015-10-29

<http://www.photon.ac.cn>

一种新的无衍射光束——Mathieu 光束<sup>[3]</sup>, 并利用环缝和透镜组合的光学系统产生近似零阶无衍射 Mathieu 光束<sup>[11]</sup>. 目前国内对无衍射 Mathieu 光束研究很少, 2007 年文伟<sup>[12]</sup>等人对无衍射 Mathieu-Gauss 光束的传输进行了相关理论研究. 2014 年, 李冬等<sup>[13]</sup>提出了一种基于轴棱锥产生零阶近似无衍射 Mathieu 光束的新方法并报道了 Mathieu 光束的自重建特性. 无衍射 Mathieu 光束可被用于非线性光学<sup>[14]</sup>、光学微操作<sup>[15]</sup>、光通信等领域<sup>[16]</sup>.

轴棱锥是由 Meleod<sup>[17]</sup>在 1954 年首次提出, 这种光学元件在纵向焦深范围内具有分辨率高的特点, 且具有将一个点光源成像在沿光轴的一条焦线上的线聚焦特性, 因此在实际应用中得到广泛使用. 本文课题组曾用轴棱锥产生了多种无衍射光束, 并于 2013 年研究了轴棱锥对无衍射 Bessel 光束的线聚焦特性, 得到具有塔尔博特效应的局域空心光束<sup>[18]</sup>. 然而, 轴棱锥对其他几种无衍射光束的聚焦特性目前尚无报道.

本文对无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥的聚焦特性进行了理论和数值模拟, 基于 Mathieu-Hankel 波理论分析了 Mathieu 光束经轴棱锥后的聚焦特性. 利用菲涅尔衍射积分理论, 导出了 Mathieu 光束经轴棱锥后的解析表达式, 数值模拟了 Mathieu 光束经轴棱锥后的轴上光强分布, 以及在不同传播距离处的截面光强分布, 观察光束经轴棱锥聚焦过程.

## 1 Hankel 波理论分析周期性 Mathieu 光束形成过程

自由空间中标量波动方程可以表示为

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

在椭圆柱坐标系下, 令  $U = S(\xi)W(\eta)Z(z)$  并分离变量, 得到

$$S''(\xi) + (2q \cosh 2\xi - a)S(\xi) = 0 \quad (2)$$

$$W''(\eta) + (a - 2q \cos 2\eta)W(\eta) = 0 \quad (3)$$

$$Z''(z) + mZ(z) = 0 \quad (4)$$

由上式解得式(1)的两组线性无关解为

$$U_{e_m}(\xi, \eta, z; q) = U_0 He_m^{(1),(2)}(\xi) ce_m(\eta; q) \exp(ik_z z) \\ m = 0, 2, 4, 6 \dots$$

$$U_{o_m}(\xi, \eta, z; q) = U_0 Ho_m^{(1),(2)}(\xi) se_m(\eta; q) \exp(ik_z z) \\ m = 1, 3, 5, 7 \dots \quad (5)$$

式中  $ce_m(\eta; q)$  和  $se_m(\eta; q)$  分别是  $m$  阶偶角 Mathieu 函数和奇角 Mathieu 函数,  $k_z$  是波矢的轴向分量类,  $He_m^{(1)}(\xi; q) ce_m(\eta; q) \exp(ik_z z)$  可表示沿轴线向外传播的椭圆锥面波(OCW),  $He_m^{(2)}(\xi; q) ce_m(\eta; q) \exp(ik_z z)$  可表示沿轴线向内传播的椭圆锥面波(ICW),  $He(\xi)$  和  $Ho(\xi)$  为 Mathieu-Hankel 函数, 可以表示为

$$He_m^{(1),(2)}(\xi; q) = \begin{cases} J_{o_m}(\xi; q) + iN_{o_m}(\xi; q) \\ J_{e_m}(\xi; q) - iN_{e_m}(\xi; q) \end{cases} \quad (6)$$

$$Ho_m^{(1),(2)}(\xi; q) = \begin{cases} J_{o_m}(\xi; q) + iN_{o_m}(\xi; q) \\ J_{o_m}(\xi; q) - iN_{o_m}(\xi; q) \end{cases} \quad (7)$$

式中  $J(\xi; q)$  和  $N(\xi; q)$  分别代表第一类径向和第二类径向 Mathieu 函数, 式中  $H(\xi; q)$  的上标(1)对应“+”表示第一类 Mathieu-Hankel 函数, 上标(2)对应“-”表示第二类 Mahtieu-Hankel 函数. 下标  $e_m$  和  $o_m$  表示  $m$  阶偶模和奇模.

