

doi:10.3788/gzxb20154405.0517002

# 稀疏计算层析成像重构中迭代去噪方法的分析

李宏霄, 陈晓冬, 李俊威, 汪毅, 郁道银

(天津大学 精密仪器与光电子工程学院, 光电信息技术教育部重点实验室, 天津 300072)

**摘 要:**研究了稀疏计算层析成像重构中的迭代去噪模型及其求解算法, 理论推导及模拟实验验证了代数重构技术的抑噪能力. 根据稀疏计算层析成像过程的噪音特征, 提出了基于欧氏范数不等式约束和基于无穷范数不等式约束的去噪模型, 提出了基于凸集投影方法求解去噪模型的算法, 并给出了算法推导过程. 结果表明: 欧氏范数去噪模型优于无穷范数去噪模型, 代数重构技术具有抑制噪音的作用.

**关键词:** 医用光学; 迭代方法; 稀疏计算层析成像; 重构去噪方法; 凸集投影方法

**中图分类号:** R318.6

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2015)05-0517002-7

## Analysis of Iterative Denoising Method in Sparse Computed Tomography Reconstruction

LI Hong-xiao, CHEN Xiao-dong, LI Jun-wei, WANG Yi, YU Dao-yin

(Key Laboratory of Opto-Electronics Information Technology of Ministry of Education, College of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The iterative denoising models and their solving algorithms in the sparse computed tomography reconstruction were researched. The theoretical derivations and simulation experiments demonstrate that the Algebraic Reconstruction Technique (ART) have the denoising ability. Two models for the sparse computed tomography denoise were proposed. One is based on the Euclidean norm inequality constraint, and the other is based on the infinity norm inequality constraint. Inspired by the iterative method in ART, we use projection onto convex sets method to solve these two denoising models. The algorithm derivation is provided. The results indicate that the Euclidean norm based denoise model is better than the infinity norm based denoise model, and the ART method has the ability of denoising.

**Key words:** Medical optics; Iterative method; Sparse computed tomography; Reconstruction denoising method; Projection onto convex sets

**OCIS Codes:** 170.7440; 170.3010; 120.3890

## 0 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS)技术<sup>[1,2]</sup>问世十年后, 已经被应用于多个领域<sup>[3-5]</sup>, 特别是在医学成像领域, CS技术激发了一些新的研究方向, 通过应用该技术, 医学成像设备有望在不降低成像质量的前提下大幅度减少成像所需数据量. 对于核磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI), CS技术可以大幅缩短成像时间, 有助于减少患者静止等待的时间, 特

别是对于儿童来说, 快速MRI<sup>[6]</sup>意义重大. 而在X射线计算层析成像(X-ray Computed Tomography, X-CT)中, CS技术将有助于减少X射线的剂量, 从而降低X射线致癌风险<sup>[7]</sup>.

当前国内外医学成像工作者在降低CT成像中的X射线剂量方面做了大量研究工作<sup>[8-10]</sup>, 这些研究的基础是压缩感知技术和医学图像的稀疏性先验信息. 在CT图像重构过程中, 利用压缩感知技术引入稀疏性先验信息可以用少量的投影数据精确重构目标图像, 这

**基金项目:** 国家自然科学基金(No. 61201037)资助

**第一作者:** 李宏霄(1986-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为医学图像处理. Email: hxli@tju.edu.cn

**导 师:** 郁道银(1945-), 男, 教授, 博导, 主要研究方向为光电仪器和医学图像处理. Email: dyyu@tju.edu.cn

**通讯作者:** 陈晓冬(1975-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为光纤光学仪器及医学图像处理. Email: xdchen@tju.edu.cn

**收稿日期:** 2014-12-22; **录用日期:** 2015-02-09

<http://www.photon.ac.cn>

种以图像稀疏性为核心,从“稀疏”的 X 射线投影数据中重构 CT 图像的方法称为稀疏 CT. 由于投影数据的减少,稀疏 CT 成像过程中的噪音对成像结果的影响会更严重,文献 [11]报道用于稀疏 CT 重构的代数重构技术 (Algebraic Reconstruction Technique, ART)<sup>[12-13]</sup>具有良好的抑噪能力. 本文将通过构造稀疏 CT 重构去噪模型并设计相应的求解方法,来证明 ART 算法的抑噪能力.

## 1 CT 去噪模型

稀疏 CT 重构问题中的约束优化模型为

$$\min \|f\|_{\text{reg}} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{M}\mathbf{f}=\mathbf{g} \quad (1)$$

此优化问题等式约束项中的  $\mathbf{M}$  表示 CT 投影矩阵,描述 CT 投影的物理过程, $\mathbf{g}$  是投影数据向量,通常情况下  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{g}$  是已知的, $\mathbf{f}$  表示需要重构的图像向量,是未知量,等式约束表示投影数据与重构图像之间的一致性关系. 此优化问题的目标函数是  $f$  的正则化范数,该正则化范数表示对目标图像  $f$  的稀疏性约束, $\|f\|_{\text{reg}}$  的值越小, $f$  就越稀疏. 根据压缩感知理论,在满足式(1)中等式约束的所有可能的  $f$  的解中,最稀疏的解最接近真实的目标图像. 通常选用的正则化范数是全变差 (Total Variation, TV) 范数.

