

doi: 10.3788/gzxb20164501.0110004

三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩的图像分析

何冰^{1,2}

(1 渭南师范学院 物理与电气工程学院, 陕西 渭南 714099)
(2 陕西省 X 射线检测与应用研究开发中心, 陕西 渭南 714099)

摘 要:提出了一种基于三类边界条件下贝塞尔函数的构造矩—贝塞尔-傅里叶矩,其定义在极坐标系下,可视为一种整体正交复数矩;该矩的正交多项式有较多零点,且多数呈均匀分布.通过对 26 个大写字母二值图像的重构及 1260 幅灰度蝴蝶图像的分类实验来验证所提出矩的有效性,同时提取三类边界条件下贝塞尔-傅里叶矩的不同阶矩作为图像分析的特征值(图像描述质)来表征图像.理论分析和实验结果表明:与正交傅里叶-梅林矩和泽尼克矩相比,三类边界条件下贝塞尔-傅里叶矩更适用于图像的分析 and 旋转不变性的目标识别,且图像重构准确度及不变性识别准确性均更优.

关键词:贝塞尔函数;不变性识别;贝塞尔-傅里叶矩;径向多项式;图像重构

中图分类号:TP751.1

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2016)01-0110004-8

Image Analysis of Bessel-Fourier Moments under Three Kinds of Boundary Conditions

HE Bing^{1,2}

(1 Department of Physics and Electronic Engineering, Wei Nan Normal University, Wei Nan, Shanxi 714099, China)

(2 Center of X Ray Detection and Application of ShaanXi, Wei Nan, Shaanxi 714099, China)

Abstract: A set of moments was proposed based on Bessel function under three kinds of boundary conditions, named Bessel-Fourier moments, which are defined in polar coordinate and regarded as a generalized orthogonality complex moment. The radical polynomials of the Bessel-Fourier moments have many zero points and most of them are distributed uniformly. The reconstruction experiments of 26 uppercase binary images and the classification experiments of 1260 gray butterfly images were used to validate the proposed method, and different Bessel-Fourier moments under three kinds of boundary conditions were extracted as the feature values of image analysis (image descriptor). Theoretical and experimental results show that, compared with the orthogonal Fourier-Mellin and Zernike moments, the Bessel-Fourier moments are more suitable in image analysis and rotation-invariant object recognition, and performed better than the orthogonal Fourier-Mellin and Zernike moments in terms of image reconstruction capability and invariant recognition accuracy.

Key words: Bessel function; Invariant recognition; Bessel-Fourier moments; Radical polynomials; Image reconstruction

OCIS Codes: 100.5760; 100.2960; 100.3010; 070.5010

0 引言

矩因其具有整体表述全局特征的能力,因此在图像分析领域有着广泛的应用,如视觉模式识别^[1-2]、目

标分类^[3]、模板匹配^[4]、机器人技术^[5]、数字水印^[6]及边缘检测等^[7].信号重构准确度取决于多项式的正交性,正交基是信号重构最理想的函数.几何矩、复数矩和旋转矩都是非正交常规矩,因此使图像重构变得非

基金项目:陕西省教育厅科研计划项目(No. 14JK1248)、渭南市基础科研发展计划项目(No. 2015KYJ-2-1)、渭南师范学院第二批特色学科建设项目(No. 14TSXK06)和渭南师范学院科研计划项目(No. 15YKS010)资助

第一作者:何冰(1982-),男,讲师,硕士,主要研究方向为智能图像数据处理、信息安全. Email:hebing126@126.com

收稿日期:2015-08-10;录用日期:2015-11-05

常困难;另外,非正交矩具有信息冗余性,对于噪声较为敏感^[8].

P. Njionou Sadjang^[9]使用满足正交性的多项式构建了正交矩,如泽尼克(Zernike Moments, ZMS)和勒让德矩,克服了常规矩带来的问题,其中泽尼克矩能够以最小的信息冗余量来表征图像信息,且具有旋转不变性,因此被广泛应用于字符识别、数字水印等领域;D. Broggio^[10]等提出一种改进的泽尼克矩可以有效识别二维和三维目标,对于噪声和几何失真具有很好的鲁棒性,勒让德矩是利用其多项式构建的, Tech^[11]和 Mukuadm^[12]对该矩在图像表达能力、信息冗余度、噪声敏感性以及矩计算复杂度等方面进行了深入研究;Yang^[13]等利用勒让德矩对灰度图像进行了分析研究;Sheng^[14]等利用一组径向多项式构建了一种新的正交矩-傅里叶梅林矩(Orthogonal Fourier-Mellion Moments, OFMs),并通过实验证明了新构建矩在图像重构能力和噪声敏感度上的性能均优于泽尼克矩;Papakostas^[15]等提出了一种有效计算正交傅里叶-梅林矩的方法. Xiao^[16]等在极坐标系下提出了一种基于贝塞尔-傅里叶矩的图像分析方法(First Bessel-Fourier Moments, FBFMs),其性能在图像重构精确度和图像识别正确率方面均优于泽尼克矩和正交傅里叶-梅林矩,然而,这些文献只讨论了带参量 λ 的贝塞尔方程在第一种边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩的分析过程,且只给出了类似泽尼克矩、正交傅里叶-梅林矩在极坐标系下单位圆内满足正交性的归一化常量结果,并未给出归一化常量的计算方法.近年来,相关学者也将贝塞尔-傅里叶矩应用到图像检索领域,并通过仿真实验证明了此复数矩的有效性.

