

doi:10.3788/gzxb20154408.0827002

线性共振力作用下扩散过程中粒子数 叠加态的退相干

卢道明, 邱昌东

(武夷学院 机电工程学院, 福建 武夷山 354300)

摘 要:利用有序算符内的积分技术和热纠缠态表象, 导出了线性共振力作用下扩散过程中密度矩阵主方程的解, 给出密度算符的演化公式. 并求出了真空态和单光子叠加态 Wigner 函数的解析表达式. 采用数值计算方法, 描绘了 Wigner 函数的演化曲线, 以及负部体积随耗散时间的演化曲线. 通过对 Wigner 函数演化曲线的分析, 讨论了耗散过程和线性共振力作用对其量子特性的影响. 研究结果表明: 随耗散时间延长, 真空态和单光子叠加态的 Wigner 函数负值范围和负值深度都在逐渐减小, 直至消失; 另一方面, 线性共振力会使 Wigner 函数发生平移.

关键词:量子光学; 线性共振力; 扩散过程; 真空态和单光子叠加态; 退相干

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)08-0827002-5

Decoherence of Superposition of Vacuum State and Single-photon State in Diffusion Process Under the Action of Linear Resonance Force

LU Dao-ming, QIU Chang-dong

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract: The diffusion master equations of density operators under action of linear resonance force were concisely solved by virtue of thermo entangled state representation and the technique of integration within an ordered product of operators. The evolution formula of the field density operator was given, and the Wigner function evolution formula which is in superposition of vacuum state and single-photon state initially was obtained. By numerically calculating the Wigner function was plotted, and the evolution of negative volume of Wigner function with dissipation time was calculated. Through the analysis of the Wigner function, the effect of decoherence on nonclassical property of the state was discussed. Numerical results show that the negativity area size and the depth of negativity of its Wigner function decrease until vanish with dissipation time. In addition, on the other hand, Wigner function can be slipped under the action of linear resonance force.

Key words: Quantum optics; Linear resonance force; Diffusion process; Superposition of vacuum state and single-photon state; Decoherence

OCIS Codes: 270.0270; 270.5585; 030.0030; 030.5290

0 引言

非经典光场在量子物理的基本原理、量子信息处理和量子计算中具有重要作用, 是量子光学领域中研究的热点. 对不同量子态光场的量子特性, 以及光场与原子相互作用过程中量子特性的演化规律等已有大量

研究报道^[1-3]. Fan 等研究了压缩热态的光子数分布^[1]; Ma 等讨论了光子增加和光子减少压缩真空态的非经典性质^[2]; 吴道永探讨了双光子过程耦合腔系统中光场的量子特性^[3]. 然而, 在实际应用中量子系统不可避免地与环境发生相互作用, 导致系统耗散, 使得在演化过程中光场的量子特性发生衰减. 退相干是目前

基金项目:福建省自然科学基金(No. 2015J01020)和福建省教育厅 A 类科技项目(No. JA12327)资助

第一作者:卢道明(1963-), 男, 教授, 主要研究方向为量子光学. Email: daominglu79@hotmail.com

收稿日期:2015-01-29; **录用日期:**2015-03-31

<http://www.photon.ac.cn>

量子信息处理和量子计算的主要障碍之一. 针对耗散环境下的退相干问题, Lu 等研究了相位衰减模型中纠缠相干态的非经典性质^[4]; Wickert 等讨论了振幅衰减模型中相干态的纠缠特性^[5]; 徐学翔等研究了广义压缩粒子数态的非经典性质及其退相干^[6]. 文献[7]引入热纠缠态表象来求解密度矩阵主方程, 基于此, Liu 等研究了扩散过程中相干态的演化^[8]; Chen 等推导了振幅衰减模型中二项式光场的演化^[9]. 但有关线性共振力作用下扩散过程中退相干问题的研究鲜有报道. 因此, 能否利用热纠缠态表象求解线性共振力作用下扩散过程中的密度矩阵主方程, 以及线性共振力对光场量子特性演化的影响成为研究重点.