在考虑 CT 噪音的情况下,式(1)可以改写为

$$\min \|f\|_{\text{reg}} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{M}\mathbf{f}+\mathbf{e}=\mathbf{g} \quad (2)$$

式中,等式约束中的  $\mathbf{e}$  表示真实投影数据中掺杂的噪音,设  $\sigma_i^2 = \text{Var}(e_i)$  表示噪音  $\mathbf{e}$  的第  $i$  个元素  $e_i$  的方差, $\mathbf{e}$  的各个元素都是彼此独立的随机变量. 实际情况中,CT 成像噪音的主要来源是量子噪音,该噪音可以用泊松随机变量表示,此类噪音具有如下规律<sup>[14]</sup>: 在测量值足够多的情况下,噪音期望趋于零,噪音随机变量服从高斯分布. 因此,本文假设噪音分布满足  $e_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ ,即假设该噪音变量服从均值为零的随机高斯分布,方差为  $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ . 对于一组投影数据  $\mathbf{g} \in \mathbf{R}_+^I$  来说, $\mathbf{e}=\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}$  可以看作是  $e_i \sim N(0, \sigma_0^2)$  的一组数量为  $I$  的样本,其中  $\mathbf{R}_+^I$  表示维度为  $I$  的非负实数集,根据概率统计学<sup>[15]</sup>的知识,在  $I$  足够大的条件下有

$$\sigma_0^2 \cong s^2 = \frac{\sum_{i=1}^I (e_i - \bar{e})^2}{I-1} \quad (3)$$

式中  $\bar{e} = \sum_{i=1}^I e_i / I$  是  $I$  个噪音样本的均值,当  $I$  足够大的时候有  $\bar{e} \cong 0$ ,式(3)就可以化为

$$\sigma_0^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^I e_i^2}{I-1} \cong \frac{\sum_{i=1}^I e_i^2}{I} \quad (4)$$

式中  $e_i = g_i - [\mathbf{M}\mathbf{f}]_i$ , 而  $g_i$  和  $[\mathbf{M}\mathbf{f}]_i$  分别表示  $\mathbf{g}$  和  $\mathbf{M}\mathbf{f}$  的第  $i$  个元素,根据 CT 投影的原理,  $[\mathbf{M}\mathbf{f}]_i = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f}$  表示第  $i$  条 X 射线对应的投影过程,其中  $\mathbf{M}_i$  是  $\mathbf{M}$  的第  $i$  行向量,所以式(4)可以转化为

$$\|\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{i=1}^I (g_i - \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f})^2 \cong I \cdot \sigma_0^2 \quad (5)$$

根据上述分析及式(5),将噪音可能引起的偏差考虑在内的话,可以将稀疏 CT 重构问题式(2)改写为

$$\min \|f\|_{\text{reg}} \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}\|_2 \leq C_G \quad (6)$$

式中  $C_G = I \cdot \sigma_0^2$ ,  $C_G$  的下标  $G$  代表全局 (Global) 的意思,它表示式(6)中的不等式约束是对整幅图像和所有投影值作用的全局性约束,因为噪音的存在,测量值  $\mathbf{g}$  和  $\mathbf{M}\mathbf{f}$  不完全相等,而是存在一个由噪音引起的差距,这个差距的大小与噪音的波动范围有关,该不等式描述了这种差距对重构模型的影响. 式(6)就是常见的含有噪音的约束优化问题模型,由于不等式约束中  $\|\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}\|_2$  采用了欧氏范数 ( $l_2$  范数) 的形式,我们可以将其称为欧氏 (或  $l_2$ ) 范数约束去噪模型.

事实上,根据式(5)可以发现  $g_i - \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = e_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ , 那么据此可以提出如下近似的不等式约束优化模型

$$\min \|f\|_{\text{reg}} \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}\|_{\infty} \leq C_P \quad (7)$$

式中  $C_P = 3\sigma_0$ ,  $C_P$  中的  $P$  代表点 (Point) 的意思,这是因为式(7)中的不等式约束是对每个投影值的单点产生约束作用的,  $\|\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}\|_{\infty} = \max_{i \in I} |g_i - \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f}|$  称为  $\mathbf{g}-\mathbf{M}\mathbf{f}$  的无穷范数 ( $l_{\infty}$  范数). 因为在正态分布中,偏离均值 3 倍标准差之外的点出现的概率小于 0.5%,因此在重构图像的过程中,忽略这种小概率情形,式(7)中的不等式约束条件就是据此设定的. 由于式(7)中的不等式约束采用了无穷范数的形式,因此将式(7)称为无穷 (或  $l_{\infty}$ ) 范数约束去噪模型.

## 2 去噪模型的求解方法

由于式(6)和式(7)中表示噪音水平的欧氏范数与无穷范数均为凸函数,因此在求解式(6)和式(7)的过程中可以采用凸集投影的方法,但由于式(6)与式(7)中表示噪音水平的函数具有范数球的形式,此处采用凸集投影的形式与 ART 算法不尽相同,下面推导去噪模型的凸集投影解法.