关于离散正交矩研究成果的报道越来越多, Mukandan^[17]等利用离散切比雪夫多项式构建了一组离散正交矩,因不涉及任何数值逼近运算,其基函数能够精确地满足正交性,使得图像重构效果优于常规连续正交矩;此外,经典的离散正交矩如 Krawtchouk 矩^[18]、汉明矩^[19]和 Racah 矩^[20]在图像分析领域应用越来越广泛.然而这些矩都是在直角坐标系中构建的,因此不能满足图像的旋转不变性.泽尼克和正交矩-傅里叶梅林矩都是被定义在极坐标系中的,图像的旋转不会改变其矩的幅值系数,因此具有旋转不变性.

本文以三种边界条件下的贝塞尔函数^[21]为基础,在极坐标系下定义了一组正交矩,称为贝塞尔-傅里叶矩,与泽尼克和正交矩-傅里叶梅林矩相似,容易实现图像重构及旋转不变性;另外,由于贝塞尔-傅里叶矩具有良好的正交性,在图像重构和不变性识别的精确性方面,其性能均优于泽尼克和正交矩-傅里叶梅林矩.因此,塞尔-傅里叶矩可用于旋转不变性的目标识别领域.

1 贝塞尔-傅里叶矩

1.1 第一类贝塞尔函数

贝塞尔-傅里叶矩是一组基于第一类贝塞尔函数的矩,第一类贝塞尔函数^[21]的定义为

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \end{cases} \quad (1)$$

式中, ν 为实数, $\Gamma(n)$ 为 gamma 函数且为

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, (\text{Re}(n) > 0)$$

特别地, $\Gamma(n+1) = n! (n=0, 1, 2, \dots)$

贝塞尔函数是贝塞尔方程(2)的解

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2)$$

特别地,当

$\nu = n (n=0, 1, 2, \dots)$ 时

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (3)$$

1.2 贝塞尔-傅里叶矩

$J_\nu(u_n x) (n=1, 2, \dots)$ 作为带参量 λ 的贝塞尔方程^[21]为

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (4)$$

在边界条件 $y|_{x=0} < \infty, y|_{x=1} \leq 0$ 或 $y'|_{x=1} = 0, (y' + h y)|_{x=1} = 0$ 下的本征函数正交性表示为

$$\int_0^1 x J_\nu(u_n x) J_\nu(u_m x) dx = N \delta_{nm} \quad (\rho(x) = x) \quad (5)$$

式中 $\rho(x)$ 为权函数, δ_{nm} 为克罗内克符号, N 称之为归一化的常量且表示为

$$N = \frac{1}{2} \left\{ \left[J'_\nu(u_n) \right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(u_n) & J_\nu(u_n) = 0, \text{(I)} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) & J'_\nu(u_n) = 0, \text{(II)} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2 - \nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) & u_n J'_\nu(u_n) + h J_\nu(u_n) = 0, \text{(III)} \end{cases} \quad (6)$$

式中,(I)代表第一类边界条件,(II)代表第二类边界条件,(III)代表第三类边界条件(正交性详见附件).

三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩的定义(极坐标系下)为

$$\begin{aligned} FB_{m\nu} &= \frac{1}{\pi J_{\nu+1}(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_\nu(u_n r) e^{-jm\theta} r dr d\theta \quad (7) \\ SB_{m\nu} &= \frac{1}{\pi \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot \\ & J_\nu(u_n r) e^{-jm\theta} r dr d\theta \quad (8) \\ TB_{m\nu} &= \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{h^2 - \nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot \end{aligned}$$

$$J_\nu(u_n r) e^{-j\nu\theta} r dr d\theta \quad (9)$$

式中, $f(r, \theta)$ 表示极坐标系的二维图像, $n=0, 1, 2, \dots$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 表示图像矩的阶数; $J_\nu(u_n r)$ 表示径向贝塞尔多项式, 并且在区间 $[0, 1]$ 满足正交性. $J_\nu(u_n r) e^{-j\nu\theta}$ 称为贝塞尔-傅里叶矩的基函数, 且在单位圆内满足正交性, 表示为

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} [J_\nu(u_n r) e^{-j\nu\theta}]^* J_\nu(u_m r) e^{-j\nu\theta} r dr d\theta = 2\pi N \delta_{nm} \delta_{\nu\mu} \quad (10)$$

通过求解式(5)~(9)等式, 极坐标系下的三类边界条件下的二维图像在单位圆内可以由贝塞尔-傅里叶矩来重构:

第一类边界下的重构为

$$\bar{f}_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{m=1}^{m_{\max}} FB_{nm} J_\nu(u_n r) e^{j\nu\theta} \quad (11)$$

第二类边界下的重构为

$$\bar{f}_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{m=1}^{m_{\max}} SB_{nm} J_\nu(u_n r) e^{j\nu\theta} \quad (12)$$

第三类边界下的重构为

$$\bar{f}_3(r, \theta) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{m=1}^{m_{\max}} TB_{nm} J_\nu(u_n r) e^{j\nu\theta} \quad (13)$$