光场的非经典性质一般通过其量子统计特点体现出来, 如压缩效应、反聚束效应、亚泊松光子统计和 Wigner 函数的部分负分布等. 其中, Wigner 函数的部分负性是量子态非经典特性的一个很好的表征. 本文利用热纠缠态表象求解密度矩阵主方程, 导出线性共振力作用下扩散过程中真空态与单光子叠加态密度算符的演化规律, 讨论共振力作用和耗散对 Wigner 函数负性分布的影响.

1 真空态和单光子态叠加态密度算符的演化

在 Fock 态表象中, 真空态和单光子叠加态表示为

$$|\psi(0)\rangle = C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle \quad (1)$$

式中叠加系数 C_0 和 C_1 满足 $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$. 为简单起见, 假设它们均为实数. 其密度算符为

$$\rho_0 = C_0^2 |0\rangle\langle 0| + C_0 C_1 (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + C_1^2 |1\rangle\langle 1| \quad (2)$$

在线性共振力作用下, 扩散过程中密度算符演化的主方程为

$$\frac{d\rho}{dt} = i\lambda[a^+ + a, \rho] - \kappa(a^+ a \rho + \rho a a^+ - a \rho a^+ - a^+ \rho a) \quad (3)$$

式中 λ 表示线性共振力强度, κ 为腔场的衰减率, $a^+(a)$ 表示玻色产生(湮没)算符. 引入热纠缠态表象 $|\eta\rangle$ ^[7], 它在 Fock 态表象中表示为

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a^+ - \eta^* \tilde{a}^+ + a^+ \tilde{a}^+\right) |0\tilde{0}\rangle \quad (4)$$

式中 $\tilde{a}^+(\tilde{a})$ 是引入与实模 $a^+(a)$ 相对应的虚模产生(湮没)算符, 满足 $[\tilde{a}, \tilde{a}^+] = 1$, $|\tilde{0}\rangle$ 表示虚模真空态. 当 $\eta = 0$ 时, 式(4)变为

$$|\eta=0\rangle = \exp(a^+ \tilde{a}^+) |0\tilde{0}\rangle = |I\rangle \quad (5)$$

利用算符公式 $[a, : f(a, a^+) :] = : \frac{\partial}{\partial a^+} f(a, a^+) :$

(其中 $: :$ 表示正规排序), 导出 $|I\rangle$ 满足

$$\begin{cases} a|I\rangle = \tilde{a}^+|I\rangle \\ a^+|I\rangle = \tilde{a}|I\rangle \\ (a^+ a)^n |I\rangle = (\tilde{a}^+ \tilde{a})^n |I\rangle \\ (a a^+)^n |I\rangle = (\tilde{a} \tilde{a}^+)^n |I\rangle \end{cases} \quad (6)$$

式(6)表明虚模和实模算符作用在 $|I\rangle$ 上, 具有互换关系为

$$\begin{cases} a \leftrightarrow \tilde{a}^+ \\ a^+ \leftrightarrow \tilde{a} \\ a^+ a \leftrightarrow \tilde{a}^+ \tilde{a} \\ a a^+ \leftrightarrow \tilde{a} \tilde{a}^+ \end{cases} \quad (7)$$

将式(3)两边作用于 $|I\rangle$ 上, 并记 $|\rho(t)\rangle = \rho|I\rangle$, $|\rho_0\rangle = \rho_0|I\rangle$. 其中 ρ_0 表示初始密度算符. 那么, 式(3)转化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\rho\rangle = & i\lambda[a^+ + a, \rho] |I\rangle - \kappa(a^+ a \rho + \rho a a^+ - a \rho a^+ - \\ & a^+ \rho a) |I\rangle = [i\lambda(a^+ + a - \tilde{a}^+ - \tilde{a}) - \kappa(a^+ - \tilde{a}) \cdot \\ & (a - \tilde{a}^+)] |\rho\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

利用对易关系

$$\begin{cases} [a - \tilde{a}^+, a^+ - \tilde{a}] = 0 \\ [a - \tilde{a}^+, (a^+ - \tilde{a})(a - \tilde{a}^+)] = 0 \end{cases} \quad (9)$$

导出式(8)的解为

$$|\rho(t)\rangle = \exp[i\lambda(a - \tilde{a}^+)t] \exp[i\lambda(a^+ - \tilde{a})t] \times \exp[-\kappa t(a^+ - \tilde{a})(a - \tilde{a}^+)] |\rho_0\rangle \quad (10)$$

