

doi: 10.3788/gzxb20164510.1027001

等距离光纤耦合腔系统中的三体纠缠特性

邱昌东, 卢道明

(武夷学院 机电工程学院, 福建 武夷山 354300)

摘要: 考虑 3 个单模腔处于等边三角形的 3 个顶点, 腔与腔之间通过光纤耦合, 并且每个腔囚禁一个二能级原子的情况, 研究了该系统中 3 个原子间和 3 个腔模间的三体纠缠特性. 考虑系统激发数等于 1 的情况下, 给出了系统态矢的演化规律; 采用三体负本征值 Negativity 度量三体纠缠, 通过数值计算给出了 3 个原子间和 3 个腔模间的三体纠缠演化曲线; 讨论了腔模与光纤模间的耦合强度变化对纠缠特性的影响. 研究表明: 原子间和腔模间的三体纠缠量均呈现不规则振荡; 随着腔模与光纤模间耦合系数增大, 振荡频率增大, 而原子间和腔模间的三体纠缠均减弱.

关键词: 量子光学; 二能级原子; 耦合腔; 三体量子纠缠; 负本征值

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2016)10-1027001-5

Tripartite Entanglement Dynamics in a Equidistance Cavities Coupled by Fibers

QIU Chan-dong, LU Dao-ming

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract: When the three separated equidistance single-mode cavities were positioned at the three vertices of an equilateral triangle, the characteristic of the tripartite entanglement among the cavities and that among atoms in the system was studied. The situation was considered which three identical two-level atoms are separately trapped in cavities. Each atom resonantly interacts with cavity via a one-photon hopping. The evolution of the state vector of the system was given when the total excitation number of the system equals one. Negativity was adopted to quantify the degree of tripartite entanglement among three subsystems. The tripartite entanglement dynamics among atoms and that among cavities were studied. The influences of cavity-fiber coupling constant on the tripartite entanglement among atoms and that among cavities were discussed. The results obtained using the numerical method show that, the tripartite entanglement among atoms and that among cavities are weakened with increase of cavity-fiber coupling coefficient.

Key words: Quantum optics; Two-level atom; Coupled cavities; Tripartite quantum entanglement; Negativity

OCIS Codes: 270.0270; 270.5585; 020.0020; 020.5580

0 引言

量子态的纠缠特性和非局域性是量子力学中的奇妙现象. 量子纠缠态是量子信息处理和量子计算的核心资源之一, 可以用来完成经典物理无法完成的任务, 如量子计算、量子隐形传态和量子密集编码等^[1-3]. 纠缠态制备、纠缠度量与保持在量子信息处理中显得非

常重要, 引起了研究人员极大关注^[4-7]. 例如, 郭战营等研究了内禀退相干情况下, 两粒子 XXZ 海森堡系统中的量子纠缠动力学^[4], 冯景佩等利用相干态正交化展开法讨论了非旋波近似下 Tavis-Cummings 模型中的定态能谱和纠缠演化^[5]. Zhang 等提出了一种在腔 QED(Quantum Electrodynamics) 系统控制纠缠突然死亡方案^[6].

基金项目: 福建省自然科学基金 (No. 2015J01020) 和福建省教育厅 A 类科技项目 (No. JA12327) 资助

第一作者: 邱昌东 (1973-), 副教授, 硕士, 主要研究方向为量子光学. Email: qiucd_321@126.com

通讯作者: 卢道明 (1963-), 教授, 硕士, 主要研究方向为量子光学. Email: daominglu79@hotmail.com

收稿日期: 2016-04-11; 录用日期: 2016-06-21

腔量子电动力学(简称腔 QED)是实现量子信息处理和量子计算等最有效的技术之一. 至今,已有大量有关利用腔 QED 技术进行量子信息处理的研究报道. 例如, Zhang 提出了利用腔 QED 技术制备两原子最大纠缠态的方案^[8], Xin 等建议了产生三原子 W 态的方案^[9]. 近年来,由于耦合腔系统可以避免在单个腔中操控多个原子可能带来相互干扰的影响,该领域吸引了科研工作者的极大兴趣^[10-17]. 例如, Zheng 等提出了一种利用耦合腔系统产生两模压缩态的方案^[10]; Li 等研究了耦合腔系统中的纠缠动力学^[11]; Liu 等讨论了耦合腔系统中的量子纠缠、量子失协和量子相位跃迁等^[12]. 但对处于等边三角形 3 个顶点的耦合腔模型中三体纠缠研究鲜有报道. 本文考虑系统总激发数等于 1 的情况下,研究了该模型中 3 个二能级原子间和 3 个单模腔间的纠缠特性,得到了随腔模与光纤模间耦合系数增大,原子间和腔模间的三体纠缠均减弱的结果. 该研究对利用腔 QED 系统进行量子信息处理具有参考意义.