1.3 贝塞尔-傅里叶矩的旋转不变性

极坐标下将原始图像 $f(r, \theta)$ 旋转角度 φ 后, 记为 $f^r(r, \theta)$, 则

$$f^r(r, \theta) = f(r, \theta - \varphi) \quad (14)$$

根据式(8)旋转后图像的贝塞尔-傅里叶矩(第二类边界条件下)可表示为

$$SB'_{nm} = \frac{1}{\pi J_{\nu+1}(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta - \varphi) J_\nu(u_n r) e^{-j\nu\theta} r dr d\theta \quad (15)$$

令 $\theta' = \theta - \varphi$, 则 $\theta = \theta' + \varphi$, 式(14)可表示为

$$SB'_{nm} = \frac{1}{\pi J_{\nu+1}(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta') J_\nu(u_n r) e^{-j\nu(\theta'+\varphi)} r dr d\theta' = \frac{1}{\pi J_{\nu+1}(u_n)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta') J_\nu(u_n r) e^{-j\nu\theta'} r dr d\theta' \left] e^{-j\nu\varphi} = SB_{nm} e^{-j\nu\varphi} \quad (16)$$

式(16)表明将原始图像旋转 φ 角度后, 贝塞尔-傅里叶矩只是相位发生了平移, 而其幅值保持不变. 由此说明, 贝塞尔-傅里叶矩的幅值 $|SB_{nm}|$ 对于图像旋转具有不变性, 可以作为一种旋转不变矩用作图像分析、目标识别.

2 实验结果分析

为了验证所提出的三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩算法的有效性, 进行了两组实验.

2.1 贝塞尔-傅里叶矩的图像重构分析

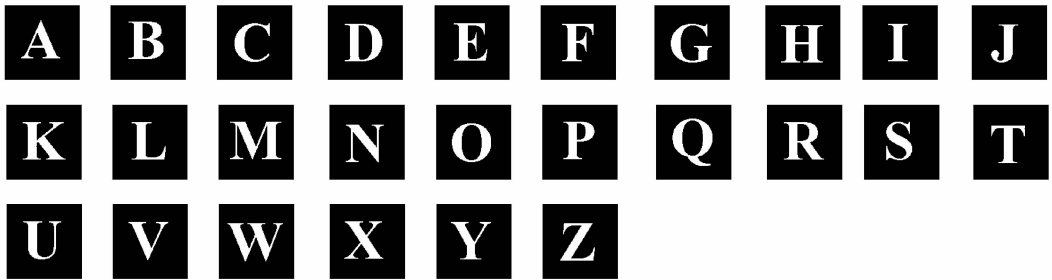
给出了三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩的图像重构能力, 图像重构的效果可用式(17) [18] 来衡量, 即

$$\epsilon = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} |f(x, y) - T(\bar{f}(x, y))| \quad (17)$$

式中, $f(x, y)$ 表示原始图像, $\bar{f}(x, y)$ 表示重构后的图像, $T(z)$ 是二值化操作函数且为

$$T(z) = \begin{cases} 0 & z < 0.5 \\ 1 & z \geq 0.5 \end{cases} \quad (18)$$

图 1(a) 给出了 26 个英文大写字母组成的二值图像, 作为测试图像集, 每个英文字母的大小为 32×32 ; 图 1(b)、(c)、(d) 分别为在第一、第二、第三类边界条件下使用 14 阶矩重构的 26 个大写字母二值图像.



(a) Set of 26 uppercase English letters used as test images

Images										
ϵ (FBFMs)	13	14	9	25	8	5	15	12	6	8
Images										
ϵ (FBFMs)	9	8	18	12	22	4	25	10	11	10
Images										
ϵ (FBFMs)	7	12	29	14	15	10				

(b) Image reconstruction using Bessel-Fourier moments under first boundary condition

Images	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ϵ (SBFMs)	11	9	5	15	7	8	12	9	4	7
Images	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
ϵ (SBFMs)	8	10	15	14	16	3	21	8	11	10
Images	U	V	W	X	Y	Z				
ϵ (SBFMs)	7	13	24	16	15	9				

(c) Image reconstruction using Bessel-Fourier moments under second boundary condition

Images	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ϵ (TBFMs)	18	10	8	11	10	10	14	9	4	10
Images	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
ϵ (TBFMs)	12	10	24	17	25	4	28	8	15	11
Images	U	V	W	X	Y	Z				
ϵ (TBFMs)	9	18	31	19	19	18				

(d) Image reconstruction using Bessel-Fourier moments under third boundary condition

图1 实验图像集

Fig.1 Images of experiment

式(5)~(9)中,取 $v=1, h=2$,由图1(b)~(d)可知,三类边界条件下,在相同阶数情况下,第二类边界条件贝塞尔-傅里叶矩(Second Bessel-Fourier Moments, SBFMs)^[21]的重构性能优于另外两种边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩(第一类边界条件 FBFMs 和第三类边界条件(Third Bessel-Fourier Moments,

TBFMs)。

在无噪声干扰情况下使用第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩(SBFMs)对大小为 32×32 的大写英文字母“E”二值图像进行了重构测试,并与正交傅里叶-梅林矩(OFMs)、泽尼克矩(ZMs)及 FBFMs 的重构效果进行了对比。图2、图3给出了在极坐标系下的四种






































