

doi:10.3788/gzxb20154409.0911001

波前正交编码阵列被动测距系统

陈家凤, 李春芳

(中南民族大学 电子信息工程学院, 武汉 430074)

摘 要:针对单孔径正交编码被动测距系统存在的工作距离与探测准确度的矛盾,建立一种由多个传感器构成的线性阵列正交编码测距系统.给出了线性阵列系统的结构,通过将各个传感器形成的编码图像求和,得出了阵列系统和单孔径系统的光学调制传递函数的关系,推导了两个传感器间最佳间距的数学表达式;分析了采用最小冗余线性阵列结构能够获得更多的独立空间响应和调制余弦项,给出了由多对传感器组合构成的阵列系统的阵列响应;利用费希尔信息矩阵分析了阵列系统距离估计的克莱姆-拉奥限.理论和模拟结果表明:采用阵列系统进行探测,能使调制传递函数中与距离有关的峰值的带通区域变窄,使距离估计的最小方差限减小,其探测准确度至少提高一倍.

关键词:正交波前编码;被动测距;线性阵列结构;调制传递函数;克莱姆-拉奥限

中图分类号:O438.2

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2015)09-0911001-6

Array Passive Ranging System Based on Orthogonal Wave-front Coding

CHEN Jia-feng, LI Chun-fang

(College of Electronics and Information Engineering, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract: Aiming at the contradiction between maximum working distance and detecting accuracy for single-aperture orthogonal coding passive ranging system, a linear array orthogonal wavefront-coding ranging system consisting of multiple ranging sensors was established. The linear array geometry was given. The relation of OTF for array system and single-aperture system was obtained by summing multiple coding images from each sensor. The mathematic expression of optimal array separation for two-sensor array geometry was deduced. The minimum-redundancy linear array geometry can generate the more unique spacing responses and modulation cosine terms. The array response for multiple pair of sensors was obtained. The Cramer-Rao bound of range estimation was analyzed using Fisher information matrix. Theoretical and simulated results show that array ranging system can narrow bandpass region of range-dependent peak in the MTF, and lower minimum variance bound of range estimation, and improve detecting accuracy by double at least, as compared to the single aperture system for a given range.

Key words: Orthogonal wave-front coding; Passive ranging; Linear array geometry; MTF; Cramer-Rao bound

OCIS Codes: 110.7348; 120.4820; 040.1240; 110.4100; 070.4790

0 引言

被动测距具有掩蔽性高、组件少、成本低等特点,因此在许多领域获得了广泛应用.波前编码技术^[1-5]是将传统的光学系统设计和数字图像处理技术相结合的一种新型技术.波前正交编码被动测距系统^[6-10]是通过

在传统的非相干光学系统的孔径光阑处插入一块可分离的余弦振幅掩模(函数形式为 $\cos(2\pi\beta x) \cdot \cos(2\pi\beta y)$,参量 β 代表掩模的空间频率, x, y 代表掩模的空间坐标),对成像系统的光学传递函数进行调制,产生与被测目标距离有关的正交传递函数,且传递函数次极大波峰的位置取决于被测目标的距离,从而