1 系统态矢的演化

研究如图 1 的光纤耦合腔系统. 3 个单模腔处于等边三角形的 3 个顶点,腔与腔之间通过光纤耦合. 考

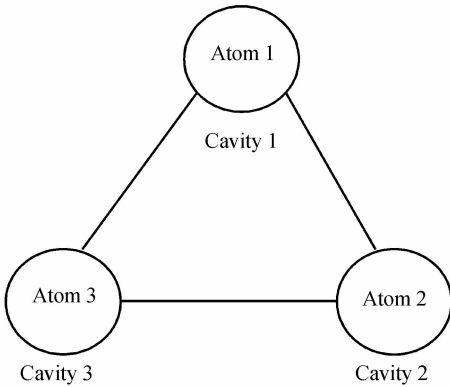


图 1 系统示意图
Fig. 1 Sketch of the set-up

虑每个腔囚禁一个二能级原子,以及原子与腔场发生共振相互作用的情况. 在旋波近似下,系统中腔与原子间的相互作用哈密顿为

$$H_c = g_1(a_1s_1^+ + a_1^+s_1^-) + g_2(a_2s_2^+ + a_2^+s_2^-) + g_3(a_3s_3^+ + a_3^+s_3^-) \quad (1)$$

式中, a_L^+ , a_L ($L=1,2,3$) 分别表示腔模的产生和湮没算符, $s_i^+ = |e\rangle_{ii}\langle g|$ 和 $s_i^- = |g\rangle_{ii}\langle e|$ ($i=1,2,3$) 分别表示第 i 个原子的上升和下降算符, g_i ($i=1,2,3$) 表示第 i 个腔中原子与腔场间的相互作用强度, $|g\rangle_i$ ($|e\rangle_i$) 表示第 i 个原子的基态(激发态).

在满足短光纤条件下,光纤模与腔模间的相互作用哈密顿为^[18]

$$H_f = J_1b_1(a_1^+ + a_2^+) + J_2b_2(a_2^+ + a_3^+) +$$

$$J_3b_3(a_1^+ + a_3^+) + H.C \quad (2)$$

式中, J_i 表示光纤模与腔模间的耦合系数, $H.C$ 表示共轭项, b_i ($i=1,2,3$) 表示光纤模. 那么,整个系统的相互作用哈密顿为

$$H_1 = H_c + H_f \quad (3)$$

考虑系统的激发数等于 1 的情况. 那么,在演化过程中,系统将在基矢

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= |egg\rangle_a |000\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_2\rangle &= |geg\rangle_a |000\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_3\rangle &= |gge\rangle_a |000\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_4\rangle &= |ggg\rangle_a |100\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_5\rangle &= |ggg\rangle_a |010\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_6\rangle &= |ggg\rangle_a |001\rangle_c |000\rangle_f, \\ |\varphi_7\rangle &= |ggg\rangle_a |000\rangle_c |100\rangle_f, \\ |\varphi_8\rangle &= |ggg\rangle_a |000\rangle_c |010\rangle_f, \\ |\varphi_9\rangle &= |ggg\rangle_a |000\rangle_c |001\rangle_f \end{aligned}$$

张开的子空间中演化. 在 $|\varphi_i\rangle$ 表示的态中下标 a, c, f 分别表示原子、腔场和光纤模的状态. 在这子空间中,系统任意时刻的态矢可表示为

$$|\varphi(t)\rangle = A_1|\varphi_1\rangle + A_2|\varphi_2\rangle + A_3|\varphi_3\rangle + A_4|\varphi_4\rangle + A_5|\varphi_5\rangle + A_6|\varphi_6\rangle + A_7|\varphi_7\rangle + A_8|\varphi_8\rangle + A_9|\varphi_9\rangle \quad (4)$$

在相互作用绘景中,系统的态矢演化满足薛定谔方程,即

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_1 |\varphi(t)\rangle \quad (5)$$