本文将分析偶模 Mathieu-Hankel 波, 对于奇模 Mathieu-Hankel 波可用类似的方法进行分析.

$$[He_m^{(1)}(\xi; q) + He_m^{(2)}(\xi; q)] ce_m(\eta; q) \exp(ik_z z) \cdot \\ [J_{e_m}(\xi; q) + iN_{e_m}(\xi; q) + J_{e_m}(\xi; q) - iN_{e_m}(\xi; q)] \times \\ ce_m(\eta; q) \exp(ik_z z) = 2J_{e_m}(\xi; q) ce_m(\eta; q) \cdot \\ \exp(ik_z z) \quad (8)$$

式(8)为沿径向  $\xi$  的正方向传播的第一类偶 Mathieu-Hankel 椭圆波  $He_m^{(1)}(\xi; q)$  与沿径向  $\xi$  的负方向传播第二类偶 Mathieu-Hankel 椭圆波  $He_m^{(2)}(\xi; q)$  叠加产生  $m$  阶偶无衍射 Mathieu 光束.

当  $m=0$  时, 式(8)表示为

$$[He_0^{(1)}(\xi; q) + He_0^{(2)}(\xi; q)] = 2J_{e_0}(\xi; q) \cdot \\ ce_0(\eta; q) \exp(ik_z z) \quad (9)$$

式(9)表示入射锥面波 ICW 和出射锥面波 OCW 相互重叠的区域将产生零阶无衍射 Mathieu 光束, 如图 1.

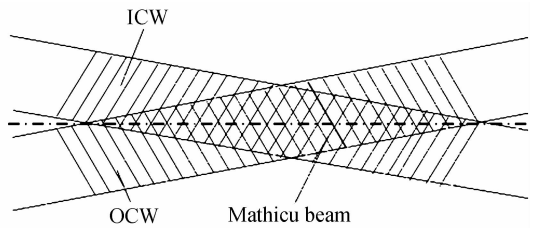


图 1 用 Hankel 波描述 Mathieu 光束形成示意图  
Fig. 1 Schematic of Mathieu beam based on the Mathieu-Hankel wave's theory

由几何光学分析, 无衍射 Mathieu 光束通过轴棱锥将产生两束不同波矢的 Hankel 波进行叠加, 即由  $ICW_1$  和  $OCW_1$  产生波矢为  $k_1$  的 Mathieu 光束与由  $ICW_2$  和  $OCW_2$  产生波矢为  $k_2$  的 Mathieu 光束叠加, 如图 2 中的菱形区域 abcd 和 aefg, 两菱形区域重叠部分即为两束不同波矢的 Mathieu 光束叠加产生周期性的 Mathieu 光束.

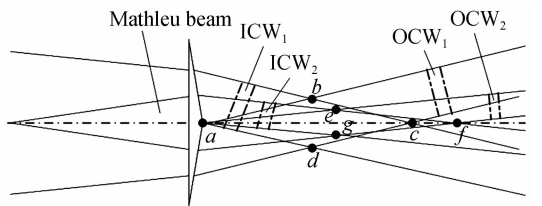


图 2 用 Hankel 波描述周期 Mathieu 光束形成示意图  
Fig. 2 Schematic of periodic Mathieu beam based on the Mathieu-Hankel wave's theory

产生的周期 Mathieu 光束的周期  $T_T =$

$|2\pi/(k_{z1}-k_{z2})|$ 与两束 Mathieu 光束的纵向波矢有关。其中,纵向波矢分量  $k_{z1} = \sqrt{k_1^2 - k_{r1}^2}$ ,  $k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_{r2}^2}$ ,  $k_{r1} = k_1(n-1)(\gamma+\beta)$ ,  $k_{r2} = k_2(n-1)(\gamma-\beta)$ , 波数  $k_1 = k_2 = 2\pi/\lambda$ 。

