

doi: 10.3788/gzxb20164511.1127002

# 光场算符 $n$ 次幂叠加激发混沌场的量子特性

卢道明

(武夷学院 机电工程学院, 福建 武夷山 354300)

**摘要:**构造了光场算符  $n$  次幂叠加激发混沌场,采用数值计算方法研究了该量子态的压缩效应、反聚束效应和统计性质,讨论了混沌场平均光子数、算符叠加系数及其幂次  $n$  对量子特性的影响. 研究结果表明:光场算符  $n$  次幂叠加激发混沌场不呈现压缩效应,但呈现出反聚束效应和亚泊松分布性质,并且随平均光子数增大,它的反聚束效应和亚泊松分布性质减弱;随着算符组合部分中产生算符的比重增大,光场反聚束效应和亚泊松分布性质增强;随着算符幂次增大,亚泊松分布性质加强.

**关键词:**量子光学;光场算符  $n$  次幂叠加;混沌场;压缩效应;反聚束效应;亚泊松分布

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2016)11-1127002-5

## Quantum Properties of the State via Operation of Superposition of Photon Subtraction $n$ Times and Addition $n$ Times on Chaotic Field

LU Dao-ming

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

**Abstract:** Superposition of photon subtraction and addition  $n$  times excited chaotic field was constructed. Using numerical methods, the squeezing, antibunching effect and statistical property of the quantum state were analyzed. The influences of the average photon number of chaotic field, superposition coefficient of operators and times of operators operation on its quantum properties were discussed. Numerical results show that the squeezing is not displayed, while the antibunching effect and sub-poissonian statistical property are displayed. Further, its antibunching effect and sub-poissonian statistical property are weakened with increase of average photon number of chaotic field. Its antibunching effect and sub-poissonian statistical property are strengthened as the ratio of photon operator addition in superposition operation increases. On the other hand, its sub-poissonian distribution property is strengthened with increase of times of operators operation.

**Key words:** Quantum optics; Superposition of photon subtraction  $n$  times and addition  $n$  times; Chaotic field; Squeezing effect; Antibunching effect; Sub-poissonian distribution

**OCIS Codes:** 270.0270; 270.5585; 030.0030; 030.5290

## 0 引言

光场量子态的构建及其量子特性的研究是量子光学领域的重要课题之一. 利用量子力学的态叠加原理构建新型量子态,以及利用光场算符作用产生新型量子态,是构建量子态的两种有效途径. 1991年 Agarwal 和 Tara 首次引入光子激发相干态<sup>[1]</sup>,并研究了它的压缩效应、统计性质和准几率分布,开创了算符作用方法产生新型量子态的先河. 在此基础上,研究者们对算符作用方法进行了推广,提出了利用光场算符一次作用、重复多次作用、产生算符和湮没算符先后作用以及算

符叠加作用产生新型量子态的方案. 例如, Ren 等构建了光子增加压缩态,并讨论了它的非经典效应<sup>[2]</sup>; Xu 等将粒子数算符重复作用到压缩真空态上,构建了新的量子态,并研究了该量子态的统计性质<sup>[3]</sup>. 在算符作用相干态方面,蓝海江等研究了多光子激发相干态的 Wigner 函数<sup>[4-7]</sup>;在算符叠加作用方面, Lee 等建议光场算符叠加  $ta^+ + ra$  作用将经典态转变为非经典态,并且提出了实现光场算符叠加  $ta^+ + ra$  操作的实验方案<sup>[8]</sup>;在算符作用混沌场方面, Xu 等研究了产生算符和湮没算符先后作用于混沌场的量子特性<sup>[11-14]</sup>. 目前,研究者们已开展了实现不同算符操作的实验研

基金项目:福建省自然科学基金(No. 2015J01020)资助

第一作者:卢道明(1963-),男,教授,硕士,主要研究方向为量子光学. Email:daominglu79@hotmail.com.

