

doi:10.3788/gzxb20154405.0522002

基于瑞利-索末菲积分的大衍射角衍射 光学元件设计方法

庞辉^{1,2}, 张满¹, 邓启凌¹, 邱琪², 杜春雷³

(1 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

(2 电子科技大学 光电学院, 成都 610064)

(3 中国科学院重庆绿色智能技术研究院, 重庆 401122)

摘 要:针对现有的衍射光学元件设计方法只适用于小角度衍射的情况, 本文提出了一种基于瑞利-索末菲衍射积分的设计方法, 可以用来设计具有大衍射角的衍射光学元件。先对目标光场进行坐标变换和强度调整, 再利用改进的 Gerchberg-Saxton 算法优化得到衍射光学元件的相位分布。分别采用本文方法和原有的基于夫琅禾费衍射积分的方法设计衍射光学元件实现线条结构光 and 不同角度方框图形的光场重构, 结果表明: 原有的设计方法只适用于衍射角全角小于 25° 的情况, 当衍射角大于 25° 时, 重构光场会出现显著的枕形畸变和不均匀的强度分布。而本文方法在小角度和大角度衍射下都能重构出准确的衍射角和较为均匀的强度分布。

关键词: 衍射光学; 衍射光学元件; 瑞利-索末菲积分; 光学设计; 计算全息; 相位恢复; 迭代算法

中图分类号: TN249

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)05-0522002-6

Design the Diffractive Optical Element with Large Diffraction Angle Based on Rayleigh-Sommerfeld Integral

PANG Hui^{1,2}, MAN Zhang¹, DENG Qi-ling¹, QIU Qi², DU Chun-lei³

(1 Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China)

(2 School of Optoelectronic Information, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610064, China)

(3 Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 401122, China)

Abstract: A novel method is presented for designing the diffractive optical element with large diffraction angle based on the Rayleigh-Sommerfeld Integral. In the design, the target intensity distribution is firstly modified with coordinate transformation and intensity adjustment. Thereafter the modified Gerchberg-Saxton algorithm is adopted to optimize the phase distribution of the diffractive optical element. Our method and the original method, which adopts Fraunhofer diffraction integral to calculate the diffraction, are used to design the diffractive optical element to reconstruct a structured light and a square pattern with different diffraction angle. And the result shows that the original method can work well only the diffraction angle below 25° . When the diffraction angle gets larger the reconstructed light field shows significant pillow distortion and uneven intensity distribution. In contrast, our method can achieve the exact diffraction angle and even intensity distribution at all the angle.

Key words: Diffractive optics; Diffractive optical element; Rayleigh-Sommerfeld Integral; Optical design; Computer holography; Phase retrieval; Iterative algorithm

OCIS Codes: 0050.1970; 090.1760; 090.2890; 100.5070

基金项目: 国家自然科学基金(Nos. 11174281, 61275061)资助

第一作者: 庞辉(1986-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为光学超分辨成像及衍射光学. Email: wuli041@126.com

导师(通讯作者): 杜春雷(1962-), 女, 研究员, 博导, 主要研究方向为光学与微光学及应用. Email: cldu@cigit.ac.cn

收稿日期: 2014-12-01; 录用日期: 2015-02-16

<http://www.photon.ac.cn>

0 引言

衍射光学元件(Diffractive Optical Element, DOE)是指基于光波的衍射理论,利用计算机辅助设计,并用超大规模集成电路制作工艺,在片基上刻蚀产生两个或多个台阶深度的浮雕结构,形成纯相位、同轴再现、具有极高衍射效率的一类光学元件^[1]. DOE 由于能对入射光的波前进行灵活地调制,从而可以实现一些传统光学元件难以实现的功能,因此得到了人们的广泛关注.一些典型的 DOE 应用包括:光束整形^[2],光学分束器^[3],光镊^[4],多平面图像生成^[5],全息投影显示^[6-8]等.