基金项目:湖北省自然科学基金(No. 2011CDB422)和中南民族大学中央高校基本科研业务费专项资金项目(No. CZY12001)资助

第一作者:陈家凤(1968-),女,副教授,博士,主要研究方向为光电检测与信息处理. Email:chenjiafeng@mail.scuec.edu.cn

收稿日期:2015-04-14;录用日期:2015-07-02

<http://www.photon.ac.cn>

实现距离编码, 然后对已编码的图像进行频谱分析, 通过探测传递函数次极大波峰的位置进行距离解码. 这种单孔径正交编码被动测距系统既避免了零空间编码系统^[11]在探测交叠物体或非平面物体时存在的周期“竞争”, 还能从单幅编码的图像中直接提取距离信息, 具有系统实现容易和信号处理简便等优点. 但是这种基于单个测距传感器的孔径尺寸限制了其最大探测距离, 同时, 随着探测距离的增加, 光学调制传递函数的带宽将越来越宽, 峰值的能量也越来越低, 其测量准确度也会降低, 即单孔径探测的物理距离与距离分辨率是一对矛盾. 因此, 要扩大成像系统的视场, 提高探测距离就需要一个较大的孔径. 若采用单孔径探测, 无论是结构、成本还是尺寸上都是不合适的. 但如果将单孔径系统进行扩展, 即采用多个线性阵列传感器构成一个较大的合成孔径^[12,13], 则既可获得较大的工作距离, 又可提高近场的性能, 同时, 通过引入图像的空间移动, 将使阵列测距系统对距离更敏感, 从而提高系统的测量准确度.

1 两个传感器的阵列系统及最佳间距

阵列被动测距系统(图 1)采用在同一个平台上且彼此独立的多个线性阵列传感器对同一被测目标进行探测, 当目标出现在阵列系统的视场范围内时, 即整个目标均能同时被多个传感器探测, 则每个独立传感器所成的像将是彼此间图像的移动形式, 其移动的多少取决于传感器之间的间距以及传感器与被测目标的距离. 以两个传感器的线性阵列(图 2)为例进行分析, 假设每个传感器均由图 1 中的光学组件和 CCD 构成, 且假设被测目标位于阵列系统的光轴上, z_0 、 z_i 、 f 分别表

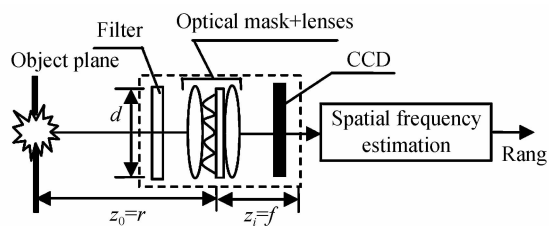


图 1 单孔径正交编码被动测距系统

Fig. 1 Passive ranging system using orthogonal encoding

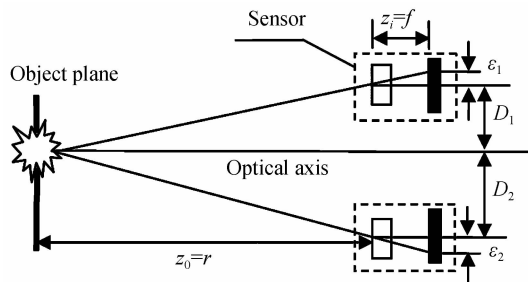


图 2 两个传感器的线性阵列结构

Fig. 2 Geometry of two-sensor linear-array

示物距、像距及透镜的焦距, r 表示被测距离, d 表示孔径大小, D_m 表示第 m 个传感器与阵列系统的光轴的间距, $\epsilon_m = fD_m/r$ 表示由阵列间距和物距决定的图像的移动参量.

为分析方便, 仅考虑一维的情况, 由于采用的是矩形可分离的余弦掩模, 很容易扩展到二维的情形. 对线性空不变系统, 传感器所采集的一幅图像表示为

$$i(x) = h(x) * \bar{u}(x) \tag{1}$$

$h(x)$ 代表与距离有关的脉冲响应或点扩散函数, $*$ 代表卷积, $\bar{u}(x)$ 代表被测目标. 相对于单孔径系统, 阵列系统中每个传感器所成的像引入了图像的空间移动, 对多个测距传感器所成的移动图像进行求和(或加权求和), 空间上能使系统响应变窄, 通过对求和后的图像进行频率估计, 可估计出被测目标的距离. 由于大多数测距传感器所成的像理论上能使带通区域朝 δ 函数移动, 且 δ 函数的位置与被测距离有关, 因此, 对 M 个传感器所成的多幅图像的求和可表示为

$$i(x) = \sum_{m=1}^M h(x) * \bar{u}(x) * \delta(x + \epsilon_m) \tag{2}$$

假设两个测距传感器关于光轴对称, 即 $D_1 = D_2 = D$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$, 那么对两幅图像进行求和, 可得到求和后的图像 $i(x)$, 即

$$i(x) = h(x) * \bar{u}(x) * [\delta(x - \epsilon) + \delta(x + \epsilon)] \tag{3}$$