### 2.1 凸集投影方法

凸集投影的理论基础是:目标函数的约束条件是凸的. 凸约束条件对应的几何形态是凸空间,有限多个凸约束条件同时成立对应的几何形态就是其各自凸空间的交集,根据凸函数的性质,这个交集空间依然是一个凸空间,而目标点就是位于这个凸空间之内的所有点的集合. 下面用一个简化的凸集投影范例来说明凸集投影算法的基本原理.

图 1 所示直线  $L_1$  和  $L_2$  代表两个凸约束的边界,其中  $L_1$  的左半部分是其可行域,  $L_2$  的下半部分是其可行域,于是图中的阴影部分就是这两个凸约束条件的共同可行域,也就是目标点的解集.

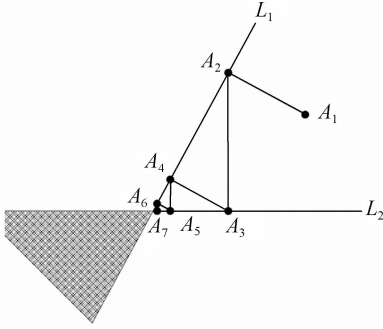


图1 凸集投影方法示意图

Fig. 1 A simple Projection Onto Convex Sets (POCS) method

按照凸集投影算法流程,首先任选一点  $A_1$  作为初始目标点,然后将目标点轮流向两个凸约束集合的边界(直线  $L_1$  和  $L_2$ )进行投影,这样可以使目标点逐渐向解集(图中阴影区域)靠近,经过若干次的迭代投影,目标点最终可以到达阴影区域,从而同时满足两个凸约束条件.

### 2.2 欧氏范数约束去噪模型的解法

$l_2$  范数约束去噪模型的解法与 2.1 节中凸集投影方法类似,为了推导该解法,首先考虑一个简单的  $l_2$  范数不等式约束  $\|u\|_2 \leq C$ ,其中  $u \in R^I$ ,则  $u$  在凸集  $Q = \{z | \|z\|_2 \leq C\}$  上的投影为

$$P(u) = \begin{cases} u & \text{if } \|u\|_2 \leq C \\ \frac{C \cdot u}{\|u\|_2} & \text{if } \|u\|_2 > C \end{cases} \quad (8)$$

式(8)的投影过程可以用图 2 表示,为了简便且不失一般性,在图 2 中设  $I=2$ ,即  $u$  是二维向量, $l_2$  范数约束  $\|u\|_2 \leq C$  可由图 2 中的圆点表示,该圆称为  $l_2$  范数球  $Q$ .当  $\|u\|_2 \leq C$  时,表示  $u$  位于  $Q$  内部,因此, $u$  向  $Q$  的投影还是  $u$ ;当  $\|u\|_2 > C$  时,表示  $u$  位于  $Q$  外部,如图 2 所示,此时  $u$  向  $Q$  的最短投影是  $C \cdot u / \|u\|_2$ ,投影值恰好位于  $Q$  的边界上.

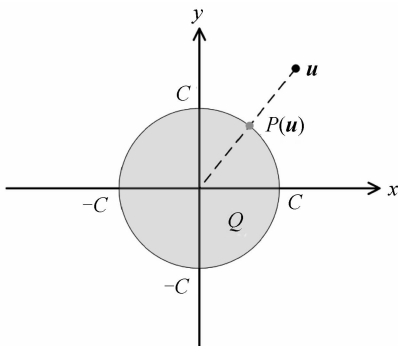


图2  $l_2$  范数不等式约束的凸集投影过程

Fig. 2 POCS of  $l_2$  norm inequality constraint

同为  $l_2$  范数约束,式(6)中的估计噪声  $g - Mf$  就相当于式(8)中的  $u$ ,于是可以用式(6)中的  $g - Mf$  来替换式(8)中的  $u$ ,相应的有  $C = \sqrt{C_G}$ ,然后可以得到

$$P(g - Mf) =$$

$$\begin{cases} g - Mf & \text{if } \|g - Mf\|_2 \leq \sqrt{C_G} \\ \frac{\sqrt{C_G} \cdot (g - Mf)}{\|g - Mf\|_2} & \text{if } \|g - Mf\|_2 > \sqrt{C_G} \end{cases}$$

如果估计图像对应的估计噪声没有违反  $l_2$  范数不等式约束,则不做任何处理,用  $r$  表示上式中的  $\sqrt{C_G} \cdot (g - Mf) / \|g - Mf\|_2$ ,当估计噪声违反了  $l_2$  范数约束时有

$$P(g - Mf) = r$$

此时可以用  $g - Mf$  的投影值  $P(g - Mf)$  来更新其下一步的状态  $[g - Mf]_{\text{update}}$ ,由于  $g$  是已知的不变量,所以有

$$[g - Mf]_{\text{update}} = g - Mf_{\text{update}}$$

于是可以得到

$$Mf_{\text{update}} = g - r$$

用  $g^r$  来表示  $g - r$ ,则有

$$Mf_{\text{update}} = g^r$$

上述凸集投影方法的结果相当于对投影数据做了修正, $g^r$  和  $r$  中的“r”都代表修正(Revise)的意思.由于 ART 本质也是凸集投影方法,所以在求解式(6)时将上述凸集投影解法添加在 ART 之前即可.