取 $\hbar=1$. 若初始时刻系统处于 $|\varphi_1\rangle$ 态,那么初始条件为 $A_1=1$, $A_2=A_3=A_4=A_5=A_6=A_7=A_8=A_9=0$. 为简单起见,设 $g_1=g_2=g_3=g$, $J_1=J_2=J_3=J$. 将式(4)代入式(5),解得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{g^2}{3\beta^2} \cos(\beta t) + \frac{2J^2(2J^2+g^2)}{\alpha^2\beta^2} + \frac{2g^2}{3\alpha^2} \cos(\alpha t) \\ A_2 = A_3 = \frac{g^2}{3\beta^2} \cos(\beta t) + \frac{J^2g^2}{\alpha^2\beta^2} - \frac{g^2}{3\alpha^2} \cos(\alpha t) \\ A_4 = -i \left[\frac{g}{3\beta} \sin(\beta t) + \frac{2g}{3\alpha} \sin(\alpha t) \right] \\ A_5 = A_6 = -i \left[\frac{g}{3\beta} \sin(\beta t) - \frac{g}{3\alpha} \sin(\alpha t) \right] \\ A_7 = A_9 = \frac{2gJ}{3\beta^2} \cos(\beta t) + \frac{Jg}{3\alpha^2} \cos(\alpha t) - \frac{gJ}{\alpha^2\beta^2} (2J^2+g^2) \\ A_8 = \frac{2gJ}{3\beta^2} \cos(\beta t) + \frac{2J^3g}{\alpha^2\beta^2} - \frac{2gJ}{3\alpha^2} \cos(\alpha t) \\ \alpha = \sqrt{g^2+J^2} \\ \beta = \sqrt{g^2+4J^2} \end{cases} \quad (6)$$

2 系统中的三体纠缠特性

对于由原子 1、原子 2 和原子 3 构成的三体系统,

原子间的三体纠缠可用 C. Sabin 等提出的三体负本征值(Negativity)方法来度量^[19],即

$$N_a = (N_{1-23} N_{2-13} N_{3-12})^{1/3} \quad (7)$$

式中, $N_{i-jk} = -2 \sum_l \lambda_l$, λ_l 为 ρ_{i-jk}^T 的负本征值, ρ_{i-jk}^T 是密度矩阵 ρ_{ijk} 对 i 部分转置的矩阵, 上标 T 表示转置.

以 $|eee\rangle, |eeg\rangle, |ege\rangle, |egg\rangle, |gee\rangle, |geg\rangle, |gge\rangle, |ggg\rangle$ 为基矢, 利用式(4), 不难得出描述 3 个原子体系的密度矩阵为

$$\rho_{46} = \text{Tr}((A_1 |000\rangle_c \langle 000|_{if} \langle 000|_c \langle 000| A_2^*) = A_1 A_2^* \quad (8)$$

$$\rho_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A_1|^2 & 0 & A_1 A_2^* & A_1 A_3^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 A_1^* & 0 & |A_2|^2 & A_2 A_3^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 A_1^* & 0 & A_3 A_2^* & |A_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |A_{4-9}|^2 \end{bmatrix}$$

式中, $|A_{4-9}|^2 = |A_4|^2 + |A_5|^2 + |A_6|^2 + |A_7|^2 + |A_8|^2 + |A_9|^2$, Tr 表示对腔模和光纤模求迹.

利用式(8), 不难得出

$$\begin{cases} N_{1-23} = \sqrt{|A_{4-9}|^4 + 4(|A_1 A_2|^2 + |A_1 A_3|^2)} - |A_{4-9}|^2 \\ N_{2-13} = \sqrt{|A_{4-9}|^4 + 4(|A_1 A_2|^2 + |A_2 A_3|^2)} - |A_{4-9}|^2 \\ N_{3-12} = N_{2-13} \end{cases} \quad (9)$$

结合式(7)和式(9), 可以对描述三原子间的纠缠量 N_a 进行数值计算. 图 2 描绘了参量 J 分别取 $0.5g, 1.0g, 2g, 4g$ 时 N_a 随规范时间 gt 演化的计算结果. 从图 2 中可以看出: 随腔模与光纤模间耦合系数逐渐增大, 三原子间的纠缠量 N_a 呈现出从不规则振荡向准周期性振荡转变, J 大于一定值后呈现出准周期性振荡. 并且, 振荡频率随 J 增大而增大. 由式(9)可见, 密度矩阵 ρ_a 的部分转置矩阵的负本征值由展开系数 A_i ($i=1, 2, \dots, 9$) 决定, A_i 是角频率 α 和 β 的正弦和余弦函数的叠加. α 和 β 都随 J 逐渐增大而增大, 因此, 其振荡频率随 J 增大而增大. 另一方面, 随 J 逐渐增大, 曲线峰值逐渐减小, 曲线重心下移. 这表明随腔模与光纤模间耦合系数逐渐增大, 原子间的三体纠缠逐渐减弱. 这是因为随腔模与光纤模间耦合系数 J 增大, 系统初始的激发子由原子间分享的可能性减小, 导致三原子间的纠缠减弱.