对式(3)进行傅立叶变换, 则有

$$I(u) = H_r(u)U(u) \cos(2\pi u \epsilon) \tag{4}$$

$H_r(u)$ 表示单孔径系统的光学传递函数, 那么由两个传感器构成的阵列系统的光学传递函数即为

$$H_{z,r}(u) = H_r(u) \cos(2\pi u \epsilon)$$

或

$$H_{z,\psi}(u) = H_\psi(u) \cos(2\pi u \epsilon) \tag{5}$$

式(5)中 u 为空间频率, ψ 为离焦量. 可以看出: 传递函数 $H_{z,\psi}(u)$ 实际上是对单孔径系统的光学传递函数进行了余弦调制. 其中单孔径正交测距系统的光学传递函数为

$$H_\psi(u) = \frac{1}{2}(d - |u|) \cos(2\pi \beta u) \text{sinc} \left[\frac{u\psi}{\pi}(d - |u|) \right] + \frac{1}{4}(d - |u|) \text{sinc} \left[\left(\frac{u\psi}{\pi} + 2\beta \right)(d - |u|) \right] + \frac{1}{4}(d - |u|) \text{sinc} \left[\left(\frac{u\psi}{\pi} - 2\beta \right)(d - |u|) \right]$$

$$(|u| \leq d) \tag{6}$$

式(6)中 $\psi = \frac{\pi d^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_i} \right) = -\frac{\pi d^2}{4\lambda z_0}$ (当 $f = z_i$ 时), λ 为入射波的中心波长. 式(6)中的第一项受余弦调制但不包含任何被测信息; 第二、三项是中心频率为 $u_0 = \pm \frac{2\pi\beta}{\psi} = \mp \frac{8\lambda\beta r}{d^2}$ 的 sinc 项, 且 u_0 是传递函数次级大波峰的位置. 显然, 只要在频域中探测出次级大波峰的位置就能估计出离焦量, 进而估计出被测目标的距离.

要使阵列测距系统的光学传递函数次级大波峰的位置和单孔径系统一致,那么式(5)中余弦调制项的第一个最大值的位置(除0以外)就应该位于 u_0 处,即调制余弦项的周期必须是 u_0 ,且 u_0 必须等于 $1/\epsilon$,因此,现在的关键是要选择最佳的阵列间距 D_{opt} ,从而使 $\epsilon = fD/r = 1/u_0$,以保证余弦项为 $\cos(2\pi u/u_0)$.而实际上式(4)中的余弦项是对空间离散域中的阵列图像进行求和产生的,因此还应考虑空间采样周期或像素宽度的影响.对CCD图像传感器,图像移动一个像素对应的参量 $\epsilon = \Delta x$ (Δx 是采样周期或填充因子为100%的CCD的一个像素的宽度),因此,在采样域中,式(4)中的余弦项的频率应按采样频率的1/2(即 $1/(2\Delta x)$)缩放,即如式(7)所示

$$\begin{aligned} \cos\left(2\pi\left(\frac{\epsilon}{2\Delta x}\right)u\right) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{fD}{2\Delta xr}\right)u\right) = \\ \cos\left(2\pi\left(\frac{u}{2\Delta xr/fD}\right)\right) \end{aligned} \quad (7)$$

由 $2\Delta xr/fD = u_0 = 2\pi\beta/\psi$,可求得最佳间距 D_{opt}

$$D_{opt} = \frac{\Delta x d^2}{4\lambda\beta f} \quad (8)$$

由于余弦函数被缩放 $k \cdot 2\pi$ 后,sinc函数波峰的波峰位置不变,因此式(8)中可引入正整数 k ,这样2个传感器的线性阵列结构中最佳间距即为

$$D = kD_{opt} = k \frac{\Delta x d^2}{4\lambda\beta f} \quad (k=1,2,\dots) \quad (9)$$

而两个传感器间总的最佳间距即为 $2D$.