实际上,上述  $l_2$  范数凸集投影解法中的投影值还可以进一步改进,如图 3 所示,既然估计噪声的可行域范围是以原点为球心、 $C$  为半径的  $l_2$  范数球,那么凸集投影解法中只要将不满足约束条件的点投影到该可行域内即可,这个投影点可以是距离当前目标点最近的可行点,也可以是该可行域的球心,即原点,如果将原点作为投影点,则  $l_2$  范数不等式约束的凸集投影解法对投影数据产生的修正为  $g^r = g$ ,即修正量  $r = 0$ .这意味着,不对投影数据进行修正也是  $l_2$  范数不等式约束凸集投影解法的一种结果.

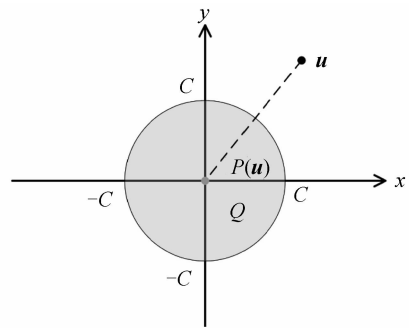


图3  $l_2$  范数不等式约束的凸集投影过程的改进

Fig. 3 Modified POCS of  $l_2$  norm inequality constraint

本文将“不满足  $l_2$  范数约束的估计噪声投影到噪声  $l_2$  范数球球心的方法”称为  $l_2$  范数约束凸集投影解法一,简称为  $l_2$  解法一,将“不满足  $l_2$  范数约束的估计噪声投影到噪声  $l_2$  范数球边界的方法”称为  $l_2$  范数约束凸集投影解法二,简称为  $l_2$  解法二.理论分析表明, $l_2$  解法一对噪声的抑制作用比  $l_2$  解法二更强,因为前

者直接将潜在噪音置为零,而后者则是将潜在噪音削弱为平均波动水平(方差),相应的,前者对重构结果的提升作用也应该大于后者,同时应该注意到, $l_2$ 解法一并未对投影数据进行任何修正,则上述分析表明,用 $l_2$ 解法一求解式(6)得到的重构结果与直接求解式(1)得到的重构结果应该是相同的,并且,二者的结果均优于用 $l_2$ 解法二求解式(6)得到的重构结果.

### 2.3 无穷范数约束去噪模型的解法

$l_\infty$ 范数约束去噪模型的解法推导与2.2节相似.首先,建立一个简单的 $l_\infty$ 范数不等式约束 $\|u\|_\infty \leq C$ ,其中 $u \in R^I$ ,则 $u$ 在凸集 $Q = \{z \mid \|z\|_\infty \leq C\}$ 上的投影为

$$P(u) = \begin{cases} u & \text{if } \|u\|_\infty \leq C \\ u' & \text{if } \|u\|_\infty > C \end{cases} \quad (9)$$

式中

$$u' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_i \\ \vdots \\ u'_I \end{bmatrix}, u'_i = \begin{cases} u_i & \text{if } |u_i| \leq C \\ C & \text{if } |u_i| > C \end{cases}$$

式中 $u_i$ 是 $u$ 的第 $i$ 个元素.

式(9)的投影过程可以用图4表示,为了简便且不失一般性,在图4中设 $I=2$ ,即 $u_1$ 和 $u_2$ 都是二维向量, $l_\infty$ 范数约束 $\|u\|_\infty \leq C$ 可由图4中的灰色正方形表示,该正方形称为 $l_\infty$ 范数球 $Q$ .如果 $\|u\|_\infty \leq C$ ,则表明 $u$ 位于 $Q$ 内部,此时, $u$ 向 $Q$ 的投影是其本身;如果 $\|u\|_\infty > C$ ,则表明 $u$ 位于 $Q$ 外部, $u$ 位于 $Q$ 外部的情况有两种,一种是图4中 $u_1$ 所示的情况, $u_1$ 只有一个维度的绝对值大于 $C$ ,按照最短投影路径将 $u_1$ 投影到 $Q$ 上,使该维度的绝对值变为 $C$ ;另一种是图4中 $u_2$ 所示的情况, $u_2$ 有多个维度的绝对值均大于 $C$ ,按照 $u_1$ 的情况,依次将每个超限维度的绝对值都改为 $C$ ,相当于对每个维度依次投影,这个过程与坐标下降法(Coordinate Descent)<sup>[16]</sup>相类似.

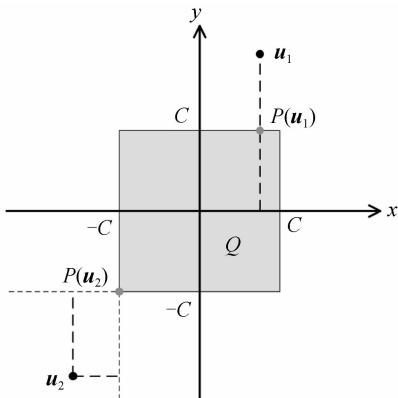


图4  $l_\infty$ 范数不等式约束的凸集投影过程  
Fig. 4 POCS of  $l_\infty$  norm inequality constraint

