

doi: 10.3788/gzxb20154406.0627001

原子与耦合腔相互作用系统中量子态保真度演化

卢道明

(武夷学院 机电工程学院,福建 武夷山 354300)

摘要:在每个耦合腔中囚禁一个二能级原子并考虑原子与腔场的共振,研究二能级原子与耦合腔的相互作用。数值计算了耦合腔系统中系统、原子和腔场的保真度演化,讨论了腔场间耦合系数变化对保真度演化的影响。结果表明:随着腔场间耦合系数的增大,系统和原子的保真度从不规则振荡逐渐转变为准周期性振荡;腔场的保真度周期性变化;随腔场间耦合系数的增大,原子保真度降低,腔场的保真度增大。

关键词:量子光学;二能级原子;耦合腔;量子态保真度

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2015)06-0627001-6

Evolution of Fidelity in the System of Atoms Interacting with Coupled Cavities

LU Dao-ming

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract: The evolutions of system fidelity, atomic fidelity and cavity fidelity in the system of atoms interacting with coupled cavities were investigated considering two coupled cavities each containing one two-level atom and the atom interacts resonantly with cavity field. The temporal evolutions of system fidelity, atomic fidelity and cavity field fidelity were calculated and the influence of cavity-cavity coupling coefficient on the fidelity was discussed. The results show that when cavity-cavity coupling coefficient is small, the system fidelity and atomic fidelity all display irregular oscillations. When cavity-cavity coupling coefficient is greater than a certain value, they all display quasi-periodic oscillations. The fidelity of cavity field displays periodic oscillation, and its oscillation frequency increases with increase of cavity-cavity coupling coefficient. On the other hand, atomic fidelity is weakened, and the fidelity of cavity field is strengthened with increase of cavity-cavity coupling coefficient.

Key words: Quantum optics; Two-level atom; Coupling cavities; Fidelity of quantum state

OCIS Codes: 270.0270 ;270.5580;020.0020;020.5580

0 引言

量子信息科学是量子力学和信息科学结合的完美产物。量子态是信息的载体,它在量子通信、量子密集编码和量子计算中具有重要的应用。保真度是描述量子态在演化过程中保持原有状态的程度,它反映了量子通信的失真度和量子计算的可靠性。因此,在量子态的演化过程中必须考虑保真度问题。至今,人们已对量子态保真度作了广泛的研究^[1-7]。Lauk等研究了电磁

感应透明中光子传播的保真度^[1]。刘堂昆等讨论了原子间偶极相互作用对量子态保真度的影响^[4]。詹佑邦等研究了双光子 Jaynes-Cummings 模型中 Stark 效应对量子态保真度的影响^[5]。王菊霞计算了二能级原子和多模光场构成的联合系统中原子保真度和原子纠缠量^[6]。另一方面,腔量子电动力学 (Quantum Electrodynamics, QED) 系统是实现量子信息处理的非常具有前景的物理系统之一,实验上已利用腔 QED 系统实现了两原子纠缠态^[8],三粒子态和两比特量子逻

基金项目:福建省自然科学基金(No. 2015J01020)资助

第一作者:卢道明(1963—),男,教授,主要研究方向为量子光学。Email:daominglu79@hotmail.com。

收稿日期:2014-11-11;录用日期:2014-12-30

辑门等^[9,10]. 近年来,由于耦合腔系统在分布式量子计算和量子信息处理中具有潜在应用价值,引起了人们极大兴趣^[11-23]. Serafini 等研究了利用光纤耦合腔系统实现量子门^[11]. Yin 和 Li 提出利用该系统实现量子态转移和量子逻辑门方案^[12]. Li 和 Fang 提出了利用该系统产生 W_n 态的方案^[13]. Wu 等研究了 Rydberg 原子与耦合腔相互作用系统中的动力学行为^[14]. 然而,在对耦合腔系统的研究中,有关量子态演化过程中保真度的研究鲜有报道. 本文研究了原子与耦合腔相互作用系统中系统、原子和腔场保真度的演化.