收稿日期:2016-06-15;录用日期:2016-08-23

<http://www.photon.ac.cn>

究<sup>[15-17]</sup>,其中,Zavatta 等成功实现了单光子激发相干态的制备<sup>[15]</sup>,Lee 等提出了  $a^{+2} + e^{i\varphi}b^{+2}$  的实验方案<sup>[16]</sup>. 但光场算符  $n$  次幂叠加  $ra^n + sa^{+n}$  ( $n \geq 2$ ) 作用产生新型量子态的研究还未见报道. 为此,本文将光场算符  $n$  次幂叠加  $ra^n + sa^{+n}$  作用在混沌场上,构造了光场算符  $n$  次幂叠加激发混沌场,并研究了该量子态的压缩效应、反聚束效应、亚泊松分布等性质,讨论了混沌场平均光子数、算符叠加系数和重复作用次数  $n$  对量子特性的影响.

## 1 光场算符 $n$ 次幂叠加激发混沌场的构建

描述温度  $T_0$  的混沌光场密度算符为

$$\rho_0 = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda a^\dagger a} \quad (1)$$

式中,  $\lambda = \frac{\hbar\omega}{k_B T_0}$ ,  $k_B$  为玻尔兹曼常量,  $\omega$  为角频率. 光场平均光子数为

$$\bar{n} = (e^\lambda - 1)^{-1} = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T_0}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (2)$$

即  $e^\lambda = 1 + 1/\bar{n}$ .

为了构建光场算符  $n$  次幂叠加  $ra^n + sa^{+n}$  激发混沌场,将光场叠加算符  $ra^n + sa^{+n}$  作用到混沌光场上,作用结果为

$$\rho = N(ra^n + sa^{+n})e^{-\lambda a^\dagger a}(r^* a^{+n} + s^* a^n) \quad (3)$$

式中,  $\rho$  表示新构建量子态的密度算符,  $N$  为归一化常量,叠加系数  $r$  和  $s$  满足  $|r|^2 + |s|^2 = 1$ . 式(3)表明,新构建量子态的密度算符由四项叠加构成. 其中,  $a^n e^{-\lambda a^\dagger a} a^{+n}$  为负二项式光场<sup>[18]</sup>,具有非经典效应,因此,可预见新构建的量子态也具有非经典效应. 为简单起见,设  $r, s$  均为实数. 利用密度算符求迹,可求出  $N$ , 即

$$\begin{aligned} \text{tr}\rho &= N \int \frac{d^2z}{\pi} \langle z | (ra^n + sa^{+n})e^{-\lambda a^\dagger a} \times \\ & \quad (r^* a^{+n} + s^* a^n) | z \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\text{tr}$  表示求迹,  $|z\rangle$  表示相干态. 利用算符公式

$$\begin{cases} e^{\lambda a^\dagger a} a e^{-\lambda a^\dagger a} = e^{-\lambda} a \\ e^{\lambda a^\dagger a} a^\dagger e^{-\lambda a^\dagger a} = e^\lambda a^\dagger \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda a^\dagger a) |z\rangle &= \exp\left[-\frac{|z|^2}{2}(1 - e^{-2\lambda})\right] \cdot \\ & \quad |e^{-\lambda}z\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

以及积分公式

$$\begin{cases} \iint \frac{d^2z}{\pi} z^* n z^k \exp(\lambda |z|^2) = \delta_{n,k} (-1)^{k+1} k! \lambda^{-(k+1)} \\ \iint \frac{d^2z}{\pi} \exp(-\lambda |z|^2 + sz + \eta z^*) = \frac{1}{\lambda} \exp(s\eta/\lambda) \end{cases} \quad (7)$$

求得

$$N^{-1} = \frac{n!}{(1 - e^{-\lambda})^{n+1}} (r^2 e^{-n\lambda} + s^2) \quad (8)$$

式中,取  $n=1$ ,则  $N^{-1} = \frac{1}{(1 - e^{-\lambda})^2} (r^2 e^{-\lambda} + s^2)$ ,与文献<sup>[19]</sup>结果一致.

## 2 压缩效应

为了研究新构建量子态的压缩效应,定义光场的两个正交分量为

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \\ F_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) \end{cases} \quad (9)$$

由于  $[F_1, F_2] = \frac{i}{2}$ ,因此它们满足测不准关系,即

$$(\Delta F_1)^2 (\Delta F_2)^2 \geq \frac{1}{16} \quad (10)$$

如果满足

$$(\Delta F_i)^2 = \langle F_i^2 \rangle - \langle F_i \rangle^2 < \frac{1}{4}, \quad (i=1,2) \quad (11)$$

则称光场  $F_i$  ( $i=1,2$ ) 分量被压缩.