DOE 的设计问题等价于相位恢复问题,即已知入射面和目标面上的光场分布,来求解 DOE 的相位分布,使得入射光经过 DOE 的纯相位调制后,在输出面上产生特定的光强分布.经过近三十年的时间,衍射光学元件的设计方法得到了极大的发展.综合这些方法,主要可分为两类:一类是基于随机搜索的数值优化方法,如模拟退火算法^[9]和遗传算法^[10]等.这类优化算法虽然可以得到更高的衍射效率和更小的均方误差,但是要找到最优解,需要消耗大量的搜索时间,收敛速度很慢.另一类是基于傅里叶变换的迭代算法,如 Gerchberg-Saxton 算法(Gerchberg-Saxton, GS)算法^[11]和一些改进的 GS 算法^[12-14]等.其主要思想是通过在 DOE 面和输出面上进行相应的光场限制并来回迭代从而得到 DOE 的相位分布,能够很快地收敛并得到误差较小的结果,因而使用也最为广泛.

然而不管采用哪种设计方法,都需要计算某一相位分布的 DOE 所对应的输出面上的光场分布.因此,准确的衍射计算显得尤为关键.由于可以借助快速傅里叶变换运算,在现有的 DOE 设计中,衍射的数值计算大都是基于菲涅耳衍射积分或者夫琅禾费衍射积分.然而菲涅耳衍射积分和夫琅禾费衍射积分都是标量衍射理论框架内严格的基尔霍夫衍射公式的傍轴近似解.因此它们只能用于小角度衍射的情形.当衍射角过大傍轴近似不成立时,设计结果将出现严重的畸变.另外角谱法虽然不包含任何物理近似,可以准确地计算大角度的衍射,但是它限定了 DOE 面和输出面相同的采样间隔.虽然可以通过对 DOE 进行补零操作来增加输出面的尺寸.但是当 DOE 具有较大的衍射角并且输出面位于远场衍射区时,输出面的尺寸将会大大超过 DOE 的尺寸.此时的补零操作会造成极大的数据量,从而无法运算.综上所述,现有的方法仅适用于设计小衍射角的 DOE,而在结构光投影和全息显示等领域中迫切地需要具有大衍射角的 DOE.

本文提出了一种可以设计大衍射角 DOE 的方法.采用瑞利-索末菲积分来计算 DOE 和输出面间的光场

传输.在 DOE 的设计中,先对目标光场进行坐标变化和强度调整,然后利用改进的 GS 算法来优化得到 DOE 的相位分布.

1 设计原理

图 1 为典型的基于 DOE 产生任意二维强度分布的系统结构示意图.准直的激光束垂直入射到 DOE 表面,经过 DOE 的纯相位调制后在输出平面形成特定的光强分布. DOE 的设计问题即是已知入射光的复振幅分布和出射光的强度分布,来求解 DOE 的相位分布.

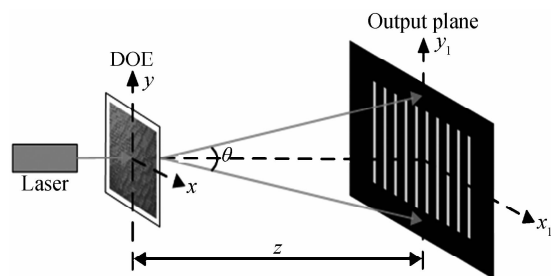


图 1 典型的采用 DOE 的系统结构示意图
Fig. 1 Schematic of the system using DOE

假设 DOE 的相位分布为 $\varphi(x, y)$, 则其透过率函数为

$$t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] \quad (1)$$

如果 DOE 平面上入射光的复振幅分布为 $u(x, y)$, 则从 DOE 出射的光场为

$$u_r(x, y) = u(x, y) \times t(x, y) \quad (2)$$

根据第一类瑞利-索末菲衍射积分^[15], 可以得到对应的输出面上光场的复振幅分布为

$$u(x_1, y_1) = \iint u_r(x, y) \frac{z \exp(ikR)(1-ikR)}{2\pi R^3} dx dy \quad (3)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为自由空间中的波数, z 为衍射距离, R 为 DOE 面和输出面上采样点之间的距离, 即

$$R = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z^2} \quad (4)$$

式(3)为第一类瑞利-索末菲衍射积分, 是标量衍射理论框架内最为准确的衍射计算公式, 不包含任何的物理近似. 通常情况下, 此衍射积分并不存在解析解, 只能采用数值计算的方法进行求解. 第一种方法是将积分变成简单的求和进行计算, 但是却非常耗时. 假设 DOE 和输出面的采样点数都为 1024×1024 , 则求和计算将需要几个小时. 这对需要在输入面和输出面间进行反复多次迭代计算的 DOE 设计来说, 显然是不合适的. 另外, 式(3)还可以看成是两个函数的卷积形式, 可以采用快速傅里叶变换来计算. 但是跟角谱法一样, 它限定了 DOE 和输出面相同的采样间隔.

