

doi: 10.3788/gzxb20164501.0112001

# 基于主元分析的干涉仪相移器校准方法

徐建程, 候园园, 陈翌

(浙江师范大学 信息光学研究所, 浙江 金华 321004)

**摘 要:** 利用主元分析从一组干涉图中提取相位和相移量, 得到相移量与驱动电压之间的对应关系, 从而实现压电陶瓷相移器的非线性校准。模拟结果表明: 主元分析法计算相移量的误差随着干涉图中条纹根数的增多而减小; 当干涉图中条纹根数多于 0.25 时, 相移量计算误差小于 0.1664rad。实验结果表明: 相移量计算误差是周期分布, 对相移器校准准确度影响小。该方法无需迭代计算, 且对干涉图中条纹根数没有严格要求, 因此是一种高效且实用的校准方法。

**关键词:** 干涉测量; 条纹分析; 主元分析; 压电陶瓷相移器; 相移技术

中图分类号: O436.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2016)01-0112001-5

## Phase-shifting Calibrating Method Based on Principle Component Analysis in Interferometer

XU Jian-cheng, HOU Yuan-yuan, CHEN Zhao

(Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China)

**Abstract:** By using Principal Component Analysis, the phase and the phase shifts were extracted simultaneously from one set of interferograms, the relationship between the phase shifts and the driving voltages was obtained and then the calibration of nonlinear phase shifts was achieved. Numerical simulations and experiments were implemented to verify the effectiveness of this method. The simulation results show that the calculation error of phase shifts for the method decreases with the increasing of the number of fringes in interferograms. The error is less than 0.1664rad when the number of fringes is larger than 0.25. The experimental results show that the calculation error of phase shifts is a periodic distribution and has few effect on the accuracy of phase shifter calibration. The proposed method without non-iterative has no strict requirement for the number of fringes in interferograms, thus it is an effective and efficient nonlinear phase-shifting calibrating method for piezoelectric ceramic transducer in interferometer.

**Key words:** Interferometry; Fringe analysis; Principle component analysis; Piezoelectric ceramic transducer; Phase shifting techniques

**OCIS Codes:** 120.3180; 120.2650; 120.4640; 120.4800

## 0 引言

相移干涉技术经过近 40 年的发展, 以其高准确度而被广泛应用于各种现代干涉仪器中。压电陶瓷相移器是相移干涉仪的关键部件之一, 相移误差是影响相移干涉仪准确度的重要因素之一, 因而对压电陶瓷相移器进行校准具有重要意义<sup>[1-3]</sup>。如果压电陶瓷相移器的相移量与驱动电压呈线性关系, 则可通过定步长

相移算法<sup>[4]</sup>求解方程组得到相移量与驱动电压的线性关系式。然而在实际应用中, 由于相移量与驱动电压之间存在非线性, 所以定步长相移算法不可避免地具有一定的局限性。国内外学者们提出了各种压电陶瓷非线性相移校准方法, 应用最为普遍的是傅里叶分析校准法<sup>[5-7]</sup>, 它利用傅里叶变换从一帧具有较高空间载波频率的干涉图中提取相位分布, 然后计算两幅干涉图之间的相位差, 进而得到相移量与驱动电压之间的对

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(No. 61205163)和欧盟玛丽居里 IIF 项目(No. 301807)资助

第一作者: 徐建程(1981-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为信息光学和精密光学检测。Email: xujiancheng@zjnu.cn

收稿日期: 2015-08-10; 录用日期: 2015-10-12

<http://www.photon.ac.cn>

应关系,从而校准压电陶瓷相移器的非线性.但此方法<sup>[8]</sup>要求干涉图具有较高的空间载波频率,若干涉条纹是闭合的或者空间载波频率较小都会引入较大误差.苏志德等<sup>[9]</sup>将迭代最小二乘法用于非线性相移器的校准,该方法可以从一组大量干涉图中提取相移量分布,从而实现相移器的非线性校准,但是该方法需要迭代计算,因此计算量较大.本文提出一种基于主元分析<sup>[10-12]</sup>的相移器非线性校准方法,该方法利用主元分析从一组大量干涉图中提取相移量分布,从而实现压电陶瓷相移器的非线性校准.该方法无需迭代计算,且对干涉图空间载波频率没有严格的要求.