1 理论模型及其波函数

我们考虑的物理模型如图 1 所示. 在耦合腔 A 和 B 中各囚禁一个二能级原子, 考虑原子跃迁频率等于腔场频率, 即共振相互作用的情况, 在旋波近似下系统的相互作用哈密顿为

$$H_I = f_1(a_A s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_2(a_B s_2^+ + a_B^+ s_2^-) + J(a_A a_B^+ + a_A^+ a_B) \quad (1)$$

式中 a_A^+ , a_A (a_B^+ , a_B) 表示腔场的产生和湮没算符, s_i^+ 和 s_i^- ($i=1, 2$) 表示第 i 个原子的跃迁算符, f_i ($i=1, 2$) 为原子与腔场间的相互作用系数, J 表示腔与腔之间的耦合强度.

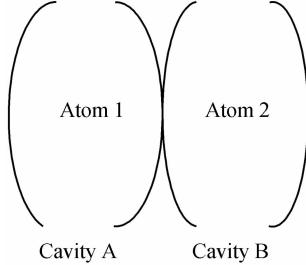


图 1 系统的框图

Fig. 1 Sketch of the set-up

假设初始时刻原子 1 处于 $\cos \theta |e\rangle_1 + \sin \theta |g\rangle_1$ 态, 原子 2 处于基态, 腔场处于真空态. 那么, 系统初态为

$$|\varphi(0)\rangle = \cos \theta |eg00\rangle + \sin \theta |gg00\rangle \quad (2)$$

式中 θ 为原子分布角, $|e\rangle$ ($|g\rangle$) 表示原子的激发态 (基态).

在式(1)的哈密顿作用下, $|gg00\rangle$ 态不演化, 而 $|eg00\rangle$ 态将在以 $|\varphi_1\rangle = |eg00\rangle$, $|\varphi_2\rangle = |gg10\rangle$, $|\varphi_3\rangle = |gg01\rangle$, $|\varphi_4\rangle = |ge00\rangle$ 为基矢的不变子空间中演化. 那么, 任意 t 时刻 $|\varphi_1\rangle$ 态将演化为

$$|\varphi_1(t)\rangle = A|\varphi_1\rangle + B|\varphi_2\rangle + C|\varphi_3\rangle + D|\varphi_4\rangle \quad (3)$$

系统态矢演化满足薛定谔方程, 即

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_1(t)\rangle = H_I|\varphi_1(t)\rangle \quad (4)$$

将式(3)代入式(4), 得出

$$\begin{cases} i\dot{A} = f_1 B \\ i\dot{B} = f_1 A + JC \\ i\dot{C} = JB + f_2 D \\ i\dot{D} = f_2 C \end{cases} \quad (5)$$

为简单起见, 设 $f_1 = f_2 = f$. 利用初始条件 $A(0) = 1$, $B(0) = C(0) = D(0) = 0$, 解方程(4)得到

$$\begin{cases} A = \frac{J^2 f^2}{H} \left(\frac{1}{\alpha^2 - f^2} \cos \alpha t - \frac{1}{\beta^2 - f^2} \cos \beta t \right) \\ B = -i \frac{J^2 f}{H} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - f^2} \sin \alpha t - \frac{\beta}{\beta^2 - f^2} \sin \beta t \right) \\ C = \frac{J f}{H} (\cos \alpha t - \cos \beta t) \\ D = -i \frac{J}{H} (\beta \sin \alpha t - \alpha \sin \beta t) \\ H = [(2f^2 + J^2)^2 - 4f^4]^{1/2} \\ \alpha = 2^{-1/2}[2f^2 + J^2 + H]^{1/2} \\ \beta = 2^{-1/2}[2f^2 + J^2 - H]^{1/2} \end{cases} \quad (6)$$

利用式(2)和式(6), 可得任意 t 时刻系统的态矢演化为

$$|\varphi(t)\rangle = \cos \theta |\varphi_1(t)\rangle + \sin \theta |gg00\rangle = \cos \theta (A|\varphi_1\rangle + B|\varphi_2\rangle + C|\varphi_3\rangle + D|\varphi_4\rangle) + \sin \theta |gg00\rangle \quad (7)$$

2 系统的量子态保真度

保真度描述了终态与初态的偏差程度, 定义为

$$F = [\text{Tr}(\sqrt{\rho_0} \rho \sqrt{\rho_0})^{1/2}]^2 \quad (8)$$

式中 Tr 表示求迹, ρ_0 为初态的密度算符, ρ 为终态的密度算符. 保真度 $0 \leq F \leq 1$. $F=1$ 表示终态与初态一致, 对应理想的信息传输过程; $F=0$ 表示终态与初态正交, 表明信息在传输过程中完全失真; $0 < F < 1$ 表示信息在传输过程中存在失真.