当 DOE 被用于结构光生成、分束器设计、全息投影显示等领域时, 输出面通常位于 DOE 的远场衍射区, 因此考虑对瑞利-索末菲衍射积分作远场近似. 式(3)将变成^[16]

$$u(x_1, y_1) = \frac{-ikz \exp(ikr)}{2\pi r} \iint u_t(x, y) \times \exp\left[\frac{-ik}{r}(xx_1 + yy_1)\right] dx dy \quad (5)$$

式中距离 r 为

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2} \quad (6)$$

需要说明的是式(5)只是严格的瑞利-索末菲衍射积分的远场近似,并没有包含傍轴近似,因此可以用于计算大角度的衍射问题.式(5)可以重新写为

$$u(x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikr) \frac{z^2}{r^2} \iint u_t(x, y) \times \exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda z}\left(x \frac{x_1 z}{r} + y \frac{y_1 z}{r}\right)\right] dx dy \quad (7)$$

定义输出平面内新的坐标为 (x_2, y_2) , 新坐标内的光场复振幅分布为 $u(x_2, y_2)$. 与原有坐标和强度的对应关系为

$$\begin{cases} x_2 = \frac{z}{r} x_1, y_2 = \frac{z}{r} y_1 \\ u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1) \frac{r^2}{z^2} \end{cases} \quad (8)$$

最后,将式(8)代入式(7),得到新坐标 (x_2, y_2) 中的复振幅分布 $u(x_2, y_2)$ 和 DOE 面透射光场的复振幅分布 $u_t(x, y)$ 之间的关系为

$$u(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikr) \iint u_t(x, y) \times \exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda z}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy = \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikr) F\{u_t(x, y)\} \quad (9)$$

式中 $F\{\}$ 代表了二维傅里叶变换操作.式(9)说明经过式(8)的坐标变换和强度调整之后,新的坐标 (x_2, y_2) 下的光场分布 $u(x_2, y_2)$ 和 DOE 平面透射光场 $u_t(x, y)$ 之间存在着傅里叶变换关系.且其强度分布,直接由 $u_t(x, y)$ 的傅里叶变换得到.

基于上述分析,在 DOE 设计中,可以先对目标光场 $|u_d(x_1, y_1)|^2$ 按式(8)进行坐标变换和强度调整,变成 (x_2, y_2) 坐标下的光场分布 $|u_d(x_2, y_2)|^2$. 然后将 $|u_d(x_2, y_2)|^2$ 作为 DOE 设计过程中的理想振幅分布.详细的设计流程为:

(1) 根据公式(8),将目标光强分布 $|u_d(x_1, y_1)|^2$ 变化成 $|u_d(x_2, y_2)|^2$.

(2) 随机产生二维矩阵,每个元素取值为 $0-2\pi$ 之间,代表 DOE 的初始相位分布.

(3) 对 DOE 面的透射光场直接做二维傅里叶变换,得到输出面上的光场复振幅分布.保持其相位不变,对振幅进行限制.

(4) 对修正后的复振幅分布做二维逆傅里叶变换,得到 DOE 面的复振幅分布.保持相位不变,将振幅分布限定为入射光的振幅分布.

重复步骤(3)~(4),直到重构的光强分布和理想的光强分布 $|u_d(x_2, y_2)|^2$ 之间的误差足够小为止.步骤(3)中的振幅限制方式为^[13]

$$|u'(x_2, y_2)| = \begin{cases} c |u_d(x_2, y_2)|, & (x_2, y_2) \in S \\ |u(x_2, y_2)|, & (x_2, y_2) \notin S \end{cases} \quad (10)$$

式中 $|u(x_2, y_2)|$ 为计算得到的输出面上光场的复振幅分布, $|u_d(x_2, y_2)|$ 为理想的振幅分布, S 代表信号区.式(10)表示的振幅限制方式为:将信号区内的振幅替换为理想振幅和缩放因子 c 的乘积,信号区外的振幅保持不变.其中缩放因子 c 定义为

$$c = \frac{\int |u_d(x_2, y_2)| |u(x_2, y_2)| dx_2 dy_2}{\int |u_d(x_2, y_2)|^2 dx_2 dy_2} \quad (11)$$

假设 DOE 的采样点数为 $M \times N$, 采样间隔为 $\Delta x \times \Delta y$. 由于采用了快速傅里叶变换运算,则输出面上 (x_1, y_1) 坐标下的采样点数也为 $M \times N$, 采样间隔为

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda z}{M \Delta x}, \Delta y_1 = \frac{\lambda z}{M \Delta y} \quad (12)$$

经过式(8)变化后, (x_2, y_2) 坐标下光场的采样点数和采样间隔与 (x_1, y_1) 坐标下相同.