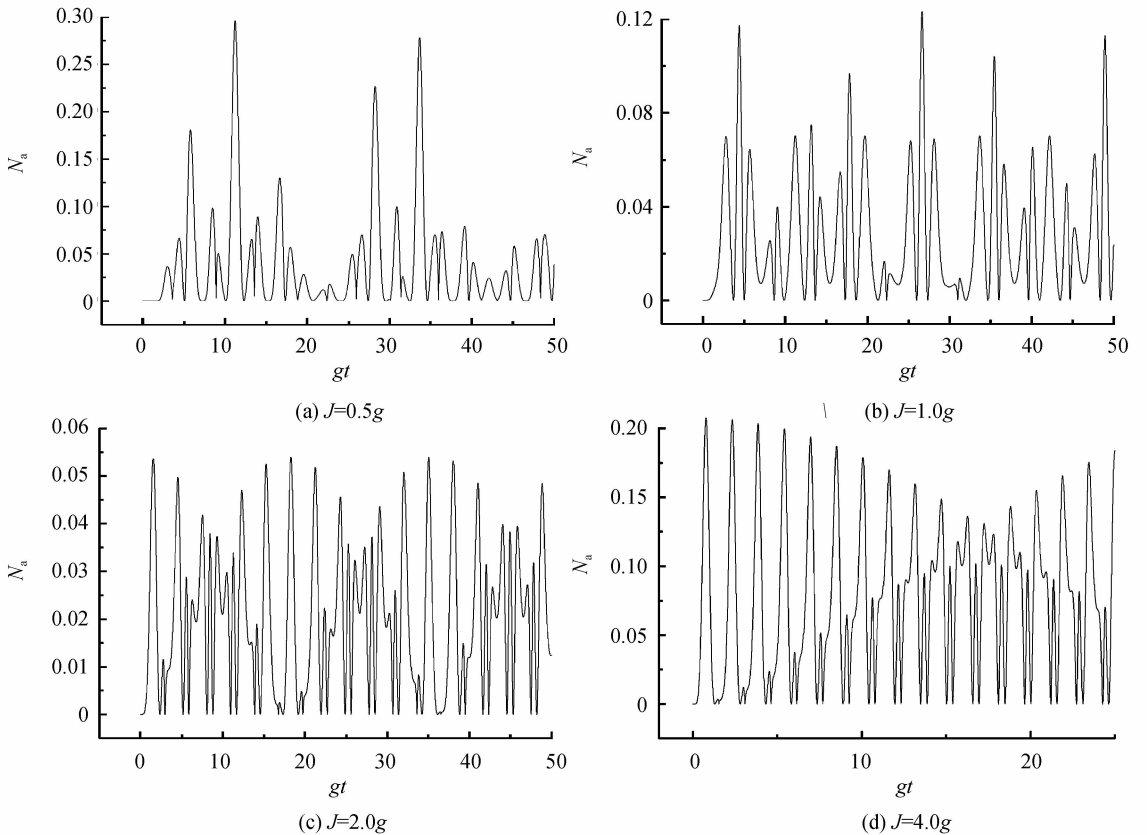


图 2 三原子间纠缠量 N_a 随规范时间 gt 的演化

Fig. 2 Evolution of the tripartite entanglement among atoms N_a with scale time gt