由式(5)导出

$$\begin{cases} (a^+ - \tilde{a})|\eta\rangle = \eta^*|\eta\rangle \\ (a - \tilde{a}^+)|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle \end{cases} \quad (11)$$

结合式(11)和热纠缠态的完备性 $\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = 1$, 在

式(10)右边插入 $\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = 1$, 导出

$$\begin{aligned} |\rho(t)\rangle = & \int \frac{d^2\eta}{\pi} \exp[i\lambda t(\eta + \eta^*) - \kappa t|\eta|^2] \times |\eta\rangle \cdot \\ & \langle\eta|\rho_0\rangle = \exp\left[\frac{\kappa t}{1 + \kappa t} a^+ \tilde{a}^+ + \frac{i\lambda t}{1 + \kappa t} (a^+ - \tilde{a}^+)\right] \cdot \\ & \exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{1 + \kappa t}\right) \times \left(\frac{1}{1 + \kappa t}\right)^{a^+ a^+ \tilde{a}^+ \tilde{a}^+ + 1} \times \\ & \exp\left[\frac{\kappa t}{1 + \kappa t} a \tilde{a} + \frac{i\lambda t}{1 + \kappa t} (a - \tilde{a})\right] |\rho_0\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

在式(12)的计算中, 已利用真空投影算符的正规排序 $|0\rangle\langle 0| = : \exp(-a^+ a) :$ 和积分公式

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} \exp(-h|\eta|^2 + s\eta + t\eta^*) = \frac{1}{h} \exp\left(\frac{st}{h}\right) \quad (13)$$

以及算法公式

$$\exp(\lambda a^+ a) = : \exp[(e^\lambda - 1)a^+ a] : \quad (14)$$

结合式(7)和式(12), 推导出密度算符的演化规律为

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{1 + \kappa t}\right) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{(\kappa t)^{m+n}}{(1 + \kappa t)^{m+n+1}} \times$$

$$\begin{aligned}
 & a^{+m} \exp\left(\frac{i\lambda t}{1+\kappa t} a^+\right) \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} a^n \times \\
 & \exp\left(\frac{i\lambda t}{1+\kappa t} a\right) \rho_0 \exp\left(-\frac{i\lambda t}{1+\kappa t} a^+\right) \times \\
 & a^{+n} \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{a^+ a} \exp\left(-\frac{i\lambda t}{1+\kappa t} a\right) a^m \quad (15)
 \end{aligned}$$

将式(2)代入式(15),得出真空态和单光子叠加态在线性共振力作用下,扩散过程中密度算符的演化规律为

$$\begin{aligned}
 \rho(t) = & AC_0^c : \hat{N} : + \frac{1}{1+\kappa t} AC_0 C_1 \times (: a^+ \hat{N} : + : \hat{N} a :) + \\
 & AC_1^c \left\{ \frac{1}{(1+\kappa t)^2} : a^+ \hat{N} a : + \frac{1}{1+\kappa t} \times \left(1 - \frac{i\lambda t}{1+\kappa t}\right) : \right. \\
 & a^+ \hat{N} : + \frac{1}{1+\kappa t} \times \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\kappa t}\right) : \\
 & \left. \hat{N} a : + \left[1 + \frac{\lambda^2 t^2}{(1+\kappa t)^2}\right] : \hat{N} : \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1+\kappa t} \exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{1+\kappa t}\right) \\ \hat{N} = \exp\left[-\frac{1}{1+\kappa t} a^+ a + \frac{i\lambda t}{1+\kappa t} (a^+ - a)\right] \end{cases} \quad (17)$$

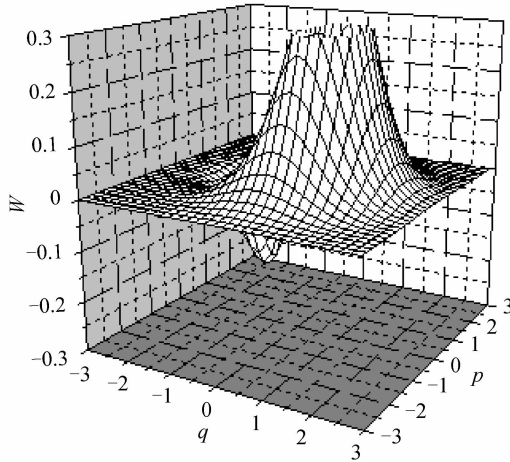
2 光场的 Wigner 函数

Wigner 函数是研究量子态非经典性质的一个有力工具,它的部分负性是量子态非经典性质的重要标志之一.在相干态表象中,Wigner 算符表示为^[10]