2 多个传感器的线性阵列结构

采用两个以上传感器实现正交阵列被动测距时,将产生多个调制余弦项.图3、图4分别给出了采用3个及4个传感器的几种结构形式,其中间距 $s = 2D$.由于最小冗余线性阵列结构能在给定元件个数的前提下,通过最小化冗余空间数目获得最大的分辨率,因此,最小冗余线性阵列结构获得了广泛关注^[14-15].图3(b)中的最小冗余结构提供了3个独立的空间响应($k=1,2,3$),能产生3个不同频率的调制余弦项;而若采用冗余结构(图3(a)),却只有2个独立的空间响应($k=1,2$)和1个冗余空间响应($k=1$),最终只能产生2个不同频率的调制余弦项.而同样要产生3个调制余弦项,若采用冗余结构却需要4个传感器(图4(a));图4(b)的部分冗余结构可提供4个独立的空间响应($k=1,2,3,4$)、1个 $k=1$ 和1个 $k=3$ 的冗余空间响应;但若采用图4(c)的最小冗余结构却可提供6个独立的空间响应($k=1,2,3,4,5,6$),产生6个不同频率的调制余弦项.总之,无论采用什么形式的线性阵列结构,每对传感器组合所产生的余弦调制项均能以多种方式进行求和,对 M 对传感器组合的阵列系统产生的总的阵列响应可表示为

$$\begin{aligned} H_{M,\psi}(u) &= H_{\psi}(u) \sum_{m=1}^M \gamma_m \cos(2\pi u \epsilon_m) = \\ H_{\psi}(u) \sum_{m=1}^M \gamma_m \cos(2\pi u f D_m / r) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中表 γ_m 示权重因子, D_m 是第 m 对传感器到其中心的间距,且 $D_m = kD_{opt}$.

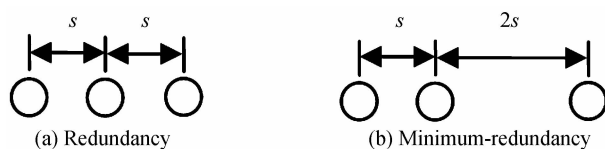


图3 3个传感器的线性阵列结构
Fig. 3 Three-sensor linear array geometries

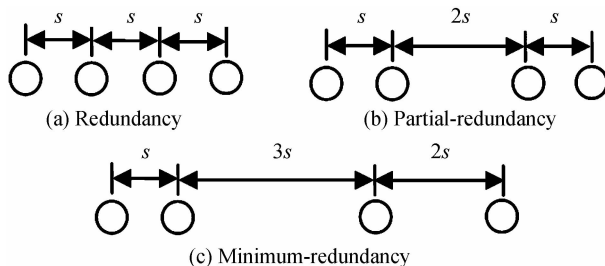


图4 4个传感器的线性阵列结构
Fig. 4 Four-sensor linear array geometries

图5给出了采用不同的线性阵列结构对位于10 m处的目标进行探测所得到的系统的光学调制传递函数.显然,对给定数目的传感器,采用最小冗余(非冗余)线性阵列结构时,由于产生了与距离有关的更多更