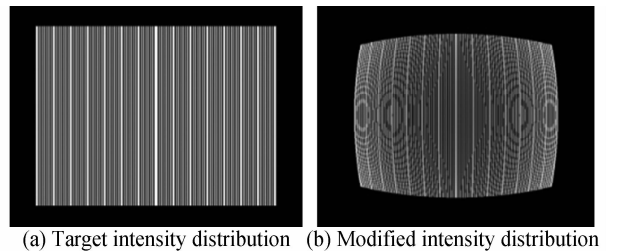
2 设计实例

以线条结构光的生成为例,来验证本文方法的可行性.输出面上的理想光强分布如图 2(a) 所示.中间区域为信号区,由许多不同宽度的线条组成,采样点数为 641×481 , 水平和垂直方向相对于 DOE 的角度 θ 分别为 64° 和 48° . 为了增加 DOE 设计中的振幅自由度,对信号区外边进行了补零操作,最终整个输出面的采样点数为 941×701 , 此时整个输出面相对于 DOE 的角度 θ 变为 $85^\circ \times 66^\circ$. 入射激光波长为 532nm . 根据式(12)可以得到 DOE 的采样间隔为

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{M \Delta x_1} = \frac{532\text{nm}}{2 \tan(85^\circ/2)} = 290\text{nm}$$

$$\Delta y = \frac{\lambda z}{M \Delta y_1} = \frac{532}{2 \tan(66^\circ/2)} = 410\text{nm}$$

最终 DOE 的参数为:采样点数 941×701 , 采样间隔 $290\text{nm} \times 410\text{nm}$, 周期为 $273\mu\text{m} \times 287\mu\text{m}$.



(a) Target intensity distribution (b) Modified intensity distribution

图 2 理想的输出光强分布

Fig. 2 Target output intensity distribution

采用上一节描述的设计方法,先对目标光强分布根据式(8)进行坐标变化和强度调整,得到修正后的光

强分布如图2(b)所示. 整个结构光的形状由原先的矩形变成了桶形, 并且中心部分强度较边缘部分弱. 这是因为在式(8)中, 距离 r 总是大于等于衍射距离 z , 所以坐标变换将会引起目标光场的整体压缩. 同时输出面上越远离光轴的点 r 值越大, 因此压缩程度也就越大, 所以造成了整体的桶形分布. 而强度调整公式指出 r 值越大强度越大, 因此边缘部分光强较强. 图 2(b) 中的圆环形条纹是由坐标变换引起的, 可以通过增加输出面的采样点进行消除.

随后, 根据步骤(3)和(4)对 DOE 的相位分布进行迭代优化. 同时采用原有的设计方法进行设计, 并与本文方法进行比较. 原有的设计方法是采用夫琅禾费衍射积分来计算 DOE 和输出面间的衍射, 因此直接将图 2(a) 作为迭代过程中输出面上的理想光强分布, 之后再根据步骤(2)~(4)进行设计.

最后, 基于严格的瑞利-索末菲积分公式(3)并采用简单求和的方式来计算原有方法和本文方法设计得到的 DOE 的衍射场分布. 设定衍射距离为 100mm, 计算得到的输出面上的光强分布如图 3 所示. 图 3(a) 为原有方法的设计结果, 整个结构光图案出现了显著的枕形畸变, 整体尺寸约为 180mm × 130mm, 在水平方向和竖直方向相对于 DOE 的角度 θ_x 和 θ_y 分别为

$$\theta_x = 2 \tan^{-1} \left(\frac{180/2}{100} \right) = 84^\circ$$

$$\theta_y = 2 \tan^{-1} \left(\frac{130/2}{100} \right) = 66^\circ$$

严重偏离了设计目标 $64^\circ \times 48^\circ$. 图 3(b) 为本文方法的设计结果, 整体的光强呈矩形分布, 尺寸为 125mm × 89mm, 等价于衍射角 $64^\circ \times 48^\circ$, 与目标一致. 除了形状之外, 整体的光强比原有方法也更加均匀.