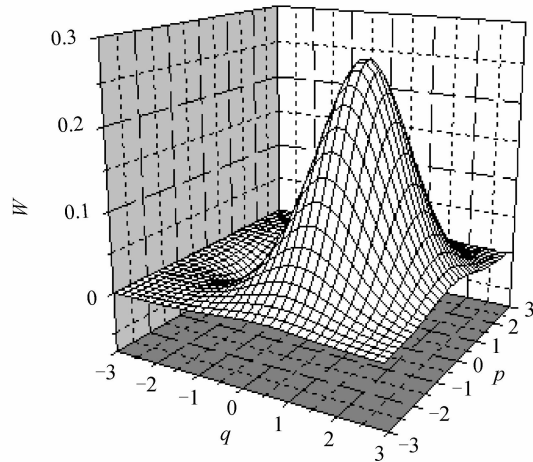
$$\begin{aligned}
 \Delta(\alpha, \alpha^*) = & \int \frac{d^2 z}{\pi} | \alpha + z \rangle \langle \alpha - z | \times \\
 & \exp(\alpha z^* - \alpha^* z) \quad (18)
 \end{aligned}$$

那么,密度算符 ρ 描述的量子态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
 W(\alpha, \alpha^*) = & \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\alpha z^* - \alpha^* z) \times \\
 & \langle \alpha - z | \rho | \alpha + z \rangle \quad (19)
 \end{aligned}$$



(a) $kt=0.1$



(b) $kt=0.5$

将式(16)代入式(19),并利用 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$,其中 q 表示坐标, p 表示动量,可得出真空态和单光子叠加态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
 W(q, p, t) = & \frac{1}{\pi} \exp(B) \left\{ \frac{C_0^2}{D} + \frac{C_0 C_1}{D^2} 2\sqrt{2} q + \right. \\
 & \frac{1}{D^3} C_1^2 (2q^2 + 2p^2 - 2\sqrt{2} \lambda t p) + \frac{4}{D^3} C_1^2 \lambda^2 \times t^2 + \\
 & \left. C_1^2 \left[\frac{1}{D} - \frac{1}{(1+\kappa t) D^2} \right] + \frac{1}{D^2} C_1^2 2\sqrt{2} q \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{cases} D = 1 + 2\kappa t \\ B = -\frac{1}{D} (q^2 + p^2 + 2\lambda^2 t^2 - 2\sqrt{2} \lambda t p) \end{cases} \quad (21)$$

为了考察耗散时间对 Wigner 函数演化的影响,取叠加系数 $C_0 = \sqrt{1/4}$, $C_1 = \sqrt{3/4}$,参量 $\lambda = 0$,Wigner 函数的演化曲线如图 1.图 1 中(a)~(d)对应的衰减时间分别为 $kt=0, 1, 0.5, 1.0$ 和 2.0 .从图 1 可看出,随耗散时间的延长,Wigner 函数的负值范围和负值深度都在逐渐减小.耗散时间大于一定值后负值消失.这表明随耗散时间的延长,粒子数叠加态 $C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle$ 的量子特性逐渐减弱,直至最后量子特性消失.

取参量 $\kappa=0$,这时密度算符演化的主方程式(3)转变为

$$\frac{d\rho}{dt} = i\lambda [a^+ + a, \rho] = i\lambda (a + a^+) \rho - i\lambda \rho (a + a^+) \quad (22)$$

将式(22)两边作用在 $|I\rangle$ 上,得到

$$\frac{d|\rho\rangle}{dt} = [i\lambda (a + a^+) - i\lambda (\tilde{a} + \tilde{a}^+)] |\rho\rangle \quad (23)$$

解得

$$|\rho\rangle = \exp [i\lambda (a + a^+) - i\lambda (\tilde{a} + \tilde{a}^+)] |\rho_0\rangle \quad (24)$$