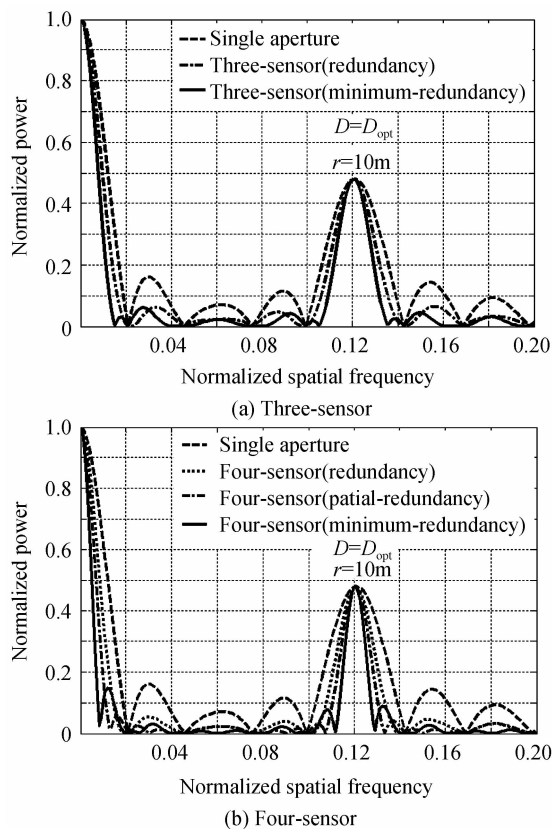


图5 不同结构的阵列系统的光学调制传递函数
Fig. 5 MTFs of array systems of different configurations

高频率的调制余弦项,从而使调制传递函数中零频区域和次级大波峰所处的带通区域最窄,这样可使峰值点的探测准确度最高.因此,本系统采用最小冗余线性阵列结构.

3 距离估计的克拉姆-拉奥限

对阵列测距系统,每个传感器采集的图像表示为

$$x_m = h(r) * \underline{u} * \delta(\epsilon_m) = F(r, \epsilon_m) \underline{u}$$

$$i_m = x_m + n_m \quad (11)$$

式中 $F(r, \epsilon_m)$ 表示卷积矩阵, n_m 代表噪声,对采集的多幅图像进行相干求和得到的阵列图像为

$$i_\Sigma = \sum_{m=1}^M \gamma_m e^{j\theta_m} i_m = \sum_{m=1}^M \gamma_m e^{j\theta_m} (F(r, \epsilon_m) \underline{u} + n_m) \quad (12)$$

γ_m, θ_m 表示权重.由于阵列测距系统的未知参量是距离 r, M 个移动参量 $\mathbf{e} = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \dots \quad \epsilon_M]^T$ 以及被测目标 \underline{u} , 则未知参量 \mathbf{q} 表示为 $\mathbf{q} = [r \quad \mathbf{e}^T \quad \underline{u}^T]^T$. 假设噪声为分布噪声 $n: N[0, \sigma^2 I]$, 那么参量 \mathbf{q} 的费希尔矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 就是分块灵敏度矩阵, 该矩阵可表示为

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sigma^2} [G_r \quad G_u]^T [G_r \quad G_u]$$

$$G_r = \frac{\partial}{\partial r} \ln p_q(i_\Sigma) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} F(r, \epsilon(r)) \underline{u}$$

$$G_u = \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \ln p_q(i_\Sigma) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{u}} F(r, \epsilon(r)) \underline{u} = F(r, \epsilon(r))$$

$p_q(i_\Sigma)$ 表示被 \mathbf{q} 参量化的 i_Σ 的概率密度函数. 费希尔矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的逆即 $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ 提供了误差估计的克拉姆-拉奥限(Cramer-Rao Bound).