## 2 周期性 Mathieu 光束的理论表达式

在自由空间中,任意一种无衍射光场都可以用 Helmholtz 方程的 Whittaker 解表达<sup>[19]</sup>,即

$$u(x, y, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} A(\varphi) \cdot \exp[ik_r(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))] d\varphi \quad (10)$$

式中,  $k_r$  和  $k_z$  分别是波矢的径向和轴向分量,  $A(\varphi)$  是复角谱分布,当  $A(\varphi)$  取不同的分布时,可以得到不同的无衍射光波场。

椭圆柱坐标系下,当  $A(\varphi)$  取不同阶数的偶(奇)模角 Mahtieu 函数  $ce_n(\varphi; q)$  ( $se_n(\varphi; q)$ ) 可以得到相对应的 Mathieu 光束。角 Mahtieu 函数  $ce_n(\varphi; q)$ ,  $se_n(\varphi; q)$  可被傅里叶展开为

$$\begin{cases} ce_{2n}(\varphi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q) \cos(2j\varphi) \\ ce_{2n+1}(\varphi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2n+1)}(q) \cos[(2j+1)\varphi] \\ se_{2n+2}(\varphi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}^{(2n+2)}(q) \sin[(2j+2)\varphi] \\ se_{2n+1}(\varphi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}^{(2n+1)}(q) \sin[(2j+1)\varphi] \end{cases} \quad (11)$$

式中椭圆率参数  $q = h^2 k^2 / 4$ , 系数  $A_{2j}^{(2n)}(q)$ ,  $A_{2j+1}^{(2n+1)}(q)$ ,  $B_{2j+2}^{(2n+2)}(q)$ ,  $B_{2j+1}^{(2n+1)}(q)$  是 Mathieu 函数的展开系数。

将式(11)带入式(10)中,并利用积分公式

$$\int_0^{2\pi} \exp\{i[-z \cos(\varphi - \theta) - n\varphi]\} d\varphi = 2\pi(-i)^n \exp(-in\theta) J_n(z) \quad (12)$$

及公式  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ , 解得

$$\begin{cases} uc_{2n}(\rho, \theta, z = 0; q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q) (-1)^j \cdot \cos(2j\theta) J_{2j}(k_r \rho) \\ uc_{2n+1}(\rho, \theta, z = 0; q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2n+1)}(q) (i)^{2j+1} \cdot \cos[(2j+1)\theta] J_{2j+1}(k_r \rho) \\ us_{2n+2}(\rho, \theta, z = 0; q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}^{(2n+2)}(q) (-1)^{2j+2} \cdot \sin[(2j+2)\theta] J_{2j+2}(k_r \rho) \\ us_{2n+1}(\rho, \theta, z = 0; q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}^{(2n+1)}(q) (-1)^{2j+1} \cdot \sin[(2j+1)\theta] J_{2j+1}(k_r \rho) \end{cases} \quad (13)$$

从式(13)看出 Mathieu 光束可以展开为一系列的 Bessel 函数的叠加,其中  $uc_m$  和  $us_m$  分别表示 Mathieu 光束的偶模和奇模,  $\rho, \theta, z$  是柱坐标变量,  $k_r$  是波矢  $\mathbf{k}$

的径向分量,  $J$  是第一类 Bessel 函数。

则初始平面处零阶偶模 Mathieu 光场可以表示为

$$u_0(\rho, \theta, z = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q) (-1)^j \cdot \cos(2j\theta) J_{2j}(k_r \rho) \quad (14)$$

根据菲涅尔衍射积分理论,无衍射 Mathieu 光束入射轴棱锥后的衍射光场在圆柱坐标系下可以表示为

$$u_{out}(r, \varphi, z) = \frac{\exp(ik_z z)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik_r r^2}{2z}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q) (-1)^j \cos(2j\theta) J_{2j}(k_r \rho) \times \exp(-ika\rho) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi))\right] \rho d\rho d\theta \quad (15)$$