## 1 移相器非线性校准原理

在相移干涉仪上,通过改变压电陶瓷相移器的驱动电压,采集  $N$  帧相移干涉图,假设第  $n$  帧干涉图的光强分布表达式为

$$I_n = A(x, y) + B(x, y) \cos(\varphi(x, y) + \theta_n) \quad (1)$$

式中,  $A(x, y)$ 、 $B(x, y)$  和  $\varphi(x, y)$  分别表示干涉图的背景光强、条纹调制度和被测相位,  $\theta_n$  表示第  $n$  帧干涉图对应的相移值,其中  $1 \leq n \leq N$ . 由于压电陶瓷存在非线性,因此,假设压电陶瓷的相移量与驱动电压之间的对应关系为<sup>[2]</sup>

$$\theta_n = k_1 v_n + k_2 v_n^2 \quad (2)$$

式中,  $v_n$  和  $\theta_n$  分别表示相移器在第  $n$  步相移时的驱动电压和相移值,  $k_1$  和  $k_2$  分别表示压电陶瓷相移器线性系数和二阶非线性系数.

假设干涉图在  $x$  和  $y$  方向的像素个数分别为  $M_x$  和  $M_y$ , 通过像素位置重组,将二维干涉图重组成一行,其长度为  $M = M_x \times M_y$  个像素.则  $N$  帧干涉图及  $N$  个相移值组成的矩阵分别表示为

$$\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, I_N]^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots, \theta_N]^T \quad (4)$$

式中,  $[\ ]^T$  表示转置运算, 假设干涉条纹的背景为

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{N} \approx A, \text{ 则 } \mathbf{I} - \mu_1 \text{ 可表示为}$$

$$\mathbf{I} - \mu_1 \approx B \cos(\varphi + \delta) = \alpha I_1 + \beta I_2 \quad (5)$$

式中,  $\alpha = \cos(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\beta = -\sin(\boldsymbol{\theta})$ ,  $I_1 = B \cos(\varphi)$ ,  $I_2 = B \sin(\varphi)$ . 假设  $\mathbf{L} = [B \cos \varphi, B \sin \varphi]$ ;  $\mathbf{R} = [\sin \boldsymbol{\theta}, \cos \boldsymbol{\theta}]^T$ , 则式(5)可改写为

$$\mathbf{I} - \mu_1 = \mathbf{L} \mathbf{R} \quad (6)$$

根据主元分析理论可知,  $\mathbf{I} - \mu_1$  的协方差矩阵为

$$\mathbf{C} = (\mathbf{L} \mathbf{R})^T (\mathbf{L} \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^M B_m^2 \cos^2(\varphi_m) & \sum_{m=1}^M 0.5 B_m^2 \sin(2\varphi_m) \\ \sum_{m=1}^M 0.5 B_m^2 \sin(2\varphi_m) & \sum_{m=1}^M B_m^2 \sin^2(\varphi_m) \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中,下标  $m$  表示干涉图中第  $m$  个像素.  $\mathbf{Q}$  是实对称矩阵,可被对角化,即存在正交矩阵  $\mathbf{U}$  使得  $\mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}$ , 其中  $\boldsymbol{\Lambda}$  是对角矩阵.将  $\mathbf{Q}$  代入式(7)得

$$\mathbf{C} = (\mathbf{U} \mathbf{R})^T \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{U} \mathbf{R}) \quad (9)$$

若干干涉图帧数  $N$  足够大,  $\sum_{n=1}^N \sin^2 \theta_n \approx \sum_{n=1}^N \cos^2 \theta_n$ ,  $\sum_{n=1}^N \sin(2\theta_n) \approx 0$ , 则  $\mathbf{R}$  可近似为正交矩阵.同时因为  $\mathbf{U}$  为正交矩阵,所以  $\mathbf{U} \mathbf{R}$  也近似为正交矩阵.因此,通过正交变换可得到主元矩阵为<sup>[10-12]</sup>

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \mathbf{U}^T = (\mathbf{I} - \mu_1) (\mathbf{U} \mathbf{R})^T \quad (10)$$

式中,第一主元  $p_1$ 、第二主元  $p_2$  分别对应着  $I_1 \mathbf{U}^T$ 、 $I_2 \mathbf{U}^T$  或  $I_2 \mathbf{U}^T$ 、 $I_1 \mathbf{U}^T$ . 因此,相位可表示为<sup>[10-12]</sup>

$$\varphi = \arctan(I_1/I_2) = \pm \arctan(p_2/p_1) \quad (11)$$

根据文献[12-13]可知,若相移干涉图帧数  $N$  足够大,假设可以较好地满足条件  $\sum_{n=1}^N \sin^2 \theta_n \approx \sum_{n=1}^N \cos^2 \theta_n$  和  $\sum_{n=1}^N \sin(2\theta_n) \approx 0$ , 则主元分析方法求得相位具有较高准确度.