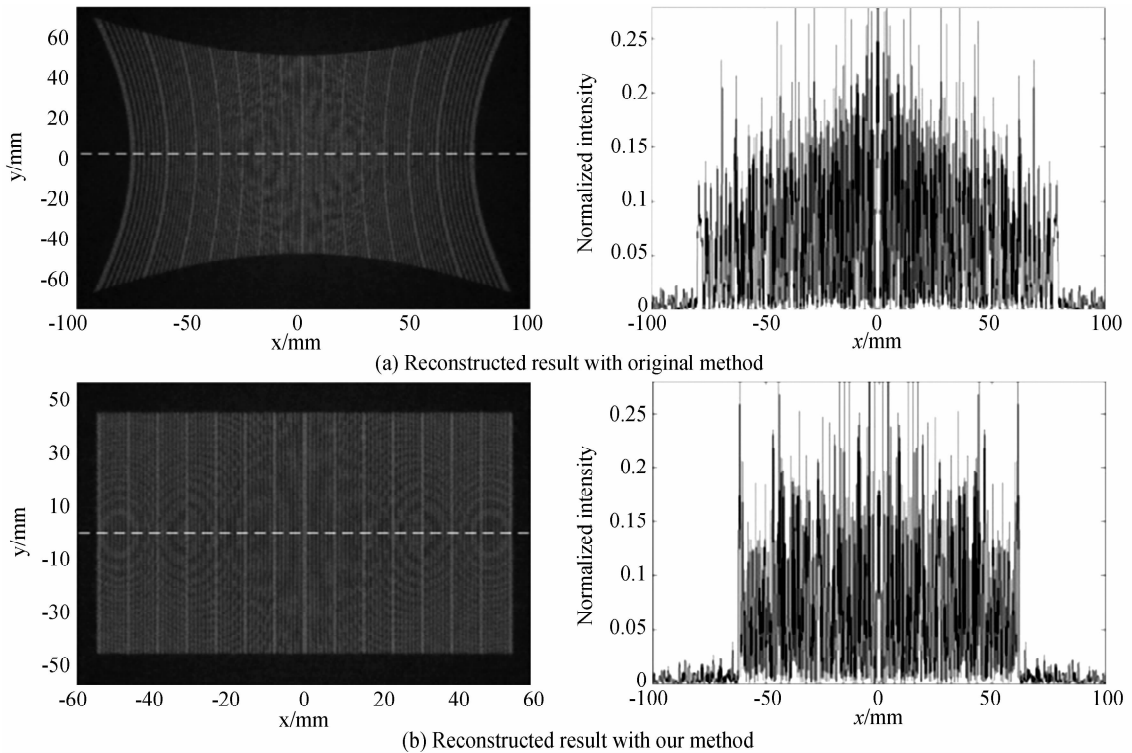


图 3 设计结果比较

Fig. 3 The design result

为了更加深入地比较本文方法和原有设计方法, 选择‘田’字形图形作为目标光强分布, 其相对于 DOE 的角度 θ 从 $15^\circ \times 15^\circ$ 变化到 $70^\circ \times 70^\circ$. 同样采用严格的瑞利-索末菲积分公式(3)来评价设计的 DOE. 最后重构出的光强分布如图 4 所示. 从图 4 中可以看到, 当 DOE 的衍射角在 $20^\circ \times 20^\circ$ 时, 原有设计方法产生的畸变较小, 而随着衍射角的增加, 枕形畸变越来越严重. 相反, 在所有的衍射角下, 本文方法重构出的光强分布都很好符合目标光强分布. 以顶点 A 距离光轴 O 点的距

离来定量评价本文方法和原有方法在不同衍射角下的设计结果, 得到如图 5 所示的曲线分布. 图中理论曲线代表了理想的 A 点距离 O 点的距离 $z \times \tan(\theta/2) \times \sqrt{2}$, 注意图中所有的距离都按照衍射距离 z 作了归一化处理. 图 5 表明, 当 DOE 的衍射角小于 25° 时, 原有设计方法能得到与理想分布比较吻合的结果. 而当衍射角大于 25° 时, 原有设计方法的结果越来越偏离理想分布. 而本文方法在所有角度下都能得到与目标非常吻合的结果.