式中  $T(\rho) = \exp[-ika\rho]$  是轴棱锥的振幅透过率函数,其中  $a = (n-1)\gamma$ ,  $\gamma$  是轴棱锥的底角,  $n$  是轴棱锥的折射率,  $\lambda$  是入射光波的波长,波数  $k = 2\pi/\lambda$ 。

利用欧拉公式将  $\cos(2j\theta)$  展开为

$$\cos(2j\theta) = \frac{\exp(i2j\theta) + \exp(-i2j\theta)}{2} \quad (16)$$

移项整理得到

$$u_{out}(r, \varphi, z) = \frac{\exp(ik_z z)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik_r r^2}{2z}\right) \sum_{j=0}^{\infty} [A_{2j}^{(2n)}(q) \cdot (-1)^j \int_0^{\infty} \rho J_{2j}(k_r \rho) \exp\left[ik\left(\frac{\rho^2}{2z} - ika\rho\right)\right] \cdot \int_0^{2\pi} \exp\left[-ik\left(\frac{\rho r \cos(\theta - \varphi)}{z}\right)\right] \cdot \frac{\exp(i2j\theta) + \exp(-i2j\theta)}{2} d\theta d\rho] \quad (17)$$

利用公式<sup>[19]</sup>

$$\exp[i z \cos(\theta)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) \exp(ik\theta) \quad (18)$$

将式(11)化简为

$$u_{out}(r, \varphi, z) = \frac{\exp(ik_z z)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik_r r^2}{2z}\right) \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)}(q) \cdot (-1)^j \cos(2j\theta) \int_0^{\infty} \rho J_{2j}(k_r \rho) \times J_{2j}\left(\frac{-k\rho r}{z}\right) \cdot \exp\left[ik\left(\frac{\rho^2}{2z} - a\rho\right)\right] \times d\rho \quad (19)$$

再利用稳相法<sup>[20-21]</sup>求出稳相点  $\rho = az$ , 从而求得式(19)的析解式为

$$u_{out}(r, \theta, z) = -ika \sqrt{2\pi \frac{z}{k}} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp[-ikza^2] \sum_{j=0}^{\infty} [A_{2j}^{(2n)}(q) (-1)^j \cdot J_{2j}(-kar) J_{2j}(k_1 za)] \quad (20)$$

## 3 周期性 Mathieu 光束的数值模拟

根据式(20),利用计算机对 Mathieu 光束经轴棱锥后的轴上光强和在不同传播距离处的截面光强分布进行模拟。以零阶 Mathieu 光束为例,光源采用 He-Ne 激光器  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $k_r = k(n-1)\beta$ ,  $\beta = 1^\circ$ 。轴棱锥折射

率  $n=1.458$ , 底角  $\gamma=2^\circ$ , 得到图 3~5 的光强分布.