同为 $l_\infty$ 范数约束,式(7)中的估计噪音 $g - Mf$ 就相当于式(9)中的 $u$ ,于是可以用式(7)中的 $g - Mf$ 替换式(9)中的 $u$ ,相应的有 $C = C_p$ ,然后可以得到

$$P(g - Mf) = \begin{cases} g - Mf & \text{if } \|g - Mf\|_\infty \leq C_p \\ r & \text{if } \|g - Mf\|_\infty > C_p \end{cases}$$

式中

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_I \end{bmatrix}, r_i = \begin{cases} g_i - M_i \cdot f & \text{if } |g_i - M_i \cdot f| \leq C_p \\ C_p & \text{if } g_i - M_i \cdot f > C_p \\ -C_p & \text{if } g_i - M_i \cdot f < -C_p \end{cases}$$

如果估计图像对应的估计噪音没有违反噪音约束,则不做任何处理,当估计噪音违反了 $l_\infty$ 范数约束时有

$$P(g - Mf) = r$$

此时可以用 $g - Mf$ 的投影值 $P(g - Mf)$ 来更新其下一步的状态 $[g - Mf]_{\text{update}}$ ,由于 $g$ 是已知的不变量,所以可以经由 $l_2$ 范数约束去噪解法讨论中类似的推导过程得到

$$Mf_{\text{update}} = g^r$$

式中 $g^r = g - r$ ,表示经过 $l_\infty$ 范数约束修正后的投影数据.

同样的,上述 $l_\infty$ 范数凸集投影解法中的投影值还可进一步改进,如图5所示,不论估计误差是否超出 $l_\infty$ 范数球的范围,都将该估计误差的所有维度的投影值置为零,于是修正量 $r = 0$ ,也就是说此种 $l_\infty$ 范数约束凸集投影解法不会对投影数据进行任何修正.于是可以得到与2.2节同样的理论推导结果,此处依然将“不满足 $l_\infty$ 范数约束的估计噪音投影到噪音 $l_\infty$ 范数球的球心的方法”称为 $l_\infty$ 范数约束凸集投影解法一,简称 $l_\infty$ 解法一,将“不满足 $l_\infty$ 范数约束的估计噪音投影到噪音 $l_\infty$ 范数球边界的方法”称为 $l_\infty$ 范数约束凸集投影解法二,简称为 $l_\infty$ 解法二,则用 $l_\infty$ 解法一求解式(6)得到

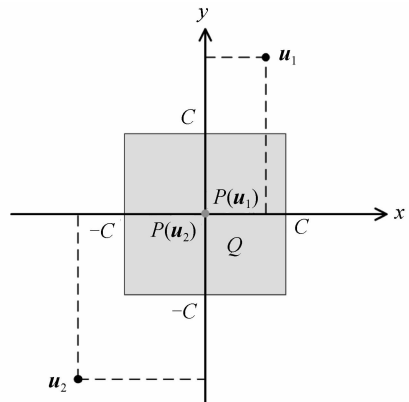


图5  $l_\infty$ 范数不等式约束的凸集投影过程的改进  
Fig. 5 Modified POCS of  $l_\infty$  norm inequality constraint

的重构结果与直接求解式(1)得到的重构结果应该是相同的,并且,二者的结果均优于用  $l_\infty$  解法二求解式(6)得到的重构结果。

### 3 数值模拟实验及结果分析

本文用数值模拟实验验证 2.2 及 2.3 节中理论推导结果的正确性,此外利用模拟实验也可以比较  $l_2$  解法二与  $l_\infty$  解法二的优劣。

#### 3.1 实验设定

本文模拟数值实验采用 ART+TV-NESTA 的方法<sup>[13]</sup>进行稀疏 CT 的重构,其中 TV 表示正则化范数的类型是全变差,而用于最小化 TV 函数的方法则是内斯特洛夫算法(Nesterov's Algorithm, NESTA)<sup>[17-18]</sup>,此外,本文还用不附加任何先验信息的 ART 方法的重构结果作为对比.实验中采用“图像重构工具箱(Image reconstruction toolbox)”<sup>[19]</sup>中的 CT 模块构建 CT 投影矩阵,并进行前向和后向投影的计算。

本文采用 MATLAB 中“phantom(128)”函数生成虚拟目标模型,如图 6(a)所示,该图像的大小为  $128 \times 128$  像素.模拟实验中采用扇形投影和平板式 X 射线接收器,接收器含有 240 个接收阵元,每个阵元的长宽均为 2 mm,扇形投影中的 X 射线发射源距接收器的中心 960.45 mm, X 射线发射源到投影系统坐标系原点的距离为 628.88 mm,并且 X 射线发射源、投影系统坐标系原点和接收器中心三点在一条直线上。