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} [G_r^T P_G^\perp G_r]^{-1} & * \\ * & [G_u^T P_G^\perp G_u]^{-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中投影矩阵 $P_G^\perp = \mathbf{I} - G_u(G_u^T G_u)^{-1} G_u^T$, \mathbf{I} 是单位阵. 式(13)的左上角实际上是距离 r 的最佳估计的方差下限(式(14)).

$$\text{var}(\hat{r}) \geq \frac{\sigma^2}{[G_r^T P_G^\perp G_r]} \quad (14)$$

根据系统原件的频率响应, 式(14)表示为

$$\text{var}(\hat{r}) \geq \frac{\sigma^2}{\int_{-\infty}^{\infty} P(e^{j\theta}) \left| \frac{\partial}{\partial r} H(e^{j\theta}; r, \epsilon(r)) U(e^{j\theta}) \right|^2 d\theta}$$

$$P(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & |H(e^{j\theta}; r, \epsilon(r))| = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

阵列测距系统的光学传递函数为 $H(u; r, \epsilon(r)) = H(u; r)C(u, \epsilon(r))$, 其中 $H(u; r)$ 代表单孔径系统的光学传递函数, $C(u, \epsilon(r))$ 代表调制余弦项, 阵列系统的距离灵敏度为

$$\frac{\partial}{\partial r} H(u; r, \epsilon(r)) = \frac{\partial}{\partial r} (H(u; r)C(u, \epsilon(r))) =$$

$$H(u; r) \frac{\partial C(u, \epsilon(r))}{\partial r} + C(u, \epsilon(r)) \frac{\partial H(u; r)}{\partial r} \quad (16)$$

假设线性阵列系统由间距为 $2D_{\text{opt}}$ 的两个传感器

组成, 则有 $C(u, \epsilon(r)) = \cos(2\pi u f D/r)$, 因此

$$\frac{\partial C(u, \epsilon(r))}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \cos(2\pi u f D/r) = (2\pi u f D/r^2) \sin(2\pi u f D/r) \quad (17)$$

从式(16)、(17)可以看出: 阵列系统的灵敏度包含了更多与距离有关的信息, 同时, 余弦项的灵敏度还产生了幅度缩放因子 D/r^2 , 且式(15)中方差限的分母是对余弦调制项的能量积分, D 值越大, 余弦项的缩放影响将越大, 方差限就越低, 则距离估计的准确度就越高. 同时, 从式(15)、(16)、(17)可以看出: 阵列测距系统的距离估计的最小方差限小于单孔径系统的最小方差限, 因此, 阵列测距系统的性能优于单孔径系统.

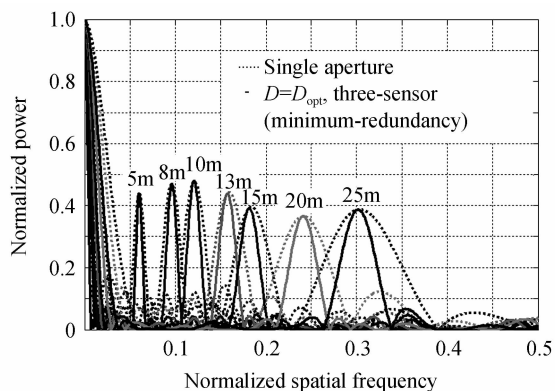
4 阵列系统模拟及距离估计

假设被测目标是一点源, 模拟了两个由 3 个传感器构成的最小冗余阵列测距系统 ($k=1$ 和 $k=2$), 其模拟参量如表 1.

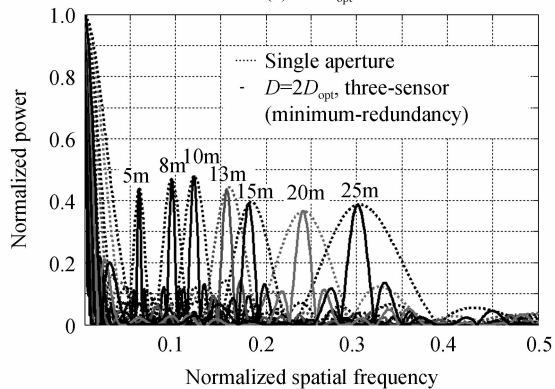
表 1 阵列测距系统参量

Table 1 Parameters for array ranging system							
β	f/mm	d/mm	λ/nm	z_i/mm	r/m	$\Delta x/\mu\text{m}$	D_{opt}/mm
0.5	75	6	650	75	5...25	13	4.8