										
		OFMs								
Images										
ϵ (OFMs)	128	102	86	76	71	69	67	66	63	
		ZMs								
Images										
ϵ (ZMs)	156	83	48	43	33	29	17	14	12	
		FBFMs								
Images										
ϵ (FBFMs)	96	67	46	29	27	18	16	13	8	
		SBFMs								
Images										
ϵ (SBFMs)	85	64	33	24	20	13	12	11	6	
Number of moments	15	28	45	66	91	120	153	190	220	

图2 四种不同正交矩的重构效果

Fig.2 The results of image reconstruction for 4 orthogonal moments

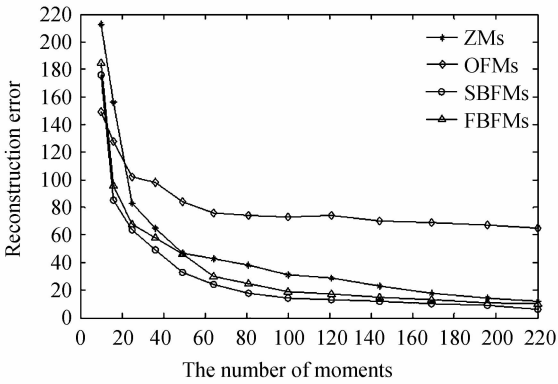


图3 四种不同正交矩的重构误差

Fig. 3 The reconstruction error for 4 orthogonal moments 不同正交矩(SBFMs、OFMs、ZMs、FBFMs)的10~220个独立矩所重构的图像及其重构误差. 结果表明,在一定数目的矩的情况下,使用SBFMs重构的二值图像与原始二值图像相比具有较高的视觉相似度,同时其重构二值图像的边缘细节部分较为平滑(粗糙度较低);这主要是由于第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩(SBFMs)的径向多项式 $J_v(u_n r)$ 与正交傅里叶-梅林矩(OFMs)、泽尼克矩(ZMs)的径向多项式相比有更多的

零点,且这些零点呈均匀分布(零点的数目和位置决定了图像采样点的个数及采样的位置),这种特性决定了使用贝塞尔-傅里叶矩可以很好地表征图像特征;另外,由图3可知,随着矩数目的增多,第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩(SBFMs)、正交傅里叶-梅林矩(OFMs)、泽尼克矩(ZMs)及 FBFMs 的重构误差均逐渐减小,但是,SBFMs 的重构误差明显小于 OFMs、ZMs 和 FBFMs.

噪声对图像的重构质量具有一定的干扰性,为了验证所提出的三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩对噪声的鲁棒性,以第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩为例,将10%的椒盐噪声加入到大写英文字母“E”的二值图像中,重构的实验结果如图4. 从图中可知,三种不同的矩(SBFMs、OFMs、ZMs、FBFMs)在图像重构时对于噪声都具有一定的抑制作用,因为对图像而言其噪声主要分布在其高频区域,而低阶矩对于噪声并不敏感,因此重构的图像比较接近原始图像;与正交傅里叶-梅林矩、泽尼克矩及 FBFMs 相比,第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩对椒盐噪声的鲁棒性更高.