定义压缩参量

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{4} [\langle a^2 + a^{+2} \rangle + 2\langle a^\dagger a \rangle] - \frac{1}{4} \langle a + a^\dagger \rangle^2 \\ Y_2 = \frac{1}{4} [-\langle a^2 + a^{+2} \rangle + 2\langle a^\dagger a \rangle] + \frac{1}{4} \langle a - a^\dagger \rangle^2 \end{cases} \quad (12)$$

那么,  $Y_i < 0$  ( $i=1,2$ ) 表示  $F_i$  分量被压缩. 利用式(3), 不难推导出

$$\begin{cases} \langle a \rangle = \text{tr}(a\rho) = \langle a^\dagger \rangle = 0 \\ \langle a^\dagger a \rangle = N \left[ r^2 \frac{(n+1)! e^{-(n+1)\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^{n+2}} + \frac{s^2 n! (n + e^{-\lambda})}{(1 - e^{-\lambda})^{n+2}} \right] \\ \langle a^2 \rangle = \langle a^{+2} \rangle = 0 \\ Y_1 = Y_2 = \frac{1}{2} \langle a^\dagger a \rangle > 0 \end{cases} \quad (13)$$

所以,光场不呈现压缩效应.

## 3 反聚束效应

光场的二阶关联函数描述了光场的聚束和反聚束效应,定义为

$$g^2 = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \quad (14)$$

定义  $G = g^2 - 1$ . 那么,  $G < 0$  和  $G > 0$  分别表示光场呈现反聚束效应和聚束效应. 利用式(3)可得

$$\begin{cases} \langle a^{+2} a^2 \rangle = N \left\{ r^2 e^{-(n+2)\lambda} \frac{(n+2)!}{(1 - e^{-\lambda})^{n+3}} + s^2 \times \right. \\ \left. \left[ \frac{n(n-1)n!}{(1 - e^{-\lambda})^{n+1}} + \frac{2n(n+1)! e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^{n+2}} + \frac{(n+2)! e^{-2\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^{n+3}} \right] \right\} \\ \langle a^\dagger a \rangle = N \left[ r^2 \frac{(n+1)! e^{-(n+1)\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^{n+2}} + s^2 \frac{n! (n + e^{-\lambda})}{(1 - e^{-\lambda})^{n+2}} \right] \end{cases} \quad (15)$$

将  $r^2 = 1 - s^2$  代入式(15), 得出

$$\begin{cases} \langle a^{+2} a^2 \rangle = N \frac{n!}{(1-e^{-\lambda})^{n+3}} \{ (n+2)(n+1)e^{-(n+2)\lambda} + \\ s^2 [n(n-1)(1-e^{-\lambda})^2 + 2n(n+1)e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda}) + \\ (n+2)(n+1)e^{-2\lambda}(1-e^{-n\lambda})] \} \\ \langle a^+ a \rangle = N \frac{n!}{(1-e^{-\lambda})^{n+2}} \{ (n+1)e^{-(n+1)\lambda} + \\ s^2 [n(1-e^{-(n+2)\lambda}) + e^{-\lambda}(1-e^{-n\lambda})] \} \end{cases} \quad (16)$$