假设干涉条纹的背景和调制近似为常量  $A$  和  $B$ , 则可重新定义变量  $\mu_1 = A$ ,  $b_n = B \cos \theta_n$ ,  $c_n = -B \sin \theta_n$ . 相位  $\varphi$  已经确定,利用最小二乘拟合方法求得<sup>[9,11]</sup>

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & \sum_{m=1}^M \cos \varphi_m & \sum_{m=1}^M \sin \varphi_m \\ \sum_{m=1}^M \cos \varphi_m & \sum_{m=1}^M \cos^2 \varphi_m & \sum_{m=1}^M \sin \varphi_m \cos \varphi_m \\ \sum_{m=1}^M \sin \varphi_m & \sum_{m=1}^M \sin \varphi_m \cos \varphi_m & \sum_{m=1}^M \sin^2 \varphi_m \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M I_m \\ \sum_{m=1}^M I_m \cos \varphi_m \\ \sum_{m=1}^M I_m \sin \varphi_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

相移量  $\theta_n$  可表示为

$$\theta_n = \arctan(-c_n/b_n) \quad (13)$$

其相对第一帧干涉图的相移量为  $\theta_n - \theta_1$ . 假设第一帧干涉图相移值  $\theta_1$  对应的驱动电压为  $v_1$ , 则相对相移量和驱动电压增幅的关系可表示为

$$\theta_n - \theta_1 = k_1(v_n - v_1) + k_2(v_n - v_1)^2 \quad (14)$$

在实际的相移干涉仪中,利用软件控制压电陶瓷相移器的驱动电压  $v_n$ , 使  $v_n$  依次等额递增,即  $v_1 \leq v_n \leq v_N$ ; 在  $N$  个驱动电压  $v_n$  下,压电陶瓷驱动干涉仪参考镜的相移量为  $\theta_n$ , 利用 CCD 采集  $N$  帧相移干涉图  $I_n$ . 然后利用主元分析法从  $N$  帧相移干涉图  $I_n$  中求得  $N$  个相移量  $\theta_n$ , 根据式(14)即可求得压电陶瓷相移器

线性系数  $k_1$  和二阶非线性系数  $k_2$ , 从而实现相移器的非线性校准。

## 2 数值模拟

假设干涉图的参量  $\varphi = 2D\pi(x^2 + y^2)$ ,  $A = B = 127\exp[-0.1(x^2 + y^2)]$ , 式中  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $D$  为干涉图中条纹的根数, 若  $D=1$ , 则表示干涉图中有 1 根条纹。假设第  $n$  帧干涉图的相移量为  $\theta_n = k_1 v_n + k_2 v_n^2 + \eta$ , 式中  $k_1 = \pi/4$ ,  $k_2 = 0.001$ ,  $1 \leq v_n \leq 200$ ,  $\eta$  是 0 到 1 之间的随机数, 它表示环境扰动引入的随机相移量。用式(1)模拟生成大小为  $512 \times 512$  的 200 帧相移干涉条纹图, 图 1(a) 表示  $D=1$  时的其中一帧干涉图。利用主元分析法从 200 帧干涉图中提取相位和相移量, 通过与预先设定的相位和相移量比较, 得到主元分析方法的相位、相移量计算误差, 其结果分别如图 1(b) 和 (c)。相位计算误差的均方根 (Root Mean Square, RMS)