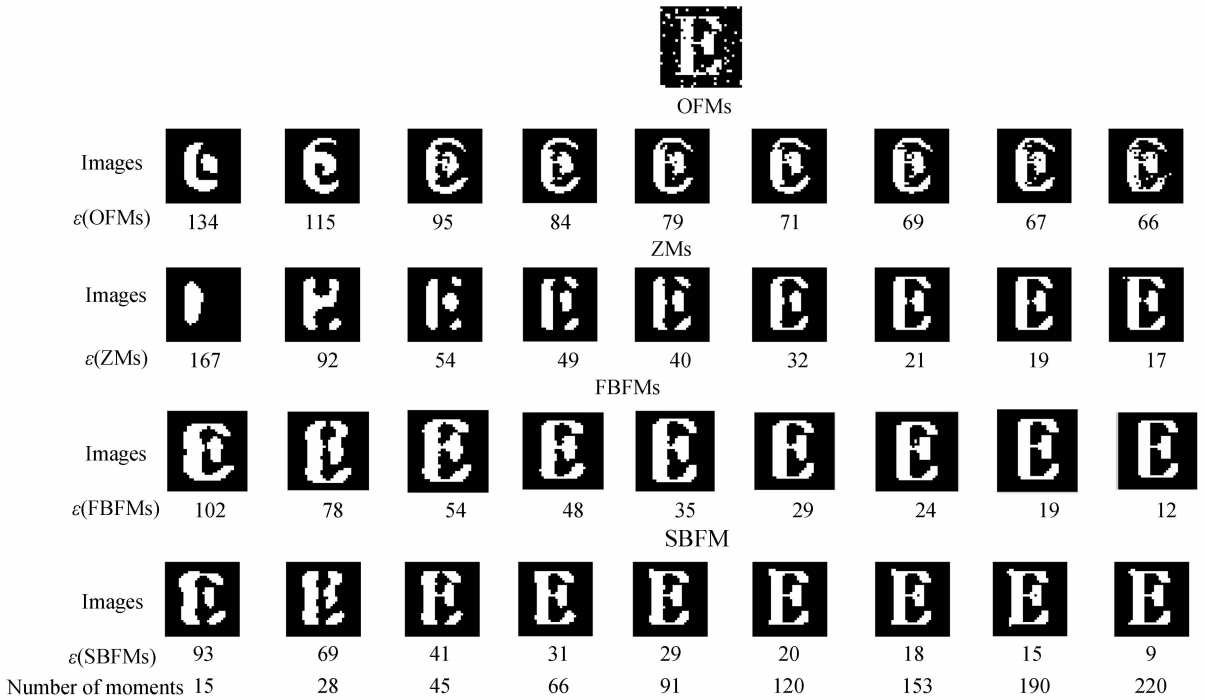


图4 加入10%的椒盐噪声后的 SBFMs、FBFMs、ZMs 和 OFMs 的重构误差比较

Fig. 4 Comparison of image reconstruction error with 10% salt and pepper noise for 4 orthogonal moments

2.2 目标识别实验

将第二类边界条件下的贝塞尔-傅里叶旋转不变矩在平滑滤波条件下与正交傅里叶-梅林矩、泽尼克矩及 FBFMs 的性能进行比较. 实验中,分别取三种不变矩的20,40,60阶矩作为特征分类值,使用 K-Nearest Neighbor(KNN)和 Support Vector Machine(SVM)分

类器分别作为目标分类的实现方法.

使用35幅大小为 64×64 的蝴蝶灰度图像作为训练集,如图5. 将训练集中每幅图像在 $0 \sim 360^\circ$ 中每隔 10° 旋转后形成测试集图像,测试集共1260幅灰度图像(35×36);为了测试所提出算法对滤波失真的鲁棒性,将测试集中每幅图像进行相应的平滑滤波(滤波

模板大小为 $3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7, 9 \times 9$ 。表 1 给出了两种分类器下的分类结果,由实验结果可知,20~40 阶矩时,泽尼克矩的性能均优于第二类边界条件(SBFMs)下的贝塞尔-傅里叶矩、FBFMs 和正交傅里叶-梅林矩;

然而,当矩的数目增加到 60 阶以上时,第二类边界条件(SBFMs)下的贝塞尔-傅里叶矩的识别准确度均优于另外三种正交矩。

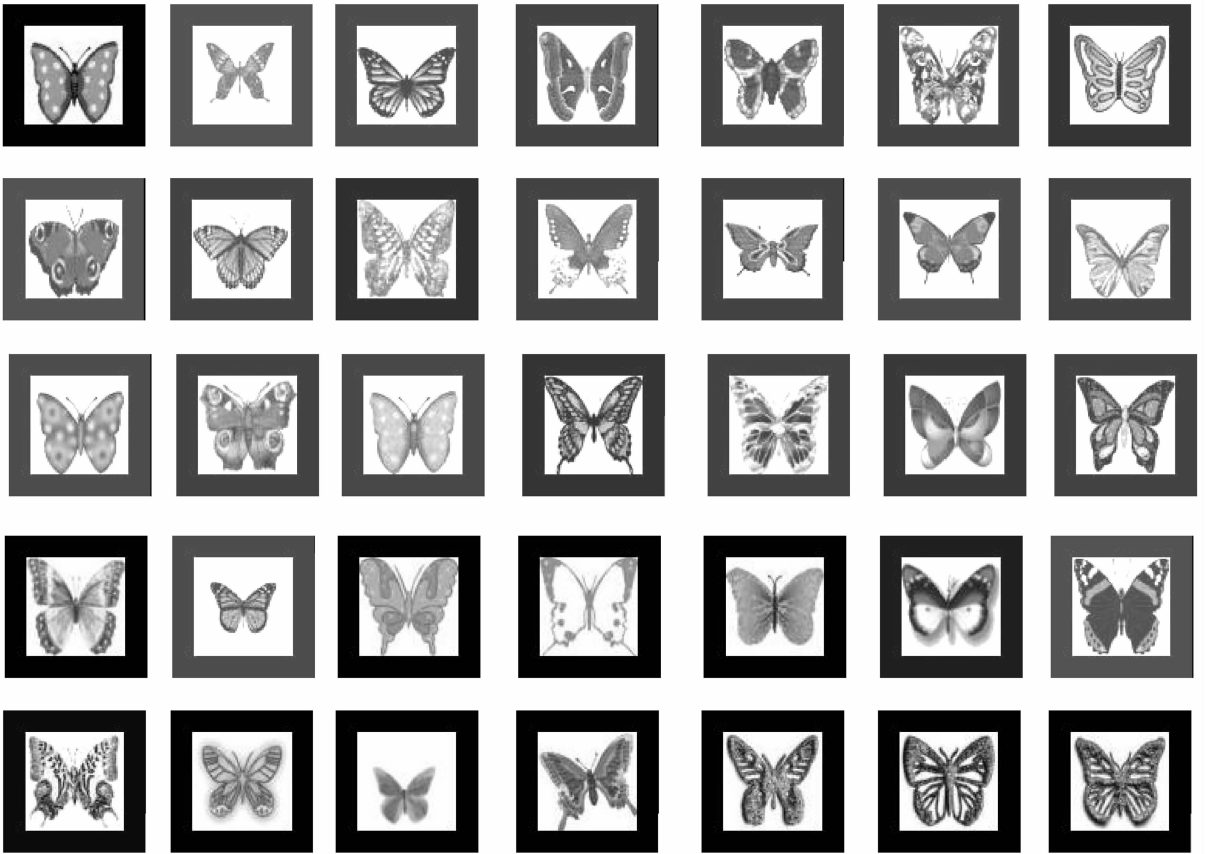


图 5 35 幅大小为 64×64 的蝴蝶图像

Fig. 5 35 butterfly pictures of 64×64 used in the recognition experiment

表 1 四种正交矩在平滑滤波下的正确分类情况

Table 1 Correct classification of 4 orthogonal moments under smooth distortion condition