2.1 系统的保真度演化

利用式(2)和式(7), 再根据式(8)保真度的定义, 可求得 t 时刻系统的保真度为

$$F_s = |\langle \varphi(0) | \varphi(t) \rangle|^2 = |A \cos^2 \theta + \sin^2 \theta|^2 \quad (9)$$

式中下标 s 表示系统. 为了研究腔场间耦合系数对系统保真度的影响, 取 $\theta = \frac{\pi}{4}$, J 分别取 $0.5f$, f , $2f$ 和 $5f$ 时, 系统保真度 F_s 随规范时间 ft 的演化规律如图 2 所示. 从图 2 可见: 随耦合系数 J 的增大, F_s 的演化规律从不规则振荡逐渐转变为准周期性振荡. 这是因为当原子分布角一定时, F_s 的演化由系数 A 的演化规律决定. 当 $J \gg f$ 时, 频率 $\alpha \approx \beta$, 这时 A 转化成近似单一频率的函数, 因此, F_s 表现为准周期性演化.

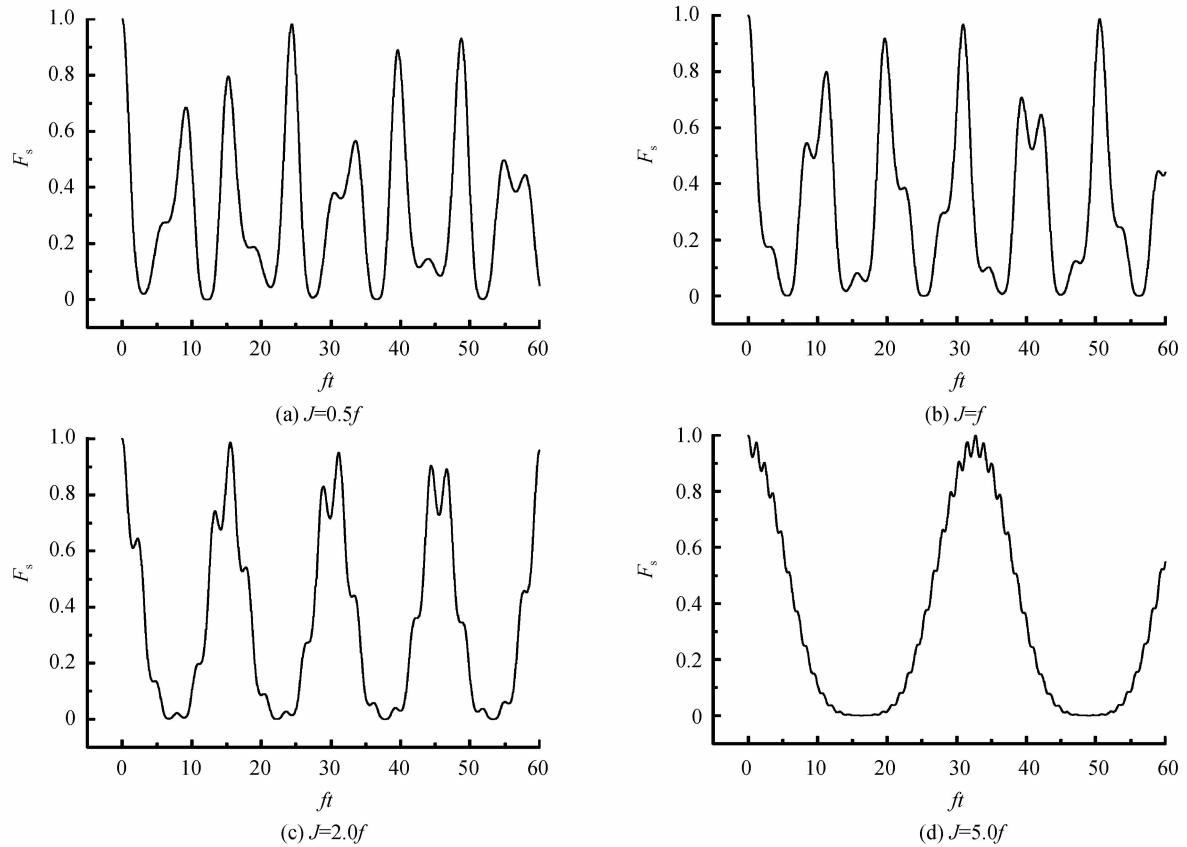


图 2 系统保真度 F_s 随规范时间的演化
Fig. 2 Time evolution curves of system fidelity

2.2 原子的保真度演化

由式(2)可得两原子构成的子系统的初态为

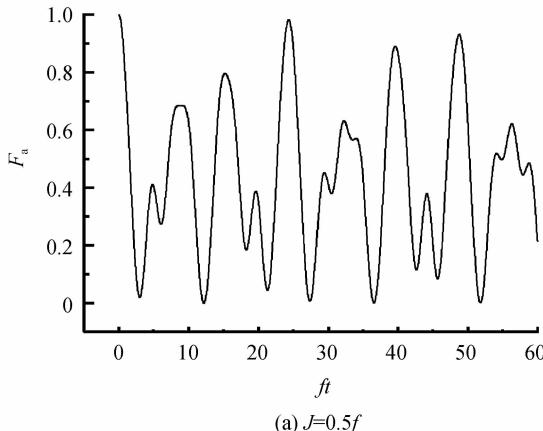
$$|\varphi_e(0)\rangle = \cos \theta |eg\rangle + \sin \theta |gg\rangle \quad (10)$$

其对应的密度算符为

$$\rho_e(0) = (\cos \theta |eg\rangle + \sin \theta |gg\rangle) \times (\cos \theta \langle eg| + \sin \theta \langle gg|) \quad (11)$$