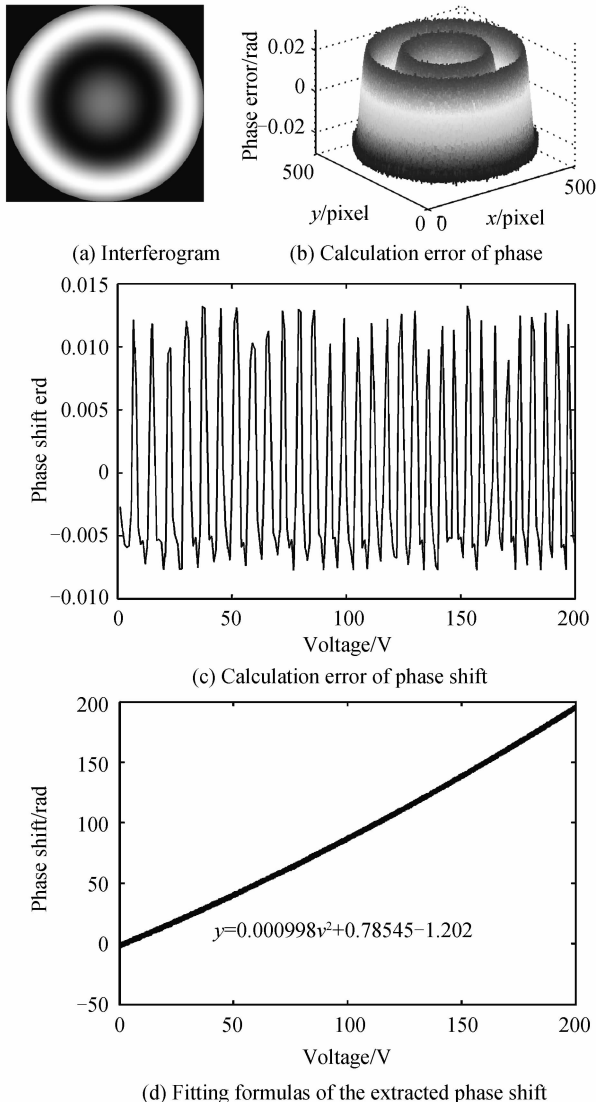


图 1 主元分析方法提取干涉图中的相位和相移量  
Fig. 1 Phase and phase shifts extracted by principle component analysis

值和峰谷 (Peak to Valley, PV) 值分别为 0.0162 rad 和 0.0521 rad; 相移量计算误差的 RMS 和 PV 分别为 0.0143 rad 和 0.0432 rad; 若对所提取的相移量进行二次方程拟合, 其结果如图 1(d), 相移量的线性系数  $k_1 = 0.78545$ , 二阶非线性系数  $k_2 = 0.000998$ , 与理论值相比, 两个系数的计算误差分别为  $4.8 \times 10^{-5}$  和  $-2 \times 10^{-6}$ 。

改变干涉图中条纹的根数, 让根数  $D$  分别等于 0.25, 0.5, 1 和 2, 然后利用主元分析法分别求得相位和相移量, 最后得到相移量计算误差的 RMS 和 PV 值, 以及相移量拟合方程中线性系数  $k_1$  和二阶非线性系数  $k_2$  的计算误差, 其结果如表 1。由图 1 和表 1 可知, 相移量的计算误差随着干涉图中条纹根数的增多而减小, 该结果与文献[10-13]的结论是一致的。当干涉图中条纹根数小于 1 时, 常规的相移量提取算法[1-2, 5-8]都会产生较大的计算误差, 但是本文方法提取的相移量仍然具有较高的准确度。这是由于本文是利用主元分析法从非常多的干涉图中 ( $N=200$ ) 提取相位, 而根据主元分析算法的误差分析表明[12-13], 即使相移干涉图中条纹根数较少、相移量是随机的, 只要参与计算的条纹帧数足够多, 则主元分析算法都可以得到较高准确度的相位。根据该相位, 采用最小二乘拟合得到相移量也具有较高的准确度。另外, 图 1(c) 表明相移量计算误差是周期性分布, 它对二阶方程拟合的影响较小, 因此, 线性系数  $k_1$  和二阶非线性系数  $k_2$  的计算误差非常小。干涉仪压电陶瓷相移器的非线性校准, 需要采集并处理大量干涉图, 而主元分析法特别适合从一组大量干涉图中提取相位和相移量, 因此, 本文方法是一种非常有效的校准方法。

表 1 干涉图中条纹根数和相移量计算误差的关系  
Table 1 Relation between the number of fringes in interferogram and the calculation error of phase shifts

D/rad	0.25	0.5	1	2
PV/rad	0.1664	0.1092	0.04320	0.0334
RMS/rad	0.0611	0.0391	0.0143	0.0100
Error of $k_1$ / (rad · V <sup>-1</sup> )	0.0026	$9.2 \times 10^{-5}$	$4.8 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-5}$
Error of $k_2$ / (rad · V <sup>-2</sup> )	$1.3 \times 10^{-5}$	$-3 \times 10^{-6}$	$-2 \times 10^{-6}$	$-1 \times 10^{-6}$

## 3 实验验证

由于压电陶瓷有一定的阈值电压 (即驱动电压必需超过某一阈值电压才能发生形变), 因此, 只测试 Fizeau 干涉仪中压电陶瓷在驱动电压为 60~220 V 范围内的相移特性。设置压电陶瓷的初始驱动电压为 60 V, 然后每次增加 1 V、采集 1 帧干涉图, 当驱动电压增加到 220 V 时, 共采集 160 帧干涉图。图 2(a) 是其中一帧干涉图, 干涉图约有 2.5 根条纹。利用本文方法