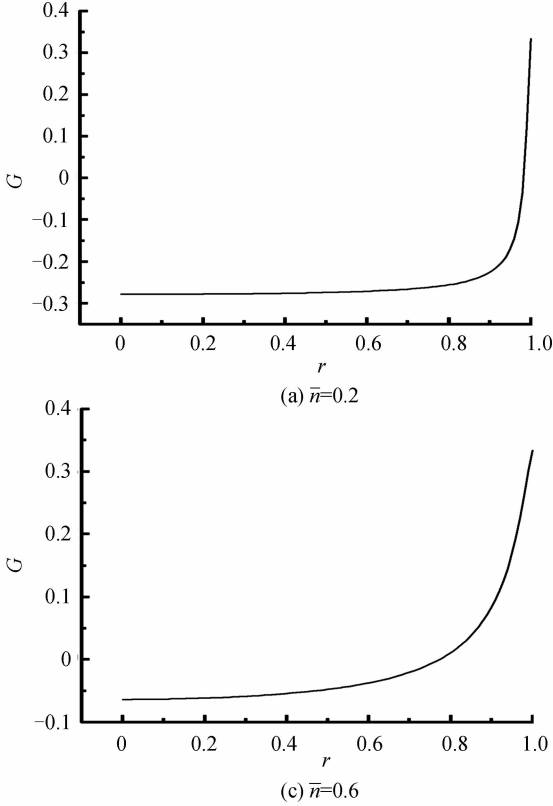


图 1  $G$  随参量  $r$  的演化

Fig. 1 The evolution of  $G$  with parameter  $r$

的混沌场,  $\exp[\hbar\omega/(k_B T_0)] = 1 + 1/\bar{n}$ ,  $\bar{n}$  越大, 混沌场温度  $T_0$  越高, 因此, 其非经典性质越弱; 2) 从  $G$  随  $r$  的演化曲线可见, 随  $r$  的增大, 即算符叠加部分中湮没算符重复作用的比重增加,  $G$  值不断增大, 光场的反聚束效应减弱, 表明算符  $n$  次幂叠加中, 增大产生算符重复作用的比重, 即增大  $s$ , 对增强光场的反聚束效应有利. 由式(16)可知,  $\langle a^{+2} a^2 \rangle$  随  $s^2$  增大, 而  $\langle a^+ a \rangle^2$  随  $s^2$  和  $s^4$  增大, 表明随着  $s^2$  增大,  $g^2$  减小, 光场的反聚束效应增强. 此处  $n \geq 2$  的研究结果与文献[19]中  $n=1$  的研究结果一致.

为了讨论算符重复作用次数  $n$  对光场反聚束效应的影响, 混沌场平均光子数  $\bar{n}=0.4$ , 算符幂次  $n=2, 3, 4$  时, 二阶关联函数  $G$  随叠加系数  $r$  的演化曲线如图 2. 图中显示在  $r < 0.7$  区域, 随着算符重复作用次数  $n$  的增大, 反聚束效应深度减小, 表明反聚束效应减弱.

结合式(15)和式(14), 可对二阶关联函数  $G$  进行数值计算. 图 1 描绘了混沌场平均光子数  $\bar{n}$  分别取 0.2、0.4、0.6、0.8, 算符幂次  $n=2$  时, 二阶关联函数  $G$  随叠加系数  $r$  的演化曲线. 比较图 1(a)~(d), 发现: 1) 随混沌场平均光子数  $\bar{n}$  增大, 二阶关联函数  $G$  负值的深度和呈现负值的区域均减小,  $\bar{n}$  大于一定值后, 负值区域消失, 意味着随混沌场平均光子数逐渐增大, 光场的反聚束效应逐渐减弱, 直至消失, 这是因为对于经典