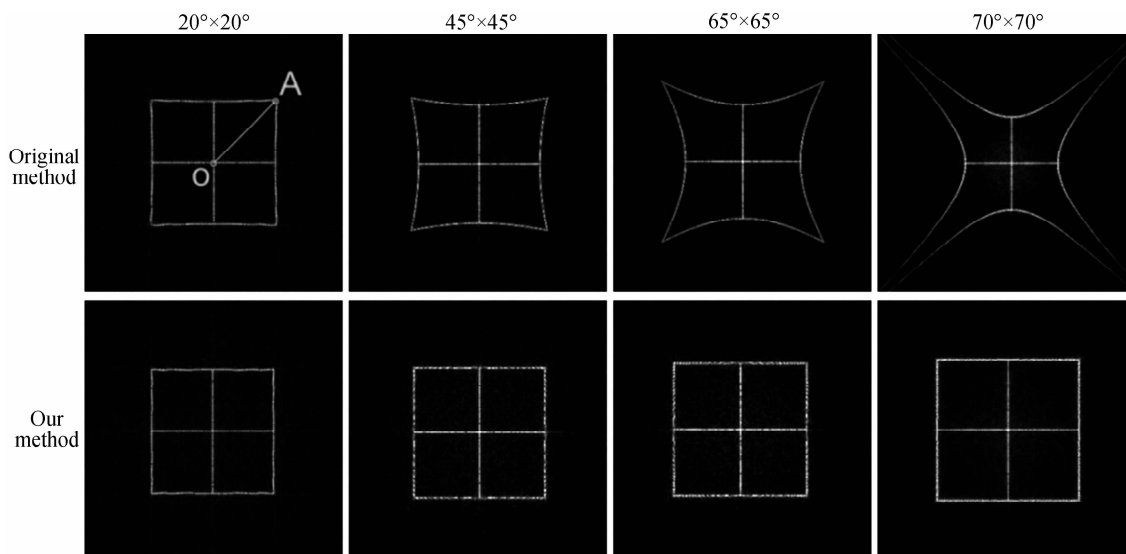


图4 不同衍射角下本文方法和原有设计方法重构的结果
Fig. 4 Reconstructed intensity distribution with our method and original method

最后,需要指出的是本文的设计方法是在标量衍射理论框架下提出的.然而标量衍射理论始终是严格矢量衍射理论的近似.一般认为只有当DOE的采样间隔远大于入射光的波长时,标量衍射理论才是适用的.实际上,当DOE的采样间隔小于入射波长时,基于标量衍射理论的设计方法得到的结果还是非常准确的,只要DOE中由最小特征尺寸组成的局部区域的尺寸大于入射波长.此时由标量衍射理论计算得到的光场分布与严格的电磁场计算得到的光场分布之间的偏差较小^[17-18].在文献[17]中,针对 $5\mu\text{m}$ 的入射波长,设计了特征尺寸为 $1\mu\text{m}$ 的DOE来实现入射光的分束,此时DOE的特征尺寸仅为入射波长的五分之一,最终得到的各级次的衍射效率与严格的时域有限差分算法所计算的结果之间的偏差在10%以内.根据以往的DOE设计和使用经验,当其采样间隔小到入射光波长的二分之一时,采用标量衍射理论设计的DOE所对应的输出光场无明显的畸变和强度不均匀性.此时DOE的衍射角全角约为 90° .

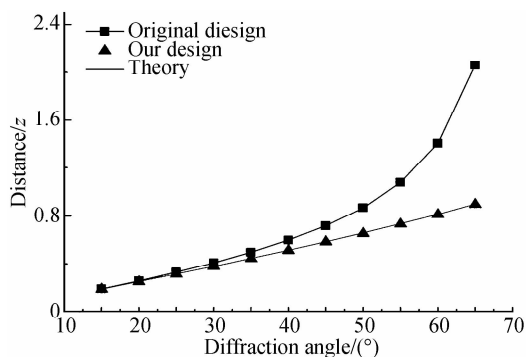


图5 不同衍射角下的设计结果比较
Fig. 5 The comparison of different design

3 结论

本文提出了一种大衍射角DOE的设计方法,基于非傍轴近似的瑞利-索末菲积分建立了DOE的透射光场和输出面光场之间的对应关系,通过对目标强度分布进行坐标变化和强度调整,再将修正后的强度分布作为迭代过程中输出面上的理想分布.利用本文方法设计得到的输出面光场具有准确的衍射角和较均匀的光强分布,克服了原有设计方法中产生的枕形畸变和强度不均匀问题.在大角度分束器设计、结构光生成、全息投影显示等领域中有着广阔的应用前景.