Number of moments	CCPs/ (%)	KNN(SVM)			
		ZMs	OFMs	SBFMs	FBFMs
20	3×3	100(100)	99.5(98.2)	100(99.6)	100(99.6)
	5×5	96.2(95.7)	93.6(93.5)	95.8(96.1)	94.2(95.9)
	7×7	89.3(81.2)	81.2(79.5)	90.1(80.5)	89.8(80.2)
	9×9	80.2(81.4)	69.2(70.2)	75.3(78.6)	74.9(78.1)
40	3×3	100(100)	99.8(99.2)	100(99.9)	100(99.9)
	5×5	97.6(96.4)	95.2(94.8)	97.2(97.4)	96.6(96.8)
	7×7	89.8(82.5)	83.4(82.2)	87.6(89.2)	88.8(86.7)
	9×9	78.2(71.6)	59.2(61.8)	68.9(67.2)	67.3(66.8)
60	3×3	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	5×5	98.2(97.9)	97.2(96.8)	99.8(99.5)	99.2(99.4)
	7×7	90.6(89.7)	86.3(84.7)	91.5(90.7)	90.9(90.2)
	9×9	61.3(59.8)	49.9(45.3)	65.8(61.3)	60.5(60.8)

表 2 四种正交矩在不同比例椒盐噪声下的正确分类情况

Table 2 Correct classification of 4 orthogonal moments under both noise-free and noisy conditions

Number of moments	CCPs/ (%)	KNN(SVM)			
		ZMs	OFMs	SBFMs	FBFMs
20	0	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	5%	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	10%	100(100)	99.9(99.4)	99.8(99.7)	99.6(99.5)
	15%	96.2(96.8)	93.2(95.2)	96.9(97.8)	95.7(97.2)
	20%	89.2(88.4)	79.8(77.2)	92.9(90.4)	92.1(87.8)
40	0	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	5%	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	10%	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	15%	97.1(95.2)	96.9(95.2)	99.3(98.8)	99.2(98.6)
	20%	84.2(82.6)	81.2(80.4)	84.9(90.2)	82.6(89.7)
60	0	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	5%	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	10%	100(100)	100(100)	100(100)	100(100)
	15%	100(97.8)	100(96.7)	100(100)	100(100)
	20%	90.2(90.8)	88.5(87.1)	93.9(92.5)	92.6(91.8)

为了测试所提出算法对椒盐噪声的鲁棒性,将测试集中每幅图像引入一定比例的椒盐噪声(噪声比例大小依次为5%、10%、15%、20%),如图6。通过表2

给出的分类实验结果可知,第二类边界条件(SBFMs)下的贝塞尔-傅里叶矩对于椒盐噪声具有一定的鲁棒

性,并且其识别准确度均优于泽尼克矩、正交傅里叶-梅林矩及FBFMs.

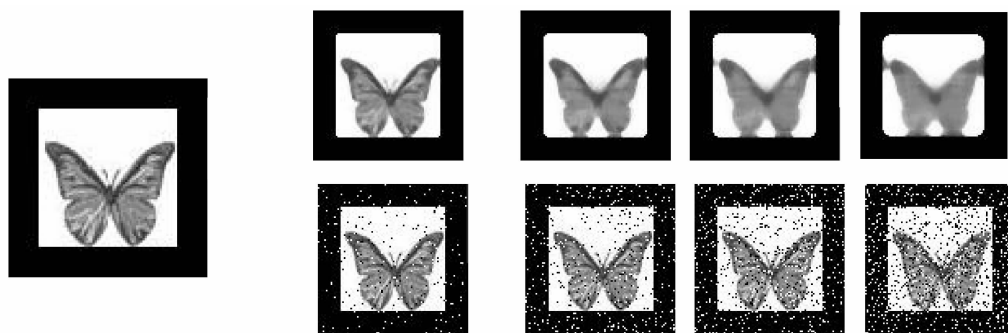


图6 平滑滤波(3×3 、 5×5 、 7×7 、 9×9)和加入椒盐噪声(5%、10%、15%、20%)

Fig. 6 Smooth filter and salt-and-peper noise, the size of smooth windows is 3×3 、 5×5 、 7×7 、 9×9 ; the density of salt-and-peper noise is 5%、10%、15%、20%