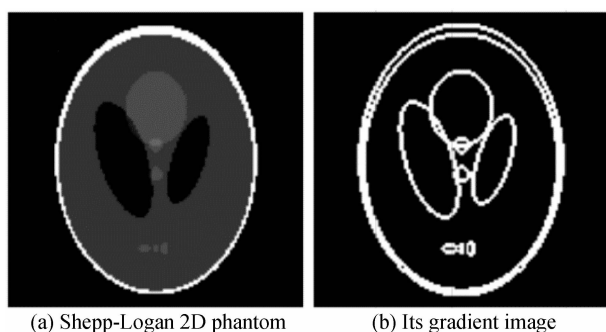


图 6 Shepp-Logan 模型  
Fig. 6 Shepp-Logan model

根据精确重构原则(Exact Reconstruction Principle, ERP)<sup>[20]</sup>,如果傅里叶域中的抽样数量达到梯度图像中非零像素个数的两倍,优化问题式(1)有唯一解. Shepp-Logan 模型的梯度图像如图 6(b)所示,其中非零像素个数为 1 743,根据中心切片定理<sup>[21]</sup>,一个投影数据点对应一个傅里叶域中的抽样值.因此,本实验中至少需要  $1\ 743 \times 2 = 3\ 486$  个投影数据点,模拟接收器含有 240 个阵元,每个阵元采集一个投影数据点,根据 ERP,总共需要  $3\ 486 \div 240 \approx 15$  个不同方向的投影数据,本实验在  $0 \sim 180^\circ$  的范围内均匀分布 15 个投

影位置.模拟实验中的噪声为高斯白噪声,噪声分布的期望为 0,标准差为投影数据均值的 1%,噪声直接附加在投影数据上。

#### 3.2 实验结果及分析

图 7 和图 8 是 ART+TV-NESTA 和 ART 两种方法的重构结果的相对误差随着迭代次数变化的曲线,其中,“Recons(1)”表示直接求解式(1)的结果,“L2-M1”表示  $l_2$  解法一,“LInf-M1”表示  $l_\infty$  解法一,“L2-M2”表示  $l_2$  解法二,“LInf-M2”表示  $l_\infty$  解法二.图 9 中,第一行是 ART+TV-NESTA 方法的重构结果,第二行是 ART 方法的重构结果,从左到右依次是直接求解式(1)、 $l_2$  解法一、 $l_\infty$  解法一、 $l_2$  解法二和  $l_\infty$  解法二

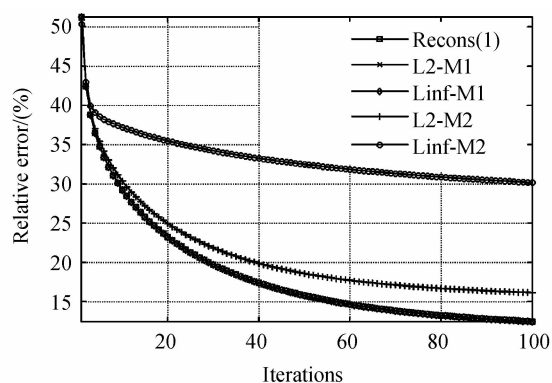


图 7 ART+TV-NESTA 重构结果的相对误差随迭代次数的变化

Fig. 7 The curve of reconstruction relative error of ART+TV-NESTA method vs. iterations

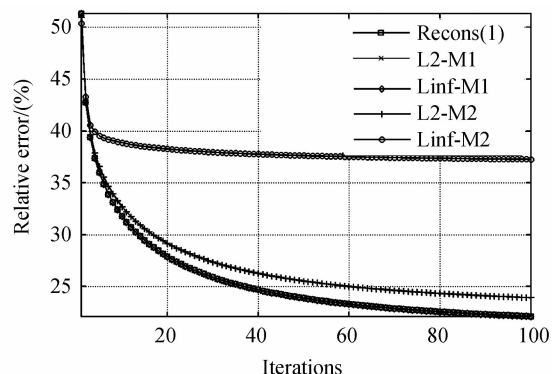


图 8 ART 重构结果的相对误差随迭代次数的变化

Fig. 8 The curve of reconstruction relative error of ART method vs. iterations

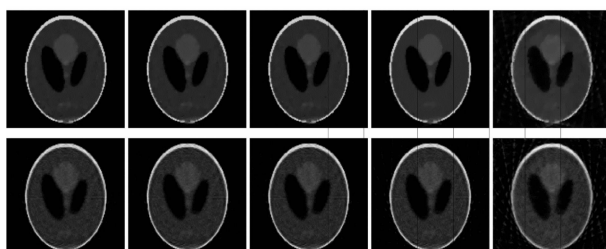


图 9 重构结果

Fig. 9 The reconstructions

对应的重构结果. 图 10 和图 11 是选择图像中第 64 列 128 个像素后的重构结果轮廓线与原 Shepp-Logan 模型轮廓线的对比. 这些实验结果都共同证明了 2.2 和 2.3 节理论推导的正确性, 即直接求解式(1)的重构结果与用  $l_2$  解法一求解式(6)和用  $l_\infty$  解法一求解式(7)的重构结果是完全相同的, 而且三者的结果均优于用  $l_2$  解法二求解式(6)和用  $l_\infty$  解法二求解式(7)的重构结果. 值得注意的是, 图 7 和图 8 的结果也表明, 经过 100

次迭代后, 用  $l_2$  解法二求解式(6)得到的重构图像相对误差比用  $l_\infty$  解法二求解式(7)得到的重构图像相对误差小 13 个百分点. 而且 ART 方法实验结果得到的结论与 ART+TV-NESTA 方法实验结果得到的结论是一致的, 这表明, 上述关于含噪模型求解方法的结论没有受到 TV 正则化函数(图像稀疏性先验信息)的影响.