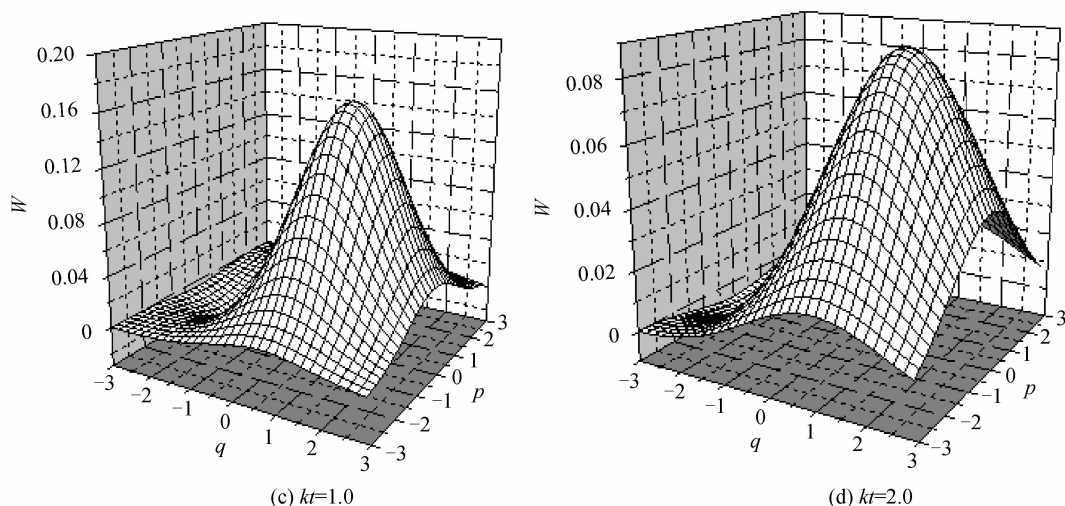


图1 Wigner 函数演化曲线
Fig.1 Evolution of Wigner function

利用式(4),可得 ρ 描述的量子态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
 W(\alpha, t) &= \int \frac{d^2\eta}{2\pi^2} \exp(\alpha^* \eta - \alpha \eta^*) \langle \eta | \rho \rangle = \\
 &\int \frac{d^2\eta}{2\pi^2} \exp(\alpha^* \eta - \alpha \eta^*) \exp[i\lambda(\eta + \eta^*)t] \times \langle \eta | \rho_0 \rangle = \\
 &\int \frac{d^2\eta}{2\pi^2} \exp(\alpha^* \eta - \alpha \eta^*) \exp[i\lambda(\eta + \eta^*)t] \times \\
 &\langle \eta | \int \frac{d^2\xi}{\pi} | \xi = 2\beta \rangle \langle \xi = 2\beta | \times | \rho_0 \rangle = \int \frac{d^2\eta}{2\pi^2} \int \frac{d^2\xi}{\pi} \cdot \\
 &\exp(\alpha^* \eta - \alpha \eta^*) \times \exp[i\lambda(\eta + \eta^*)t] \langle \eta | \xi = 2\beta \rangle \langle \xi = \\
 &2\beta | \rho_0 \rangle = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \int \frac{d^2\eta}{\pi} \exp(\alpha^* \eta - \alpha \eta^*) \exp[i\lambda t(\eta + \\
 &\eta^*)t] \exp[\beta \eta^* - \beta^* \eta] W(\beta, 0) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \delta^2(\alpha - \beta - \\
 &i\lambda t) W(\beta, 0) = W(\alpha - i\lambda t, 0) \quad (25)
 \end{aligned}$$

在式(25)推导中,已利用纠缠态

$$| \xi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} | \xi |^2 + \xi a^+ + \xi^* b^+ + a^+ b^+\right) | 0 \bar{0} \rangle \quad (26)$$

和完备性关系

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} | \xi \rangle \langle \xi | = 1 \quad (27)$$

从式(25)可见,线性共振力的作用结果是使 Wigner 函数平移,不会引起 Wigner 函数负性的变化,其中平移量为 $i\lambda t$.