3 结论

本文提出了一种基于第一类贝塞尔函数下的三组连续正交矩(正交复数矩),因其是在带参量的贝塞尔函数的三类边界条件下求得,所以分别称为第一类边界下的贝塞尔-傅里叶矩(FBFMs)、第二类边界下的贝塞尔-傅里叶矩(SBFMs)和第三类边界下的贝塞尔-傅里叶矩(TBFMs),同时给出了三类边界条件下带参量贝塞尔函数的正交性结果的证明.这三类边界条件下的贝塞尔-傅里叶矩因其径向多项式与正交傅里叶-梅林径向多项式、泽尼克径向多项式相比有更多的正零点,并且这些正零点呈均匀分布,所以该贝塞尔-傅里叶矩(第二类贝塞尔-傅里叶矩 SBFMs)更适合于图像的分析及目标的旋转不变性识别.实验结果表明:所提出的新构建的三类旋转不变矩(特别是第二类贝塞尔-傅里叶矩),在图像重构、图像识别(平滑失真、噪声干扰等)情况下,其性能均优于正交傅里叶-梅林矩及泽尼克矩,因此在未来实际的图像应用领域中,具有一定的工程应用价值.

参考文献

- [1] LI Hui-hui, XING Jin. The recognition of landed aircrafts based on PCNN model and affine moment invariants [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2015, **51**(1): 23-29.
- [2] PAPAKOSTAS G A. Moment-based local binary patterns: A novel descriptor for invariant pattern recognition applications [J]. *Neurocomputing*, 2013, **99**(1): 358-371.
- [3] GUO Li-qiang, DAI Ming, ZHU Ming. Quaternion moment and its invariants for color object classification [J]. *Information Sciences*, 2014, **20**(273): 132-143.
- [4] FARHAN UIIAH, et al. Using orientation codes for rotation-invariant template matching[J]. *Pattern Recognition*, 2004, **37**(2): 201-209.
- [5] XU Wang-bao, CHEN Xue-bo. Function-segment artificial moment method for sensor-based path planning of single robot in complex environments[J]. *Information Sciences*, 2014, **1**(280): 64-81.
- [6] WANG Xiang-yang, NIU Pan-pan. A new robust color image watermarking using local quaternion exponent moments[J]. *Information Sciences*, 2014, **1**(277): 731-754.

- [7] DA Fei Pen, HU Zhang. Sub-pixel edge detection based on an improved moment[J]. *Image and Vision Computing*, 2010, **12**(28): 1645-1658.
- [8] ABU-MOSTAFA Y S, PSALTIS D. Recognitive aspect of moment invariants[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, **PAMI-6**: 698-706.
- [9] SADJANG P N, KOEPF W. On moments of classical orthogonal polynomials[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **1**(424): 122-151.
- [10] BROGGIO D. Comparison of organs shapes with geometric and Zernike 3D moments [J]. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2013, **3**(11): 740-754.
- [11] TEH C H, CHIN R T. On image analysis by the methods of moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analytical Machine Intelligence*, 1988, **10**(4): 496-512.
- [12] MUKUNDAN R, RAMAKRISHUAN K R. Fast computation of Legendre and Zernike moments[J]. *Pattern Recognition*, 1995, **28**(9): 1433-1442.
- [13] YANG G Y, SHUA H Z, TOUMOULIN C, et al. Efficient Legendre moment computation for grey level images [J]. *Pattern Recognition*, 2006, **39**(1): 74-80.
- [14] SHENG Y, SHEN L. Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition [J]. *Optical Society of America*, 1994, **11**(6): 1748-1757.
- [15] PAPAKOSTAS G A, BOUTALIS Y S, KARRAS D A, et al. Fast numerically stable computation of orthogonal Fourier-Mellin moments[J]. *IET Computer Vision*, 2007, **1**(1): 11-16.
- [16] XIAO Bin, MA Jian-feng, WANG Xuan. Image Analysis by Bessel- Fourier Moments[J]. *Pattern Recognition*, 2010, **43**(3): 2620-2629.
- [17] MUKUNDAN R, ONG S H, LEE P A. Image analysis by Tchebichef moments [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(9): 1357-1364.
- [18] YAP P, PARMEDRAN R, ONG S H. Image analysis by Krawtchouk moments [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, **12**(11): 1367-1377.
- [19] ZHU H Q, SHU H Z, LIANG J, LUO L M. Image analysis by discrete orthogonal dual-Hahn moments [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2007, **28**(13): 1688-1794.
- [20] ZHU H Q, SHU H Z, et al. Image reconstruction and compression by discrete orthogonal Racah moments [J]. *Signal Processing*, 2007, **87**(4): 687-708.
- [21] AMOS D E. A portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1986, **12**(3): 265-273.

附录：三类边界条件下的带参量贝塞尔函数的正交性证明(见正文部分式(6))

(1)证明 $k \neq n$ 时 $\int_0^1 x J_\nu(u_k x) J_\nu(u_n x) dx = 0$

式(4)的 Sturm-Liouville 方程(简称 S-L 型)为

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0 \tag{1}$$

则 $J_\nu(u_k x)$ 和 $J_\nu(u_n x)$ 分别满足方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) \right] + \left(\lambda_k x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) = 0 & \sqrt{\lambda_k} = u_k \\ \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) \right] + \left(\lambda_n x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) = 0 & \sqrt{\lambda_n} = u_n \end{cases}$$

第一式乘 $J_\nu(u_n x)$, 第二式乘 $J_\nu(u_k x)$, 然后相减得

$$J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) \right] - J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) \right] + (\lambda_k - \lambda_n) x J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) = 0$$