3 系统中腔场间的三体纠缠特性

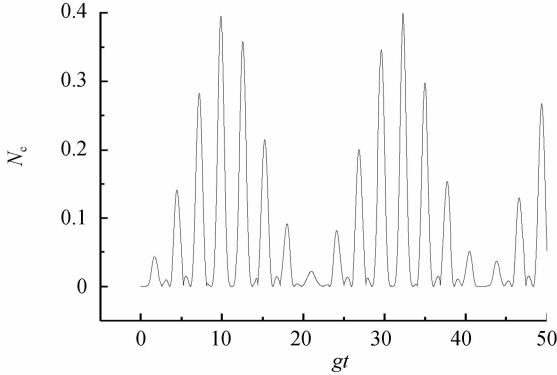
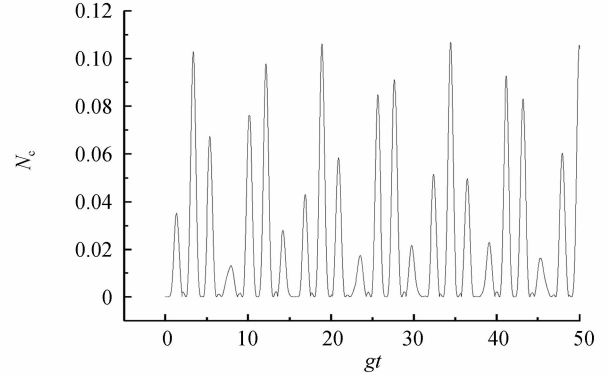
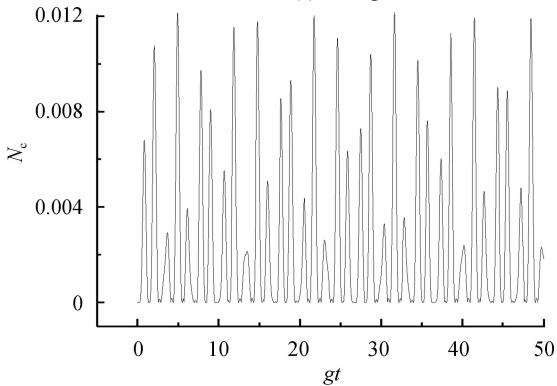
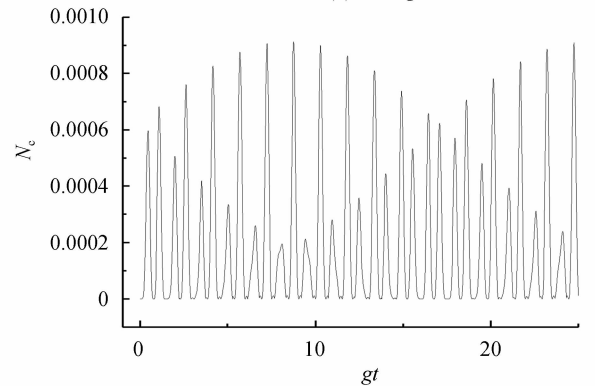
3个腔模之间的三体纠缠仍然采用三体负本征值 (Negativity) 方法来度量. 以 $|111\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |100\rangle, |011\rangle, |010\rangle, |001\rangle, |000\rangle$ 为基矢, 利用式(4), 不难得出描述3个腔模构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A_4|^2 & 0 & A_4 A_5^* & A_4 A_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 A_4^* & 0 & |A_5|^2 & A_5 A_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6 A_4^* & 0 & A_6 A_5^* & |A_6|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |A_{1379}|^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中, $|A_{1379}|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_7|^2 + |A_8|^2 + |A_9|^2$. 利用式(10), 能够导出

$$\begin{cases} N_{c1-23} = \sqrt{|A_{1379}|^4 + 4(|A_4 A_5|^2 + |A_4 A_6|^2)} - |A_{1379}|^2 \\ N_{c2-13} = \sqrt{|A_{1379}|^4 + 4(|A_4 A_5|^2 + |A_5 A_6|^2)} - |A_{1379}|^2 \\ N_{c3-12} = N_{c2-13} \end{cases} \quad (11)$$

式中, 下标 c 表示描述腔模的量. 参量 J 分别取 $0.5g, 1.0g, 2g, 4g$ 时, 三腔模间的纠缠量 N_c 数值计算结果如图3. 图3的演化曲线展示出特征为: 纠缠量 N_c 与 N_a 有相似的演化规律, 同样呈现出规则振荡, 并且其不规则振荡的频率也随腔模与光纤模间耦合系数增大而增大. 导致这种演化特征的原因也与 N_a 相似, 同样是由于展开系数 $A_i (i=1, 2, \dots, 9)$ 是角频率 α 和 β 的正弦和余弦函数叠加, 而 α 和 β 随 J 逐渐增大而增大的结果. 另一方面, 随 J 逐渐增大, 曲线峰值逐渐减小, 曲线重心下移. 这表明随腔模与光纤模间耦合系数逐渐增大, 腔模间的三体纠缠逐渐减弱. 由式(6)可知

(a) $J=0.5g$ (b) $J=1.0g$ (c) $J=2.0g$ (d) $J=4.0g$ 图3 三个腔模间纠缠量 N_c 随规范时间 gt 的演化Fig. 3 Evolution of the tripartite entanglement among cavities N_c with scale time gt

系数 A_4, A_5 和 A_6 的幅值随 J 增大而减小. $|A_4|^2, |A_5|^2$ 和 $|A_6|^2$ 表示腔场处于激发数等于1时的几率. 这表明随腔模与光纤模间耦合系数 J 增大, 系统初始的激发子由腔场分享的几率减小, 导致腔场间的纠缠减弱.