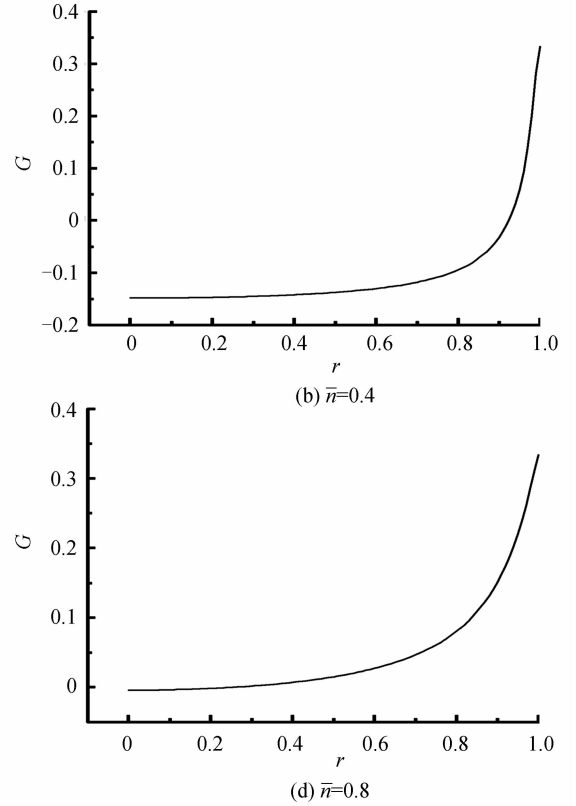


图 2 不同算符重复作用次数  $n$  时  $G$  随参量  $r$  的演化

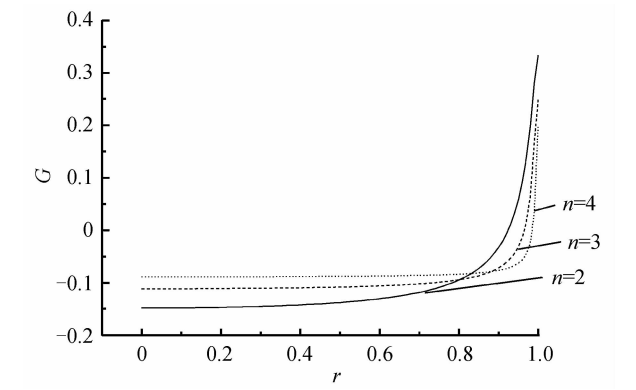


图 2 不同算符重复作用次数  $n$  时  $G$  随参量  $r$  的演化

## 4 光场的统计性质

Mandel  $Q$  参量反映了光场的统计性质, 定义为

$$Q = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle} - 1 = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle} \quad (17)$$

$Q=0, Q>0, Q<0$  分别表示光场呈现泊松分布、超泊松分布和亚泊松分布。

将式(15)代入式(17), 可对 Mandel  $Q$  参量进行数值计算. 算符重复作用幂次  $n=2$  时, 计算结果如图 3. 从图 3 可看出, Mandel  $Q$  参量演化行为与二阶关联函数  $G$  的演化行为类似, 光场算符  $n$  次幂叠加激发混沌

场呈现亚泊松分布. 随着混沌场平均光子数  $\bar{n}$  逐渐增大, 光场的亚泊松分布逐渐减弱, 直至消失. 这也是因为对于混沌场,  $\bar{n}$  越大, 混沌场温度  $T_0$  越高, 因此, 其非经典性质越弱. 另一方面, 随着叠加系数  $r$  的增大, 光场的亚泊松分布减弱. 这表明算符  $n$  次幂叠加中增大产生算符重复作用的比重, 对增强光场的亚泊松分布有利. 同样地, 此处  $n \geq 2$  的研究结果与文献[19]中  $n=1$  的结果一致.