式中下标 e 表示原子。利用式(7), 不难得出 t 时刻原子的密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_e(t) = \text{Tr}_f \rho_e(t) &= \cos^2 \theta \times (|A|^2 |eg\rangle \langle eg| + \\ &AD^* |eg\rangle \langle ge| + DA^* |ge\rangle \langle eg| + |D|^2 |ge\rangle \cdot \\ &\langle ge| + |B|^2 |gg\rangle \langle gg| + |C|^2 |gg\rangle \langle gg|) + \end{aligned}$$

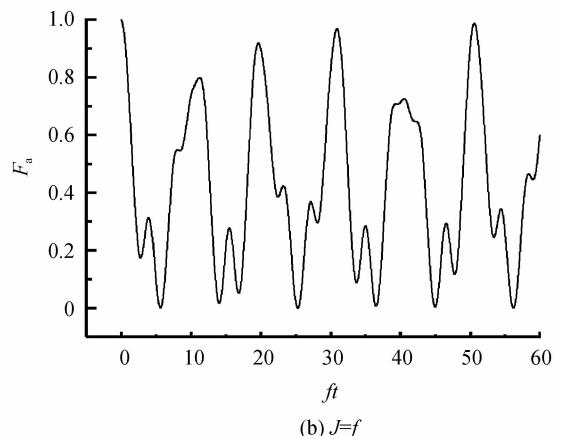


$$\begin{aligned} &\sin \theta \cos \theta (A^* |gg\rangle \langle eg| + D^* |gg\rangle \langle ge| + \\ &A |eg\rangle \langle gg| + D |ge\rangle \langle eg|) + \sin^2 \theta |gg\rangle \langle gg| \quad (12) \end{aligned}$$

式中 Tr_f 表示对场变量求迹, 下标 f 表示场, $*$ 表示复共轭。将式(11)和式(12)代入式(8), 可求得 t 时刻原子的保真度为

$$F_a = \cos^4 \theta |A|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (A^* + A + |B|^2 + |C|^2) + \sin^4 \theta \quad (13)$$

同样, 取 $\theta = \frac{\pi}{4}$, J 分别取 $0.5f$ 、 f 、 $2f$ 和 $5f$ 时, F_a 随规范时间 ft 的演化规律如图 3。从图 3 可见, 原子保真度 F_a 呈现与 F_s 相似的演化规律, 随耦合系数 J 的逐渐