4 结论

本文研究由处于等边三角形3个顶点的3个单模腔构成的物理系统, 讨论了该统中三原子间和三腔模间的三体纠缠特性. 利用数值计算方法, 给出了腔模与光纤模间耦合系数取不同值时三体纠缠量 N_a 和 N_c .

随规范时间 gt 的演化曲线. 计算结果表明: 随腔模与光纤模间耦合系数逐渐增大, 三体纠缠量 N_a 和 N_c 均呈现出从不规则振荡向准周期性振荡转变, J 大于一定值后呈现出准周期性振荡. 并且, 它们的振荡频率都随 J 增大而增大, 其原因是三体纠缠量由展开系数 A_i ($i=1, 2, \dots, 9$) 决定, 而 A_i 是角频率 α 和 β 的正弦和余弦函数的叠加, α 和 β 都随 J 逐渐增大而增大的缘故. 另一方面, 随 J 逐渐增大, 曲线峰值逐渐减小, 重心下移. 这表明随腔模与光纤模间耦合系数逐渐增大, 原子间和腔模间的三体纠缠均减弱.

参考文献

- [1] GROVER L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack[J]. *Physical Review Letters*, 1997, **79**(2): 325-328.
- [2] BERNNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **70**(13): 1895-1899.
- [3] LI S S. Dense coding with cluster state via local measurements[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2012, **51**(3): 724.
- [4] GUO Z Y, ZHANG X H, XIAO R H, *et al.* Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit XXZ Heisenberg system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, **34**(7): 0727001.
郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. *光学学报*, 2014, **34**(7): 0727001.
- [5] FENG J P, REN X Z. Steady state energy spectrum and the entanglement evolution of Tavis-Cummings model without rotating wave approximation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, **44**(8): 0827003.
冯景佩, 任学藻. 非旋波近似下 Tavis-Cummings 模型的定态能谱和纠缠演化[J]. *光子学报*, 2015, **44**(8): 0827003.
- [6] ZHANG J S, XU J B. Controlling entanglement sudden death and birth in cavity QED[J]. *Optics Communications*, 2009, **282**(17): 3652-3655.
- [7] LASKOWSKI W, MARKIEWICZ M, PATERK T, *et al.* Correlation-tensor criteria for genuine multiqubit entanglement [J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(6): 062305.
- [8] ZHANG F J, WANG D X, LIU K, *et al.* Generating a two-qubit entanglement state in cavity QED [J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2015, **54**(7): 2258-2260.
- [9] XIN B, JIA R X, ZHENG Y Z. Robust generation of three-particle W state with atoms trapped in separate cavities[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012, **58**(10): 493-496.
- [10] ZHENG S B, YANG Z B, XIA Y. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities [J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(1): 015804.
- [11] LI W Z, ZHANG C L, SHEN L T, *et al.* Entanglement dynamics and maintenance for two atoms in coupled cavities [J]. *Optics Communications*, 2014, **315**: 213-219.
- [12] LIU Z J, MIAO H L, JIANG W, *et al.* Ground-state quantum discord in coupled cavities[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2015, **54**(3): 821-829.
- [13] OGDEN C D, IRISH E K, KIM M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(6): 063805.
- [14] HARTMANN M J, BRANDAO F G S L, PLENIO M B. Effective spin systems in coupled microcavities[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **99**: 160501.
- [15] CICCARELLO F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays[J]. *Physical Review A*, 2011, **83**(4): 2900-2912.
- [16] ZHANG Y Q, HU Z D, XU J B. Entanglement transfer through arrays of cavities coupled by optical fibers [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2011, **50**(8): 2438-2445.
- [17] SONG J, SUN X D, Xia Y, *et al.* Efficient creation of continuous-variable entanglement for two atomic ensembles in coupled cavities [J]. *Physical Review A*, 2011, **83**(5): 052309.
- [18] PENG P, LI F L. Entangling two atoms in spatially separated cavities through both photon emission and absorption processes[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(6): 062320.
- [19] SABIN C, GARCIA-ALCAINE G. A classification of entanglement in three-qubit system[J]. *European Physical Journal D*, 2008, **48**(3): 435-442.