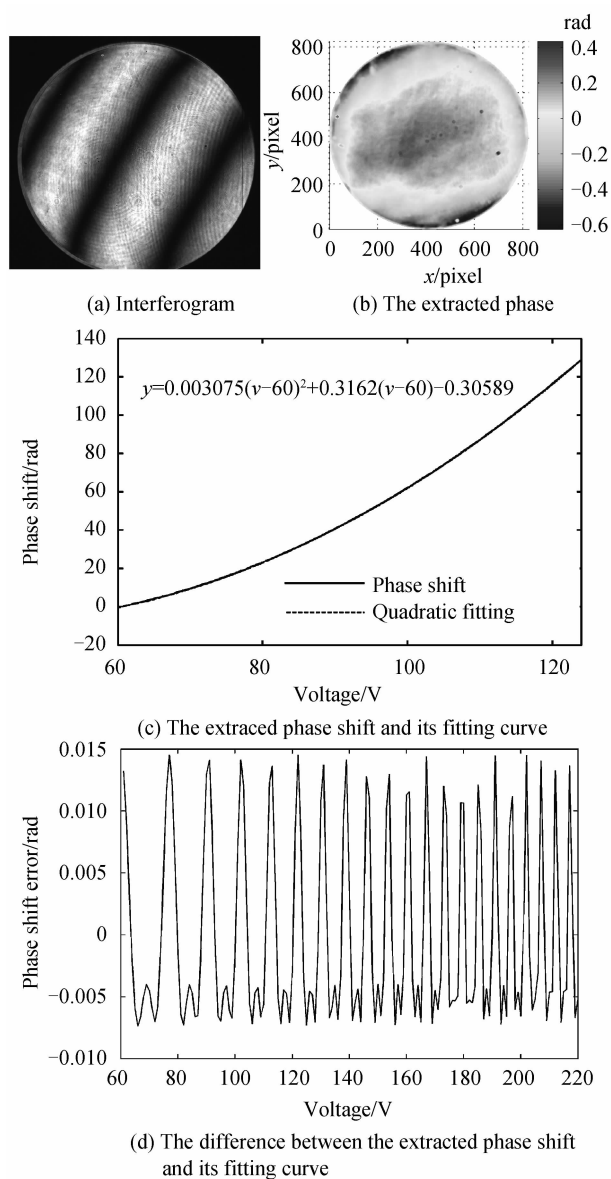


图2 实验结果

Fig.2 Experimental result

提取的相位和相移量如图 2(b)和(c),相位的 PV 值和 RMS 值分别为 1.075 6 rad 和 0.182 9 rad;对相移量进行二次方程拟合,得到压电陶瓷的线性系数  $k_1 = 0.316 2$  和二阶非线性系数  $k_2 = 0.003 075$ 。图 2(c)表示计算得到的相移量分布与其二次方程拟合曲线基本重合,两者之差如图 2(d),图 2(d)的 PV 值小于 0.025 rad。图 2(d)和图 1(c)类似,均为周期分布。表明主元分析方法计算相移量时,其计算误差是周期分布的,对二次方程拟合影响非常小,所以最后得到压电陶瓷的线性系数和非线性系数具有非常高的准确度。图 2(c)表明该压电陶瓷相移器具有明显的非线性。若初始电压是  $v_1$  伏 ( $v_1 \geq 60V$ ),要得到  $n$  帧相移步长为  $0.5\pi$  的干涉图,则其驱动电压应求解方程为

$$\theta_n - \theta_1 = k_1(v_n - v_1) + k_2(v_n - v_1)^2 = 0.5n\pi \quad (15)$$

即

$$v_n = v_1 + \sqrt{k_1^2 + 2n\pi k_2} / 2k_2 \quad (16)$$

若初始电压  $v_1 = 60$  V,要得到 13 帧相移步长为  $0.5\pi$  的干涉图,则后续 12 步的驱动电压应为: 64.748 5、69.125 6、73.206 9、77.045 4、80.679 8、84.139 5、87.447 7、90.622 5、93.678 9、96.629 4、99.484 1 V。因此,通过主元分析得到压电陶瓷的线性系数和非线性系数,利用式(15)和(16)就可以计算得到等步长相移所需的驱动电压,从而实现了压电陶瓷的非线性校准,这对高精度干涉仪具有重要意义。