即

$$\frac{d}{dx} \{ x [\sqrt{\lambda_k} J'_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) - \sqrt{\lambda_n} J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) J'_\nu(\sqrt{\lambda_n} x)] \} + (\lambda_k - \lambda_n) x J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) = 0$$

上式从 $x=0$ 到 $x=1$ 对 x 积分, 得

$$(\lambda_k - \lambda_n) \int_0^1 x J_\nu(\sqrt{\lambda_k} x) J_\nu(\sqrt{\lambda_n} x) dx = [\sqrt{\lambda_n} J_\nu(\sqrt{\lambda_k}) J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_k} J_\nu(\sqrt{\lambda_n}) J'_\nu(\sqrt{\lambda_k})] = u_n J_\nu(u_k) J'_\nu(u_n) - u_k J_\nu(u_n) J'_\nu(u_k) \tag{2}$$

但在 $x=1$, y 满足三类齐次边界条件, 可以统一写为

$$\alpha_1 y' + \alpha_2 y |_{x=1} = 0 \tag{3}$$

式中 α_1, α_2 是不同时为零的常量.

以 $y = J_\nu(u_n x)$ 和 $y = J_\nu(u_k x)$ 代入式(3), 分别有

$$\begin{cases} \alpha_1 u_n J'_\nu(u_n) + \alpha_2 J_\nu(u_n) = 0 \\ \alpha_1 u_k J'_\nu(u_k) + \alpha_2 J_\nu(u_k) = 0 \end{cases}$$

上式要求 α_1, α_2 不同时为零, 则必有

$$\begin{vmatrix} u_n J'_\nu(u_n) & J_\nu(u_n) \\ u_k J'_\nu(u_k) & J_\nu(u_k) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{即}$$

$$u_n J_\nu(u_k) J'_\nu(u_n) - u_k J_\nu(u_n) J'_\nu(u_k) = 0$$

代入式(2), 得

$$(\lambda_k - \lambda_n) \int_0^1 x J_\nu(u_k x) J_\nu(u_n x) dx = 0$$

但因 $\lambda_k \neq \lambda_n$, 因而

$$\int_0^1 x J_\nu(u_k x) J_\nu(u_n x) dx = 0$$

(2)证明 $k = n$ 时

$$\int_0^1 x J_\nu^2(u_k x) dx = N = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(u_n)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) \right\} \tag{4}$$

由式(2), 有

$$\int_0^1 x J_\nu(u_k x) J_\nu(u_n x) dx = \frac{u_n J_\nu(u_k) J'_\nu(u_n) - u_k J_\nu(u_n) J'_\nu(u_k)}{u_k^2 - u_n^2}$$

令 $u_k \rightarrow u_n$, 则上式左端为式(4)的左端, 而上式右端即是“ $\frac{0}{0}$ ”型的不定式, 因而

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu^2(u_k x) dx &= \lim_{u_k \rightarrow u_n} \frac{u_n J_\nu(u_k) J'_\nu(u_n) - u_k J_\nu(u_n) J'_\nu(u_k)}{u_k^2 - u_n^2} = \lim_{u_k \rightarrow u_n} \frac{u_n J'_\nu(u_k) J'_\nu(u_n) - J_\nu(u_n) J'_\nu(u_k)}{2u_k} - \frac{u_k J''_\nu(u_k) J_\nu(u_n)}{2u_k} \\ &= \frac{1}{2u_n} \{ u_n [J'_\nu(u_n)]^2 - J'_\nu(u_n) J'_\nu(u_n) - u_n J''_\nu(u_n) J_\nu(u_n) \} \end{aligned} \tag{5}$$

由于 $J_\nu(x)$ 满足贝塞尔方程, 即

$$x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$$

因而

$$u_n^2 J''_\nu(u_k) + u_n J'_\nu(u_n) + (u_n^2 - \nu^2) J_\nu(u_n) = 0 \quad u_n J''_\nu(u_n) = J'_\nu(u_n) + u_n \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n} \right) J'_\nu(u_n)$$

上式代入式(5), 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu^2(u_n x) dx &= \frac{1}{2u_n} \left\{ u_n [J'_\nu(u_n)]^2 - J_\nu(u_n) J'_\nu(u_n) + J_\nu(u_n) [J'_\nu(u_n) + u_n \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n} \right) J'_\nu(u_n)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(u_n)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) \right\} = N \end{aligned}$$

对第一类齐次边界条件, $J_\nu(u_n) = 0$, 因而 $N = \frac{1}{2} [J'_\nu(u_n)]^2 = \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(u_n)$

对第二类齐次边界条件, $J'_\nu(u_n) = 0$, 因而

$$N = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n)$$

对第三类齐次边界条件, $u_n J'_\nu(u_n) + h J_\nu(u_n) = 0$, 因而

$$N = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{h}{u_n} J_\nu(u_n) \right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n) \right\} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2 - \nu^2}{u_n^2} \right) J_\nu^2(u_n)$$

证完.

Foundation item: Research fund of Shaanxi Provincial Education Department(No. 14JK1248); Scientific research and development fund of Wen nan city(No. 2015KYJ-2-1); The second batch of characteristic discipline fund of Wei nan Normal University(No. 14TSXK06); Research fund project of Wei nan Normal University(No. 15YKS010)