3 Wigner 函数负部体积的演化

为了进一步定量描述量子态的非经典性质,采用 Wigner 函数在相空间中的负部体积来表征. Wigner 函数的负部体积定义为

$$V(t) = \frac{1}{2} \iint (| W(q, p, t) | - W(q, p, t)) dq dp \quad (28)$$

将式(20)代入式(28)进行数值计算,当参量 $\lambda=0$,叠加系数 $C_0 = \sqrt{1/4}$, $C_1 = \sqrt{3/4}$,负部体积 $V(t)$ 随规范时间 κt 的演化曲线如图 2. 从图 2 中可见,随时间增加,

Wigner 函数负部体积逐渐减小,直至降为零.

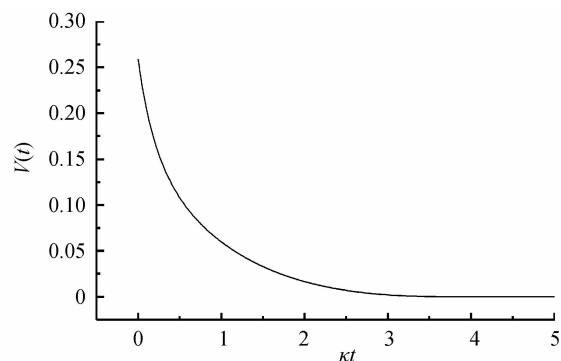


图2 Wigner 函数负部体积随规范时间 κt 的演化
Fig.2 The evolution of the negative volume of Wigner function with κt

4 结论

利用热纠缠态表象和有序算符内的积分技术求解密度矩阵主方程,得到真空态和单光子叠加态在线性共振力作用下扩散过程中的密度算符方程,给出了其密度算符的演化公式. 利用密度算符,在相干态表象中,导出了真空态和单光子叠加态 Wigner 函数的演化公式. 采用数值计算方法,描绘了 Wigner 函数演化曲线,以及它的负部体积随衰减时间的演化曲线. 通过 Wigner 函数负值变化情况,讨论了耗散对该量子态量子特性的影响. 研究表明:随耗散时间的增大, Wigner 函数的负值范围和负值深度都在逐渐减小,直至负值消失;线性共振力的作用会使 Wigner 函数平移,不会引起 Wigner 函数负性的变化.

参考文献

- [1] FAN Hong-yi, ZHOU Jun, XU Xue-xiang, *et al.* Photon distribution of a squeezed chaotic state[J]. *Chinese Physics Letter*, 2011, **28**(4): 040302.
- [2] MA Shan-jun, LUO Wen-wei. Comparison of nonclassicality between photon-added and photon-subtracted squeezed vacuum

- states[J]. *Chinese Physics B*, 2012, **21**(2): 024203.
- [3] WU Dao-yong. The quantum properties of the field in the system of atoms interacting with coupled cavities via a two-photon hopping interaction[J]. *Acta photonica sinica*, 2012, **41**(9): 1104-1107.
吴道永. 双光子过程耦合腔系统中光场的量子特性[J]. *光子学报*, 2012, **41**(9): 1104-1107.
- [4] LU Huai-xin, LI Ying-de. Dynamical nonlocality of the entangled coherent state in the phase damping model [J]. *Chinese Physice B*, 2009, **18**(1): **40-45**.
- [5] WICKERT R, BERNARDES N K, LOOCK P V. Entanglement properties of optical coherent states under amplitude damping[J]. *Physical Review A*, **2010**, **81**(6): 062344.
- [6] XU Xue-xiang, YUAN Hong-chun, HU Li-yun. Nonclassicality and decoherence of generalized squeezed Fock state[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(7): 4661-4671.
徐学翔, 袁洪春, 胡利云. 广义压缩粒子数态的非经典性质及其退相干[J]. *物理学报*, 2010, **59**(7): 4661-4671.
- [7] FAN Hong-yi, HU Li-yun. New approach for solving master equations in quantum optics and quantum statistics by virtue of thermo-entangled state representation [J]. *Communication Theory Physics*, 2009, **51**(4): 729-742.
- [8] LIU Tang-kun, SHAN Chuan-jia, LIU Ji-bing, *et al.* Master equation describing the diffusion process for a coherent state [J]. *Chinese Physics B*, 2014, **23**: 030303.
- [9] CHEN Feng, FAN Hong-yi. Evolution law of a negative binomial state in an amplitude dissipative channel[J]. *Chinese Physics B*, 2014, **23**: 030304.
- [10] 范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 136-139.