## 4 结论

本文提出了一种基于主元分析的相移器非线性校准方法。数值模拟结果表明,主元分析方法提取相移量的误差随着干涉图中条纹根数的增多而减小。当干涉图中条纹根数大于 1 时,相移量的计算误差小于 0.05 rad、压电陶瓷的线性系数和二阶非线性系数的计算误差小于  $5 \times 10^{-5}$ 。当干涉图中条纹根数小于 1 时,主元分析方法提取的相移量仍然具有较高准确度。这是由于该方法从一组大量干涉图中提取相位和相移量,而干涉仪压电陶瓷相移器的非线性校准,正好需要处理一组大量干涉图,因此本文方法是一种非常有效的干涉仪相移器非线性校准方法。实验中得到压电陶瓷的相移量和驱动电压之间的非线性关系,从而实现了非线性校准,这对高精度干涉仪具有重要意义。

## 参考文献

- [1] OCHOA N A, OCHOA N A. Convenient method for calibrating nonlinear phase modulators for use in phase-shifting interferometry[J]. *Optical Engineering*, 1998, **37**(9): 2501-2505.
- [2] LANGOJU R, PATIL A, RASTOGI P. Statistical study of generalized nonlinear phase step estimation methods in phase-shifting interferometry [J]. *Applied Optics*, 2007, **46**(33): 8007-14.
- [3] ZHU Yu, CHEN Jin-bang, ZHU Ri-hong, *et al.* Phase calibration method for phase shifting adapter of interferometer [J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(10): 951-954.  
朱煜, 陈进榜, 朱日宏, 等. 干涉仪相移器相位移  $\pi/2$  校准方法的研究[J]. 光子学报, 1999, **28**(10): 951-954.
- [4] LUO Zhi-yong, CHEN Chao-hui, GU Ying-zhi, *et al.* Five-bucket phase-shifting algorithm based on numerical simulation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1687-1690.  
罗志勇, 陈朝晖, 顾英姿, 等. 基于数值模拟的高精度五步相移算法研究[J]. 光学学报, 2006, **26**(11): 1687-1690.
- [5] GOLDBERG K A, BOKOR J. Fourier-transform method of phase-shift determination [J]. *Applied Optics*, 2001, **40**(17): 2886-2890.
- [6] LI Wan-song, SU Xian-yu, SU Li-kun, *et al.* Simultaneous calibration algorithm of phase-shifting based on FFT[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(10): 1390-1395.  
李万松, 苏显渝, 苏礼坤 等. 基于快速傅里叶变换的实时相移校正算法[J]. 光学学报, 1999, **19**(10): 1390-1395.
- [7] XU Zhen-nan, ZHONG Jin-gang. Self-Calibration phase-shifting digital holographic microscopy based on carrier frequency analysis [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2013, **40**

- (12);1209001.  
徐振南,钟金钢.基于载频条纹分析的自定标相移数字全息显微术[J].中国激光,2013,40(12):1209001.
- [8] ZHU Yu, CHEN Jin-bang, ZHU Ri-hong, *et al.* Self-Calibrating for phase-shifting adapter consisting of three PZT [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, 21(4): 468-471.  
朱煜,陈进榜,朱日宏,等.由三个压电陶瓷堆组成的干涉仪移相器的校正与标定[J].光学学报,2001,21(4):468-471.
- [9] SU Zhi-de, SUI Yong-xin, YANG Huai-jiang, *et al.* Calibration of nonlinear phase shifter with iterative least-square method[J]. *Journal of Applied Optics*, 2013, 34(4): 624-628.  
苏志德,隋永新,杨怀江,邵晶.迭代最小二乘法用于非线性移相器的标定[J].应用光学,2013,34(4):624-628.
- [10] VARGAS J, QUIROGA J A, BELENGUER T. Phase-shifting interferometry based on principal component analysis [J] *Optics Letters*, 2011, 36(8): 1326-8.
- [11] XU J, JIN W, CHAI L, *et al.* Phase extraction from randomly phase-shifted interferograms by combining principal component analysis and least squares method [J]. *Optics Express*, 2011, 19(21): 20483-20492.
- [12] XU J, CHEN Z. Quadrature component analysis of interferograms with random phase shifts [J]. *Journal of Optics*, 2014, 16(8): 247-268.
- [13] VARGAS J, CARAZO J M, SORZANO C O S. Error analysis of the principal component analysis demodulation algorithm [J]. *Applied Physics B Lasers & Optics*, 2014, 115(3): 355-364.