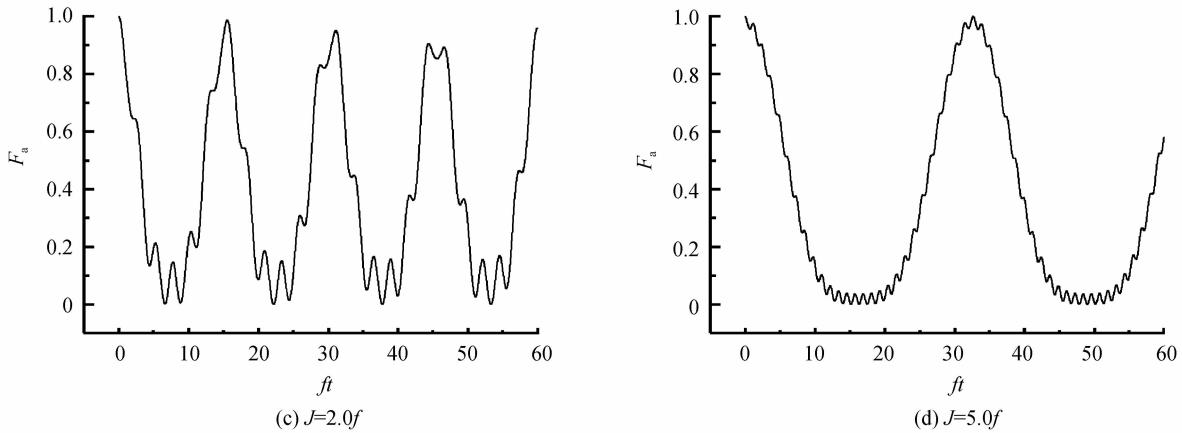


图3 原子保真度 F_a 随规范时间的演化
Fig. 3 Time evolution curves of atomic fidelity

增大,其演化也表现出从不规则振荡逐渐转变为准周期性振荡的行为.其原因同样是因为当 $J \gg f$ 时,频率 $\alpha \approx \beta$,这时展开系数 A, B 和 C 转化成近似单一频率的函数,因此, F_a 表现为准周期性演化.另一方面,随耦合系数 J 的增大,曲线平均值减小.例如,当 $J=0.5f$ 时, $\bar{F}_a=0.43643$;当 $J=f$ 时, $\bar{F}_a=0.41849$;当 $J=2.0f$ 时, $\bar{F}_a=0.401$;当 $J=5f$ 时, $\bar{F}_a=0.34378$.这表明随腔场间耦合系数的增大原子保真度降低.

2.3 腔场的保真度演化

由式(2)可得两腔场构成的子系统的初态密度算符为

$$\rho_f(0)=|00\rangle\langle 00| \quad (14)$$

利用式(7),可求得 t 时刻两腔场构成的子系统的密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_f(t)=\text{Tr}_a \rho_s(t)=\cos^2 \theta \times &(|A|^2|00\rangle\langle 00|+ \\ &BC^*|10\rangle\langle 01|+CB^*|01\rangle\langle 10|+|D|^2|00\rangle\langle 00|+ \\ &|B|^2|10\rangle\langle 10|+|C|^2|01\rangle\langle 01|)+ \end{aligned}$$

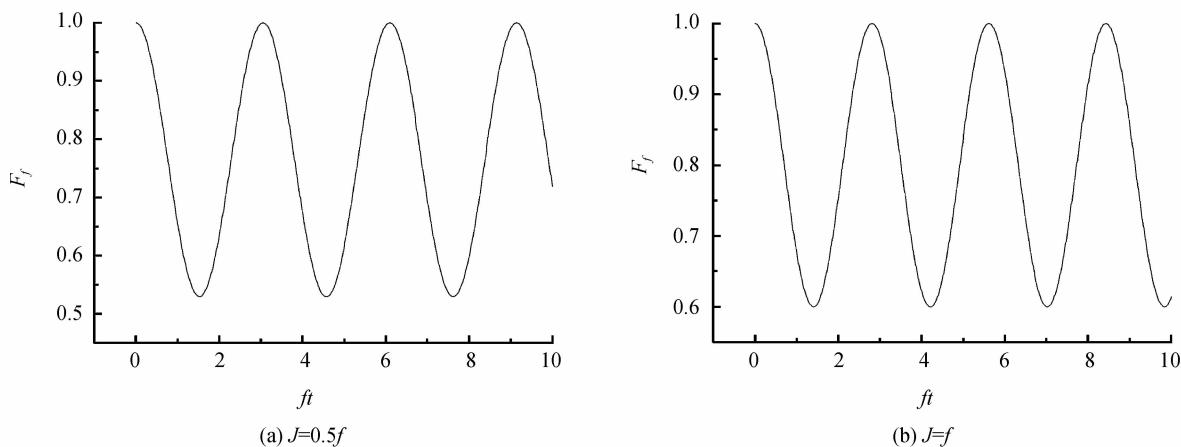
$$\begin{aligned} &\sin \theta \cos \theta(B^*|00\rangle\langle 10|+C^*|00\rangle\langle 01|+B|10\rangle\langle 01|+C|01\rangle\langle 00|)+\sin^2 \theta|00\rangle\langle 00| \end{aligned} \quad (15)$$