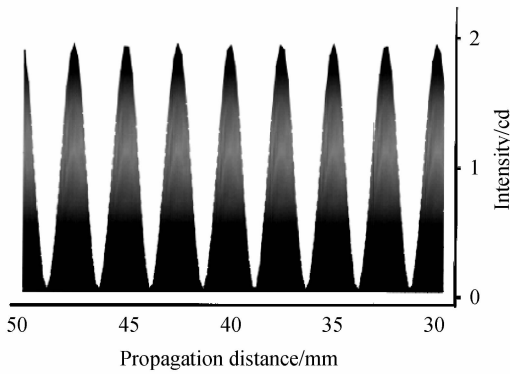


图 3 轴上光强分布

Fig. 3 Intensity distribution along propagation distance

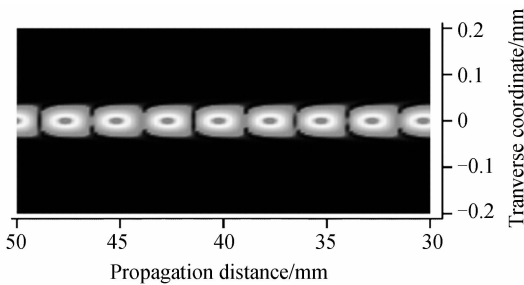


图 4 径向光强分布

Fig. 4 Radial intensity distribution

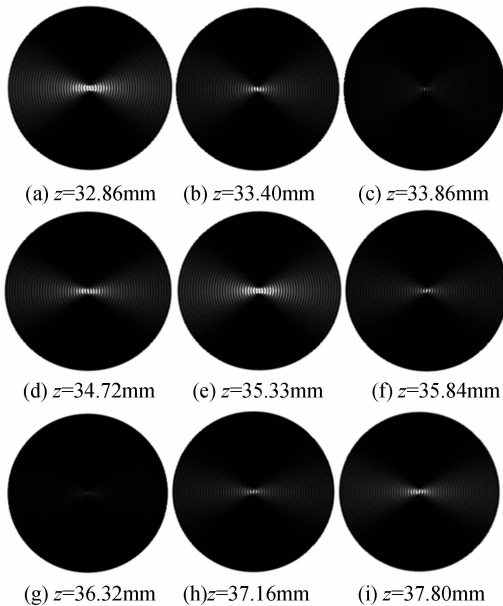


图 5 数值模拟不同传播距离处的截面光强分布

Fig. 5 Numerical simulation of transverse intensity distributions in different propagation position

图 3 和图 4 分别为 Mathieu 光束经轴棱锥后轴上光强传播图的径向光强分布, 从图 3 和图 4 可以看出无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥聚焦后其轴上及径向光强分布呈现有规则的周期性分布, 即无衍射 Mathieu 光束经轴棱锥聚焦后产生周期性 Mathieu 光束.

图 5 为 Mathieu 光束经轴棱锥后在不同传播距离

处的截面光强分布, 由图 5 可以清楚地看到两个周期内 (32.86 mm~35.33 mm) 和 (35.33 mm~37.80 mm) 的光斑图, 这两个周期的光斑图都重复着相同的光强变化过程, 即从轴上光强极大到轴上光强极小再恢复到最初光强极大变化的整个过程. 从图中可以看出一个周期 Mathieu 光束的周期为 2.47mm, 另一方面通过计算, 理论上得到周期性的 Mathieu 光束重建的空间周期为  $Z_T = |2\pi/(k_{z1} - k_{z2})| = 2.47$  mm, 理论计算与数值模拟结果一致.

## 4 结论

本文研究了轴棱锥对无衍射 Mathieu 光束的影响, 利用 Mathieu-Hankel 波理论分析了 Mathieu 光束经轴棱锥后的聚焦特性, 通过菲涅尔衍射积分理论及稳相法导出了 Mathieu 光束经轴棱锥后的解析表达式, 并利用计算机对其光强进行数值模拟; 观察 Mathieu 光束经轴棱锥后的光场的变化及其传播过程. 理论与数值结果均表明无衍射 Mathieu 经轴棱锥后会产生周期性的 Mathieu 光束, 研究结果对扩展 Mathieu 光束的应用范围提供了理论依据, 使得 Mathieu 光束在多层光学微操作、光学测量、光通信等领域的应用更加简便灵活.