图 6 为被测目标在不同距离处系统的光学调制传递函数 (Modulation Transfer Function, MTF), 为便于



(a) $D=D_{\text{opt}}$



(b) $D=2D_{\text{opt}}$

图 6 模拟的最小冗余结构的 3 个传感器的阵列系统的光学调制传递函数

Fig. 6 Simulated MTFs for the three-sensor array system (minimum-redundancy)

分析比较,图中均用虚线给出了单孔径系统的 MTF. 显然,单孔径测距系统的 MTF 的次级大波峰的带通区域最宽,而阵列系统的 MTF 的峰值的带通区域明显变窄,而且随着阵列间距的增加,与距离有关的峰值响应带宽更窄. 同时这些传递函数次级大波峰的位置与被测距离成正比. 因此,通过对求和后的阵列图像进行频谱估计,即可得到被测目标的距离.

为了和单孔径系统的测距准确度进行定量比较,模拟了点源在不同位置的单孔径图像和采用 3 个传感器的最小冗余线性阵列结构的阵列图像($k=1$),图 7 给出了被测目标在 5 m 和 10 m 处的模拟图像,分别对两个系统形成的图像进行频谱分析,得到被测距离和光学传递函数次级大波峰位置(归一化空间频率)的关系曲线如图 8,其中实线代表定标曲线,测试得到的单孔径系统和 3 个传感器阵列系统的均方差分别为 0.005 4 和 0.002 6. 显然,采用阵列系统进行探测时,由

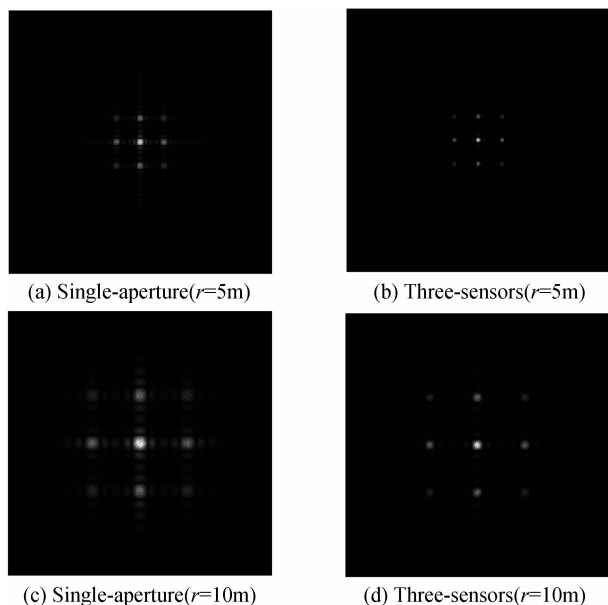


图 7 模拟的点源在 5 m 和 10 m 处的单孔径图像和 3 个传感器最小冗余结构的阵列图像

Fig. 7 Simulated images of a point source at $r = 5$ m and $r = 10$ m using single-aperture and three-sensor linear array

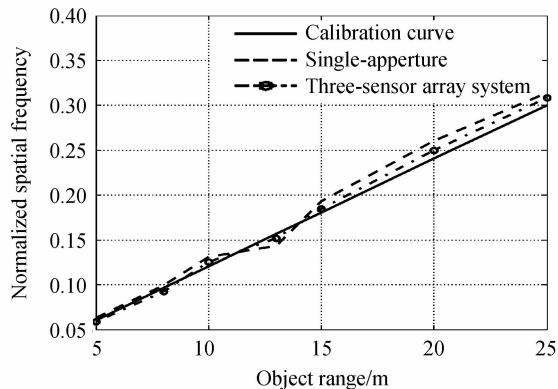


图 8 被测距离与传递函数次级大波峰位置的关系

Fig. 8 Curves of measured range and peak location of MTF

于其峰值响应带宽变窄,峰值点探测的均方误差减小,提高了测量准确度.