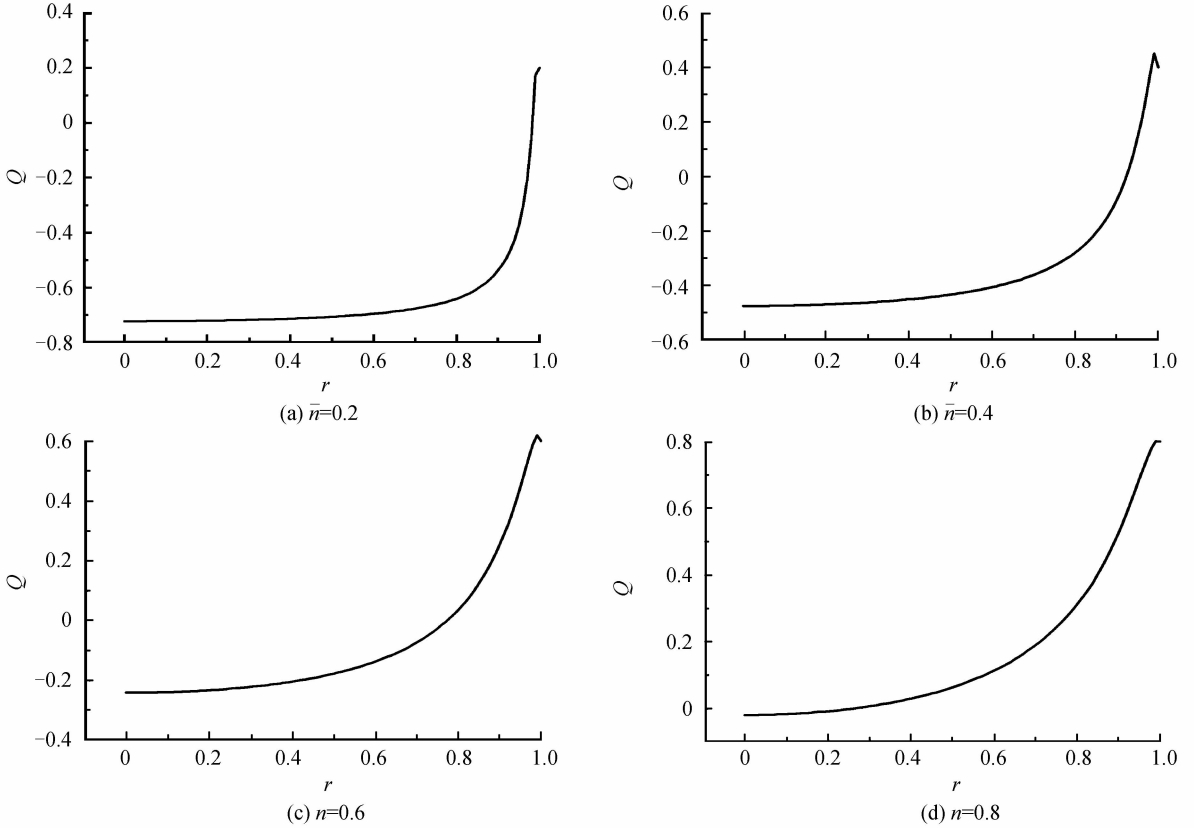


图 3  $Q$  随参量  $r$  的演化  
Fig. 3 The evolution of  $Q$  with parameter  $r$

进一步讨论算符重复作用次数  $n$  对光场统计性质的影响. 同样地, 取混沌场平均光子数  $\bar{n}=0.4$ , 算符幂次  $n=2, 3, 4$  时, Mandel  $Q$  参量随叠加系数  $r$  的演化曲线如图 4. 从图中可看出, 随着算符重复作用次数  $n$  增

大, 曲线负值深度和呈现负值区间都增大, 表明光场的亚泊松分布增强.

### 5 结论

将光场湮没算符  $n$  次幂和产生算符  $n$  次幂叠加  $ra^n + sa^{+n}$  作用在混沌场上, 构造了光场算符  $n$  次幂叠加激发混沌场. 数值计算结果表明, 该量子态不呈现压缩效应, 但呈现出反聚束效应和亚泊松分布性质. 二阶关联函数和 Mandel  $Q$  参量的演化曲线表明, 随着混沌场平均光子数的增大, 曲线负值深度和负值区间减小, 反聚束效应和亚泊松分布性质减弱; 随着叠加系数  $r$  的增大, 二阶关联函数和 Mandel  $Q$  参量的值逐渐增大,  $r$  大于一定值后它们的值大于零, 表明随叠加系数  $r$  的增大, 光场的反聚束效应和亚泊松分布性质减弱. 因此, 叠加算符作用中选择较小的  $r$  值, 即增大算符叠加部分中产生算符的比重, 对增强光场的反聚束效应

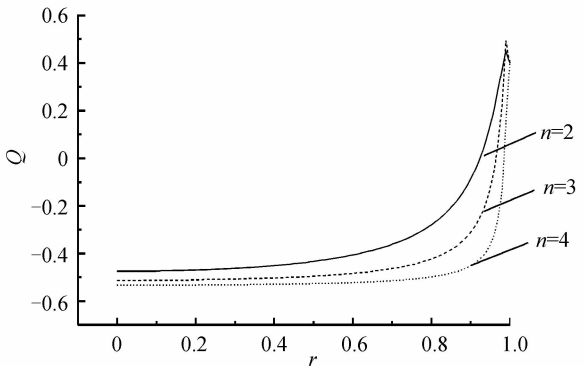


图 4 不同算符重复作用次数  $n$  时  $Q$  随参量  $r$  的演化  
Fig. 4 The evolution of  $Q$  with parameter  $r$  for different  $n$

和亚泊松分布性质有利. 另一方面, 为了使构建的量子态具有较强的量子特性, 应选择较小的  $r$  值. 在这种情况下, 随着算符重复作用次数  $n$  的增大, 反聚束效应减弱, 亚泊松分布性质增强.