结合式(8),(14)和(15),不难导出腔场的保真度为

$$F_f=\cos^2 \theta(|A|^2+|D|^2)+\sin^2 \theta \quad (16)$$

同样,取参量 $\theta=\frac{\pi}{4}$,耦合系数 J 取 $0.5f, f, 2f, 5f$

时, F_f 的演化曲线如图 4.从图 4 可见: F_f 呈现周期性演化规律,其振荡频率随耦合系数 J 的增大而增大.随耦合系数 J 的增大,曲线最小值逐渐增大,曲线重心上移.这表明腔场的保真度随腔场间耦合的增强而增大.从物理机制上看,文献[24]已表明耦合腔系统的哈密顿可对角化为两个频率不同的没有耦合的非定域场模哈密顿,因此系统可等效为两个二能级原子与独立的两个场模的非共振相互作用.随腔场间耦合增强,独立的两个场模与原子跃迁频率间的失谐量增大,因此场模被激发的可能性降低,腔场保持在原真空态的可能性增加,导致腔场保真度增大.



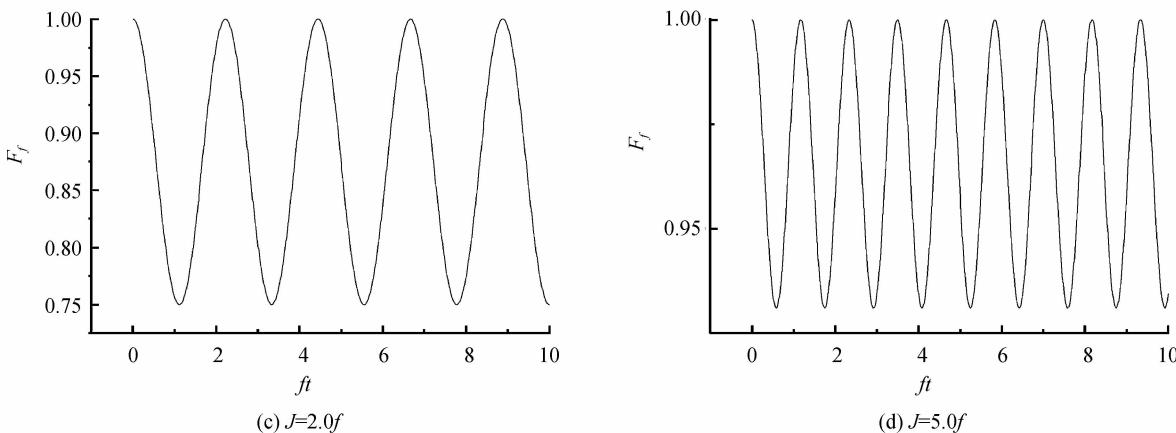


图 4 腔场保真度 F_f 随规范时间的演化
Fig. 4 Time evolution curves of cavity field fidelity

3 结论

本文研究了两个二能级原子与耦合腔相互作用系统中系统、原子和腔场的保真度。讨论了腔场间耦合系数变化对保真度演化的影响。数值计算结果表明：随腔场间耦合系数的增大，系统和原子保真度从不规则振荡逐渐转变为准周期性振荡。其原因是展开系数 A 、 B 、 C 和 D 随时间以正弦或余弦函数形式演化，当 $J \gg f$ 时，频率 $\alpha \approx \beta$ ，这时展开系数转化成近似单一频率的函数，因此，保真度表现为准周期性演化。随腔场间耦合系数增大，原子保真度的平均值减小。这表明随腔场间耦合系数的增大原子保真度降低。另一方面，腔场保真度呈现周期性演化规律，随腔场间耦合系数的增大其振荡频率增大，同时曲线最小值逐渐增大，曲线重心上移。这表明腔场的保真度随腔场间耦合的增强而增大。