5 结论

利用单孔径正交编码测距系统能从单幅编码图像中直接提取距离信息的优势,将单孔径系统扩展成具有较大合成孔径的阵列测距系统. 将阵列系统中多个传感器所成的像进行相干求和,并对求和后的阵列图像进行频谱分析,得到阵列测距系统的光学调制传递函数实际上是对单孔径系统进行了余弦调制,最终使调制传递函数的零频区域和次级大波峰所处的带通区域变窄,同时利用费希尔信息理论分析了阵列测距系统的距离估计的最小方差限. 理论和模拟实验表明采用线性阵列测距系统进行距离估计能获得较高的探测准确度.

参考文献

- [1] DOWSKI E R, CATHEY W T. Extended depth of field through wave-front coding[J]. *Applied Optics*, 1995, **34** (11): 1859-1866.
- [2] DOWSKI E R, CORMACK R H, SARAMA S D, et al. Wavefront coding: jointly optimized optical and digital imaging systems[C]. SPIE, 2000, **4041**: 114-120.
- [3] SHERIF S S, CATHEY W T, DOWSKI E R. Phase plate to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems[J]. *Applied Optics*, 2004, **43**: 2709-2721.
- [4] FANG Chao. Effect of tilting phase mask on point spread function in wavefront coding system[J]. *Chinese Journal of Optics*, 2011, **4**(6): 617-621.
- [5] PAN Chao, CHEN Jia-bi, ZHANG Rong-fu, et al. Study on principle and simulation of extending of depth of field with phase plate[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(7): 1679-1682.
潘超,陈家璧,张荣福,等. 相位板实现景深延拓的原理与模拟实验研究[J]. *光子学报*, 2009, **38**(7): 1679-1682.
- [6] JOHNSON G E, DOWSKI E R, CATHEY W T. Passive ranging through wavefront coding: information and application[J]. *Applied Optics*, 2000, **39**(11): 1700-1710.
- [7] JOHNSON G E. Passive ranging systems using orthogonal encoding[D]. PhD thesis, USA: University of Colorado, 2000.
- [8] LIS S A. Passive range measurement through wavefront coding[C]. SPIE, 2006, **6382**: 63820A.
- [9] KANG J R, CHEN H Q, TAN Z J. Orthogonal wave-front coding for range information extraction from a single image[C]. SPIE, 2009, **7383**: 73830J.
- [10] TAN Z J, KANG J R, XIE J, et al. The analysis of misalignment errors of optical masks for wavefront coded passive-ranging systems[J]. *Optik*, 2014, **125**: 4766-4769.
- [11] DOWSKI E R, CATHEY W T. Wavefront coding for detection and estimation with a single-lens incoherent optical system[C]. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995, **4**: 2451-2454.
- [12] LIANG Shi-tong. Study on the imaging theory of the optical synthetic aperture imaging systems[D]. Xi'an: Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics Chinese Academy of Sciences, 2011.
梁士通. 合成孔径光学成像系统研究[D]. 西安:中国科学院

- 西安光学精密机械研究所, 2011.
- [13] HERATH S C K, PATHIRANA P N, WILLIAMS G L. Optimal sensor placement in range based localization for linear arrays [C]. Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2012, 2225-2230.
- [14] MOFFET A T. Minimum-redundancy linear arrays [J]. *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, 1968, **16**(2): 172-175.
- [15] CAMPS A, CARDAMA A, INFANTES D. Synthesis of large low-redundancy linear arrays [J]. *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, 2002, **49**(12): 1881-1883.

Foundation item: The Hubei Province Natural Science Foundation(No. 2011CDB422) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, South-Central University for Nationalities(No. CZY12001)