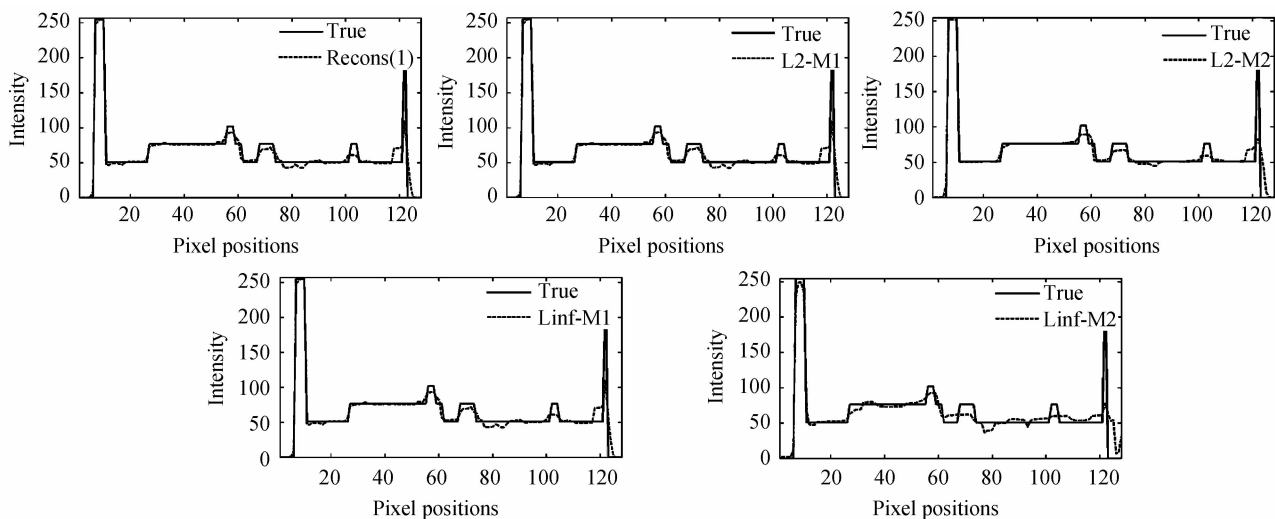


图 10 ART+TV-NESTA 重构结果与原图像(True)的轮廓线对比

Fig. 10 The comparison of the profile of reconstructions of ART+TV-NESTA method with the original Shepp-Logan phantom (True)

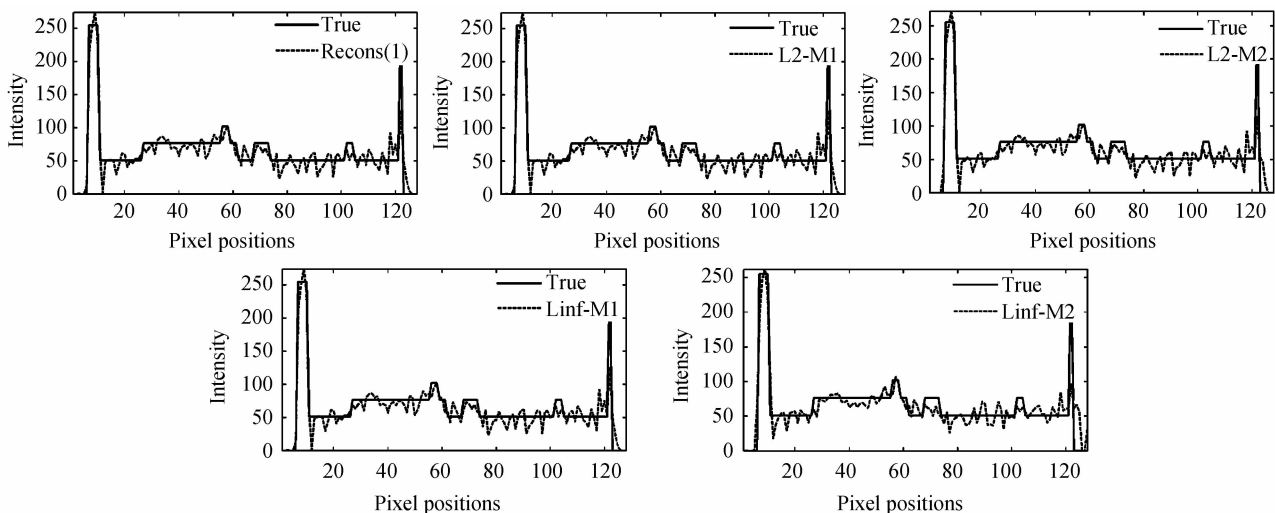


图 11 ART 重构结果与原图像的轮廓线对比

Fig. 11 The comparison of the profile of reconstructions of ART method with the original Shepp-Logan phantom

### 3.3 讨论

通过对上述结果进行分析, 发现求解含噪模型式(2)最好的方法是用  $l_2$  解法一求解式(6)或是用  $l_\infty$  解法一求解式(7), 其实质是不利用噪音先验信息对投影数据做修正, 因为 ART 迭代方法本身已经包含了对噪音的抑制作用, 因此, 在求解式(6)和式(7)这样的去噪模型时, 最好的方法是将其看作模型(1)式用迭代重构方法直接求解.