参考文献

- [1] 金国藩, 严瑛白, 邹敏贤, 等. 二元光学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [2] PANG Hui, YING Chao-fu, FAN Chang-jiang, *et al.* Design diffractive optical elements for beam shaping with hybrid algorithm[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(6): 977-981. 庞辉, 应朝服, 范长江, 等. 用于光束整形的衍射光学元件设计的混合算法[J]. *光子学报*, 2010, **39**(6): 977-981.
- [3] BENGTTSSON J. Design of fan-out kinoforms in the entire scalar diffraction regime with an optimal-rotation-angle method [J]. *Applied Optics*, 1997, **36**(32): 8435-8444.
- [4] PASIENSKI M, DEMARCO B. A high-accuracy algorithm for designing arbitrary holographic atom traps [J]. *Optics Express*, 2008, **16**(3): 2176-2190.
- [5] YING Chao-fu, PANG Hui, FAN Chang-jiang, *et al.* New method for the design of a phase-only computer hologram for multiplane reconstruction[J]. *Optical Engineering*, 2011, **50**(5): 055802.
- [6] LIU Kai-feng, SHEN Chuan, ZHANG Cheng, *et al.* Iterative feedback algorithm for phase-only fresnel hologram and display using liquid crystal on silicon [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(5): 0509003. 刘凯峰, 沈川, 张成, 等. 纯相位菲涅尔全息图的反馈迭代算法及其硅基液晶显示[J]. *光子学报*, 2014, **43**(5): 0509003.
- [7] CHANG Yan-shuo, HSU Wei-feng, HSU Ku-hui, *et al.* Full-frame projection displays using a liquid crystal on-silicon spatial

- light modulator for beam shaping and speckle suppression[J]. *Applied Optics*, 2014, **53**(27): 214-221.
- [8] JESACHER A, BERNET S, RITSCH M. Colour hologram projection with an SLM by exploiting its full phase modulation range[J]. *Optics Express*, 2014, **22**(17): 20530-20541.
- [9] KANG Guo-guo, XIE Jing-hui, MO Xiao-li, *et al.* Design of binary optics using improved two-step simulated annealing algorithm[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(7): 1416-1419.
康果果, 谢敬辉, 莫晓丽, 等. 用改进的两步模拟退火算法进行二元光学元件的设计[J]. *光子学报*, 2008, **37**(7): 1416-1419.
- [10] CHEN Tao, LUO Chong-tai, WANG Duo-shu, *et al.* Genetic algorithms used for optimization design of diffractive optical elements[J]. *Opto-Electronics Engineering*, 2004, **31**(12): 8-11.
陈焘, 罗崇泰, 王多书, 等. 遗传算法用于衍射光学元件的优化设计[J]. *光电工程*, 2004, **31**(12): 8-11.
- [11] GERCHBERG R W, SAXTON W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *Optik*, 1972, **35**: 237-250.
- [12] FIENUP J R. Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms [J]. *Optical Engineering*, 1980, **19**: 297-305.
- [13] WYROWSKI F. Iterative quantization of amplitude holograms[J]. *Applied Optics*, 1989, **28**(18), 3864-3870.
- [14] RIPOLL O, KETTUNEN V, HERZIG H P. Review of iterative Fourier transform algorithms for beam shaping applications[J]. *Optical Engineering*, 2004, **43**, 2549-2556.
- [15] WUTTING A, KANKA M, KREUZER H J, *et al.* Packed domain Rayleigh-Sommerfeld wavefield propagation for large targets[J]. *Optics Express*, 2010, **18**(26): 27036-27047.
- [16] MANDEL L, WOLF E. *Optical coherence and quantum optics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [17] MELLIN S D, NORDIN G P. Limits of scalar diffraction theory and an iterative angular spectrum algorithm for finite aperture diffractive optical element design [J]. *Optics Express*, 2001, **8**(13): 705-722.
- [18] HARVEY J E, KRYWONOS A, BOGUNOVIC D. Nonparaxial scalar treatment of sinusoidal phase gratings[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2006, **23**(4): 858-865.