#### 参考文献

- [1] AGARWAL G S, TARA K. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state[J]. *Physical Review A*, 1991, **43**(1): 492-497.
- [2] REN G, MA J G, DU J M, *et al.* Non-classical properties of photon-added compass state [J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2014, **53**(3): 856-869.
- [3] XU X X, YUAN H C, ZHOU L. Nonclassicality generated by repeatedly operating photon-annihilation-then-creation and creation-then annihilation on squeezed vacuum [J]. *Optics Communications*, 2015, **335**: 133-139.
- [4] LAN Hai-jiang, PANG Hua-fu, WEI Lian-fu. Wigner functions of multiple-photon excited coherent states[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(12): 8281-8288.  
蓝海江, 庞华锋, 韦联福. 多光子激发相干态 Wigner 的函数[J]. *物理学报*, 2009, **58**(12): 8281-8288.
- [5] GU Y W, SHI G D, SUN Y Q, *et al.* Nonclassical properties of multiple-photon-added two-mode squeezed coherent states [J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2014, **53**(5): 1784-1796.
- [6] ZHOU J, SONG J, YUAN H, *et al.* The statistical properties of a new type of photon-subtracted squeezed coherence state [J]. *Chinese Physics Letters*, 2012, **29**(5): 050301.
- [7] MENG Xiang-guo, WANG Ji-suo, LIANG Bao-long. Phase properties for the photon-added even and odd coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 721-726.  
孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 增光子奇偶相干态的相位特性[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 721-726.
- [8] LEE S Y, NHA H. Quantum state engineering by a coherent superposition of photon-subtraction and addition[J]. *Physical Review A*, 2010, **82**(5): 053812.
- [9] LI H, GUO Q, JIANG L Y, *et al.* M times photon subtraction-addition coherent superposition operated odd-schrodinger-cat state: nonclassicality and decoherence [J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2015, **54**(8): 2952-2968.
- [10] LEE S Y, JI S W, KIM H J, *et al.* Enhancing quantum entanglement for continuous variables by a coherent superposition of photon subtraction and addition[J]. *Physics Review A*, 2011, **84**: 012302.
- [11] XU X X, YUAN H C, WANG Y. Comparison between photon annihilation-then-creation and photon creation-then annihilation thermal states: non-classical and non-gaussian properties[J]. *Chinese Physics B*, 2014, **23**(7): 070301.
- [12] ZHOU J, FAN H Y, SONG J. Photon-subtracted two-mode squeezed thermal state and its photon-number distribution [J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2012, **51**(5): 1591-1599.
- [13] XU X X, HU L Y, FAN H Y. Photon-added squeezed thermal states: statistical properties and its decoherence in a photon-loss channel[J]. *Optics Communications*, 2010, **283**(9): 1801-1809.
- [14] HU L Y, XU X X, WANG Z S, *et al.* Photon-subtracted squeezed thermal state: nonclassicality and decoherence[J]. *Physical Review A*, 2010, **82**: 043828.
- [15] ZAVATTAA A, PARIGI V, KIM M S, *et al.* Experimental demonstration of the bosonic commutation relation via superpositions of quantum operations on thermal light fields [J]. *Physical Review Letters*, 2009, **103**(14): 140406.
- [16] LEE S Y, NHA H. Second-order superposition operations via Hong-Ou-Mandel interference[J]. *Physical Review A*, 2012, **85**: 043816.
- [17] FIURASEK J. Engineering quantum operations on traveling light beams by multiple photon addition and subtraction[J]. *Physical Review A*, 2009, **80**: 053822.
- [18] FAN Hong-yi. Quantum mechanics representation and conversion theory [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2012, 30-31.  
范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 30-31.
- [19] LU Dong-ming. Quantum properties of state via operation of light field combination operator on chaotic field [J]. *Acta Optica Sinica*. 2015, **35**(7): 0727003.  
卢道明. 光场组合算符激发混沌场的量子特性[J]. *光学学报*, 2015, 35(7): 0727003.