此外, 对比  $l_2$  解法二与  $l_\infty$  解法二的结果, 可以发现后者对噪音的抑制能力比前者差, 这是由于  $l_\infty$  范数不等式约束对噪音的范围估计不精确所致, 因为  $l_\infty$  范数不等式约束忽略了 0.5% 的噪音可能性, 当目标对象(图像的像素)的数量足够大时, 被忽略掉的噪音可能性的绝对数量也较大, 由此形成的误差会给最终结果带来较大影响. 与此形成对照,  $l_2$  范数不等式约束中对噪音的范围估计是以统计学原理为基础的, 当目标

对象(图像的像素)的数量足够大时,统计学原理确保了估计的精确性,这是  $l_2$  解法二的结果比  $l_\infty$  解法二的结果好的原因.

## 4 结论

本文根据稀疏 CT 重构问题中的噪音特征建立了基于  $l_2$  范数不等式约束和  $l_\infty$  范数不等式约束的去噪问题模型,然后利用凸集投影方法,设计了针对两种不等式凸约束问题的求解方法,提出了两种可行的投影方法,并通过理论推导预测了这些方法的优劣.然后通过数值模拟实验,验证了理论推导的正确性,理论推导和模拟实验均表明,在稀疏 CT 重构方法中,ART 迭代重构方法具有很强的抑噪能力,这个过程与  $l_2$  范数不等式约束和  $l_\infty$  范数不等式约束的凸集投影解法是一致的,因此三者的结果也是一致的.

### 参考文献

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289-1306.
- [2] CANDÈS E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 21-30.
- [3] LIU Hai-ying, LI Yun-song, WU Cheng-ke. A method for compressive sensing of images based on zone control of digital micromirror device and super-resolution[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(5): 0510002.  
刘海英, 李云松, 吴成柯. 一种数字微镜阵列分区控制和超分辨重建的压缩感知成像法[J]. *光子学报*, 2014, **43**(5): 0510002.
- [4] LU Pei, LIU Xiao-yong, LU Xi, *et al.* Image information encryption by compressed sensing and optical theory[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(9): 0910002.  
卢佩, 刘效勇, 卢熙, 田敏, 等. 基于压缩感知及光学理论的图像信息加密[J]. *光子学报*, 2014, **43**(9): 0910002.
- [5] JI Zhen-Xin, KONG Pan-Qiang. Hyperspectral image compressed sensing based on linear filter between bands[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(1): 82-86.  
计振兴, 孔繁镭. 基于谱间线性滤波的高光谱图像压缩感知[J]. *光子学报*, 2012, **41**(1): 82-86.
- [6] ZHANG T, CHOWDHURY S, LUSTIG M, *et al.* Clinical performance of contrast enhanced abdominal pediatric MRI with fast combined parallel imaging compressed sensing reconstruction[J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 2013; n/a-n/a.
- [7] BERRINGTON D G A, MAHESH M, KIM K P, *et al.* Projected cancer risks from computed tomographic scans performed in the United States in 2007 [J]. *Archives of Internal Medicine*, 2009, **169**(22): 2071-2077.
- [8] LIU Y, LIANG Z, MA J, *et al.* Total variation-stokes strategy for sparse-view X-ray CT image reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2014, **33**(3): 749-763.
- [9] CHEN Z, JIN X, LI L, *et al.* A limited-angle CT reconstruction method based on anisotropic TV minimization [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2013, **58**(7): 2119.
- [10] WU D, LI L, ZHANG L. Feature constrained compressed sensing CT image reconstruction from incomplete data via robust principal component analysis of the database [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2013, **58**(12): 4047-4070.
- [11] FANG Jing, CHENG Le-hong, ZHANG Yu-ping, *et al.* Improved iterative tomography algorithm based on fan-beam geometry of double projections[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(10): 1011003.  
方静, 程乐红, 张玉萍, 等. 基于扇束双投影方向的改进迭代层析成像算法[J]. *光子学报*, 2014, **43**(10): 1011003.
- [12] GORDON R, BENDER R, HERMAN G T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1970, **29**(3): 471-481.
- [13] LI H, CHEN X, WANG Y, *et al.* Sparse CT reconstruction based on multi-direction anisotropic total variation (MDATV) [J]. *BioMedical Engineering OnLine*, 2014, **13**(1): 92.
- [14] LI T, LI X, WANG J, *et al.* Nonlinear sinogram smoothing for low-dose X-ray CT[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2004, **51**(5): 2505-2513.
- [15] ROSS S M. Introduction to probability and statistics for engineers and scientists[M]; Elsevier Science, 2009. 2.3.2.
- [16] LUO Z Q, TSENG P. On the convergence of the coordinate descent method for convex differentiable minimization[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1992, **72**(1): 7-35.
- [17] BECKER S, BOBIN J, CANDÈS E. NESTA: a fast and accurate first-order method for sparse recovery[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, **4**(1): 1-39.
- [18] NESTEROV Y. Smooth minimization of non-smooth functions[J]. *Mathematical Programming*, 2005, **103**(1): 127-152.
- [19] FESSLER J. Image reconstruction toolbox [OL]. <http://web.eecs.umich.edu/~fessler/code/>.
- [20] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489-509.
- [21] BRACEWELL R N. Strip integration in radio astronomy[J]. *Australian Journal of Physics*, 1956, **9**(2): 198-217.