### 参考文献

- [1] DURNIN J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1987, **4**(4): 651-654.
- [2] GUTIERREZ-Vega J C, BANDRES M A. Helmholtz-gauss waves[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, **22**(2): 289-298.
- [3] GUTIERREZ-Vega J C, ITURBE-Castillo M D, CHAVEZ-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams[J]. *Optics Letters*, 2000, **25**(20):1493-1495.
- [4] BANDRES M A, GUTIERREZ-Vega J C. Parabolic nondiffracting optical wave fields[J]. *Optics Letters*, 2004, **29**(1):44-46.
- [5] SUN Chuan, HE Xi, LIN Bing-fu, *et al.* Effect of the light source coherence on the maximum diffraction free distance of the Bessel beam[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, **44**(2): 0208001.  
孙川, 何西, 林炳福, 等. 光源相干度对 Bessel 光最大无衍射距离的影响[J]. *光子学报*, 2015, **44**(2):0208001
- [6] HE Xi, WU Feng-Tie, LI Pan, *et al.* Self-reconstruction of high-order Bessel beams generated by green LED light source [J]. *Science China*, 2015, **36**(1): 014202.  
何西, 吴逢铁, 李攀, 等. 绿光 LED 产生高阶 Bessel 光的自再现, *中国科学*, 2015, **36**(1):014202.
- [7] WANG Hai-yan, CHEN Chuan-lin, DU Jia-lei, *et al.* Propagation of bessel-gaussian beam with optical vortices in turbulent atmosphere[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, **42**(05): 505-510.  
王海燕, 陈川琳, 杜家磊, 等. 贝塞尔高斯涡旋光束在大气湍流中的传输特性[J]. *光子学报*, 2013, **42**(05):505-510.
- [8] VAIYT P, RUSCH L. Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam[J]. *Optics Letters*, 2015, **40**(4): 597-600.

- [9] XIE Xiao-xia , WANG Shuo-chen, WU Feng-tie. Diffraction optical fields of the Bessel beam through elliptical annular aperture[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, **64**(12): 124201.  
谢晓霞,王硕琛,吴逢铁. Bessel 光束经椭圆环形孔径后的衍射光场[J]. *物理学报*, 2015, **64**(12):124201.
- [10] JIANG Yue-song, ZHANG Xin-gang, WANG Shuai-hui, *et al.* Propagation of partially coherent bessel-gaussian beams in non-kolmogorov turbulence [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(1): 7-12.  
江月松,张新岗,王帅会,等. 部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流中的传输特性[J]. *光子学报*, 2014, **43**(1):7-12.
- [11] GUTIERREZ -Vega J C, ITURBE-Castillo M D, CHAVEZ-Cerda S, *et al.* Experimental demonstration of optical Mathieu beams[J]. *Optics Communications*, 2001, **195**(1-4): 35-40.
- [12] WEN wei, The focal shift and focal switch of Mahtieu Beam and of Mahtieu-Gaussian Beam [D]. Hunan: Central SouthUniversity, 2007.  
文伟. 无衍射马丢光束和马丢-高斯光束的焦移和焦开关[D]. 湖南:中南大学, 2007.
- [13] LI Dong, WU Feng-tie, XIE Xiao-xia. A novel method for generating qausi-non-diffracting mahtieu beam based on axicon[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(15): 15240101-15240105.  
李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. *物理学报*, 2014, **63**(15):152401-152405.
- [14] CHAFIQ A, NEBDI H, BELAFHAL A. Beam shape coefficients and scattering of zeroth order mathieu beam by homogeneous sphere[J]. *Physical & Chemical News*, 2014, **74**: 01-09.
- [15] ALPMANN C, BOWMAN R, WOREDEMANN M, *et al.* Mathieu beams as versatile light moulds for 3D micro particle assemblies[J], *Optics Express*, 2010, **18**(25): 26084-26091
- [16] BELAFHAL A, CHAFIQ A, HRICHA Z. Scattering of Mathieu beams by a rigid sphere[J]. *Optics Communications*, 2011, **284**(12): 3030-3035
- [17] MCLEOD J H. The axicon: a new type of optical element [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1954, **44**(8):592-597.
- [18] DU Tuan-Jie, WANG Tao, WU Feng-tie. Line focusing characteristics of axicon illuminated by non-diffracting Bessel beam[J] *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(13): 134103.  
杜团结,王涛,吴逢铁. 轴棱锥对无衍射光束的线聚焦特性[J]. *物理学报*, 2013, **62**(13): 134103.
- [19] HRICHA Z, CHAFIQ A, BELAFHAL A. A detailed study of Mathieu - Gauss beams propagation through an apertured ABCD optical system[J]. *Optics Communications*, 2006, **265**(2): 594-602.
- [20] BURVALL A. Axicon imaging by scalar diffraction theory [D]. Stockholm: Department of Microelectronics and Information Technology, 2004. 17-19.
- [21] 羊国光,宋菲君. 高等物理光学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社. 2008:74-76.