参考文献

- [1] LAUK N, BRIEN C O, FLEISCHHAUER M. Fidelity of photon propagation in electromagnetically induced transparency in the presence of four-wave mixing[J]. *Physical Review A*, 2013, **88**(1): 013823.
 - [2] YANG W L, YIN Z Q, HU Y, et al. High-fidelity quantum memory using nitrogen-vacancy center ensemble for hybrid quantum computation[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(1): 010301.
 - [3] DOU F Q, FU L B, LIU J. High-fidelity fast quantum driving in nonlinear systems[J]. *Physical Review A*, 2014, **89**(1): 012123.
 - [4] LIU Tang-kun, WANG Ji-suo, LIU Xiao-jun, et al. Influence of entangled states of atomic dipole-dipole interaction on the fidelity of quantum states[J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, **49**(4): 708-712.
刘堂昆, 王继锁, 柳晓军, 等. 纠缠态原子偶极间相互作用对量子态保真度的影响[J]. 物理学报, 2000, **49**(4): 708-712.
 - [5] ZHAN You-bang, ZHOU Ping, WANG You-wu. Influence of the stark effect on fidelity of quantum state in the two-photon J-C model[J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2003, **14**(11): 1205-1209.
詹佑邦, 周平, 王郁武. 双光子 J-C 模型中 Stark 效应对量子态保真度的影响[J]. 光电子激光, 2003, **14**(11): 1205-1209.
 - [6] WANG Ju-xia. Relevance between fidelity and degree of

entanglement in the system of two-level atoms interacting with multi-mode fields[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(3): 0327002.

王菊霞. 多模光场与二能级原子相互作用系统中保真度与纠缠度的关联[J]. 光子学报, 2014, 43(3): 0327002.

- [7] ZHAN Y, CHEN X Y. Entanglement fidelity of channel adaptive quantum codes[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(1): 010308.
 - [8] HAGLEY E, MAITRE X, NOGUES G, et al. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms[J]. *Physical Review Letters*, 1997, **79**(1): 1-5.
 - [9] RAUSCHENBEUTEL A, NOGUES G, OSNAGHI S, et al. Step by step engineered many particle entanglement [J]. *Science*, 2000, **288**: 2014-2028.
 - [10] RAUSCHENBEUTEL A, NOGUES G, OSNAGHI S, et al. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED[J]. *Physical Review Letters*, 1999, **83** (24): 5166-5169.
 - [11] SERAFINI A, MANCINI S, BOSE S. Distributed quantum computation via optical fibers[J]. *Physical Review Letters* 2006, **96**(1): 010503.
 - [12] YIN Z Q, LI F L. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber[J]. *Physical Review A*. 2007, **75**(1): 012324.
 - [13] LI Y L, FANG M F. Generation of W_n state with three atoms trapped in two remote cavities coupled by an optical fibre[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(5): 050314.
 - [14] WU H Z, YANG Z B, ZHENG S B. Two-photon absorption and emission by Rydberg atoms in coupled cavities [J]. *Physical Review A*, 2013, **88**(4): 043816.
 - [15] OGDEN C D, IRISH E K, KIM M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(6): 063805.
 - [16] YANG Z B, XIA Y, ZHENG S B. Resonant scheme for realizing quantum phase gates for two separate atoms via coupled cavities[J]. *Optics Communications*, 2010, **283**(15): 3052-3057.
 - [17] ZHENG S B, YANG C P, NORI F. Arbitrary control of coherent dynamics for distant qubits in a quantum network [J]. *Physical Review A*, 2010, **82**(4): 042327.
 - [18] PELLIZZARI T. Quantum networking with optical fibres [J]. *Physical Review Letters*, 1997, **79**(26): 5242-5245.
 - [19] YE S Y, ZHONG Z R, ZHENG S B. Deterministic generation of three-dimensional entanglement for two atoms separately trapped in two optical cavities [J]. *Physical*

- Review A*, 2008, **77**(1): 014303.
- [20] CICCARELLO F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays[J]. *Physical Review A*, 2011, **83**(4): 043802.
- [21] SONG J, SUN X D, XIA Y, et al. Efficient creation of continuous-variable entanglement for two atomic ensembles in coupled cavities [J]. *Physical Review A*, 2011, **83**(5): 052309.
- [22] PENG P, LI F L. Entangling two atoms in spatially separated cavities through both photon emission and absorption processes[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(6): 062320.
- [23] LU Dao-ming. The entanglement properties in the system of three atoms interacting with three coupled cavities via a two-photon hopping interaction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, **33**(1): 0127001.
卢道明. 三耦合腔系统双光子过程中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2013, **33**(1): 0127001.
- [24] OGDEN C D, IRISH E K, KIM M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(6): 063805.