

doi:10.3788/gzxb20154412.1213004

基于积分方程的平面光波导模式场分析方法

刘晓欢, 李炳新

(燕山大学 信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

(河北省特种光纤与光纤传感重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要:通过傅里叶变换将波动方程转化为空间频域的积分方程, 并采用 Nyström 方法将积分方程转化成标准的矩阵特征问题. 通过 Lapack 程序包求解矩阵的特征值和特征向量, 同时得到平面介质光波导模式的色散关系和模式场. 数值计算结果表明该方法适用于分析任何折射率分布的平面光波导模式场, 使用阶数很小的矩阵就可以得到高准确度的结果.

关键词:导波光学; 色散关系; 高斯型求积公式; 平面光波导; 模场分布

中图分类号: TN252

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)12-1213004-5

Mode Field Analysis Method of the Planar Optical Waveguides Based on an Integral Equation

LIU Xiao-huan, LI Bing-xin

(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

(The Key Laboratory for Special Optical Fiber and Optical Fiber Sensor of Hebei Province, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: The one dimensional wave equation was transformed into space-frequency domain by Fourier transform, and became an integral equation which could be solved by Nyström method. A solver of standard matrix eigenvalue problem from the integral equation was given by Lapack packages. The dispersion relation and mode fields of a planar dielectric waveguide could be obtained simultaneously. The numerical results showed that the proposed method was flexible for planar optical waveguides with any refractive index profiles and high accuracy only using a low order matrix.

Key words: Waveguide optics; Dispersion relation; Gauss quadrature rules; Planar waveguide; Mode distribution

OCIS Codes: 130.0130; 130.2790; 230.7390

0 引言

随着光纤通信和光纤传感技术的迅速发展, 以导波光学为基础的集成光学和光电子器件的研究备受关注. 在集成光学中, 平面介质光波导是最基本的结构单元, 其地位如同半导体器件的 PN 结. 平面光波导模式场的分析需要求解 Maxwell 方程组, 除少数几种平面光波导之外, 任意折射率分布的平面光波导没有解析解, 需要用数值方法进行分析. 平面光波导的数值分析方法分为两类: 一类是研究电磁场的通用数值方法, 如

时域有限差分法^[1-3]、有限元方法^[4]、矩量法^[5]、加权余量法^[6]等; 另一类是光波导研究特有的方法, 如 WKBJ 法^[7]和转移矩阵法^[8]等. 其中转移矩阵法是分析平面光波导最有效的方法之一, 准确度高、计算量适中, 可以求解任意折射率分布的平面光波导, 但这种方法无法推广到二维, 即光纤的模式场分析.

目前平面光波导模式场的分析方法都是在空间坐标下, 求解一定边界条件下的微分方程或等价的变分问题. 实际上, 在数学、物理学和工程领域, 常用变换域方法研究时域或空间问题, 其中空间频域方法在傅里

基金项目: 河北省应用基础研究计划重点基础研究项目 (No. 12963550D) 资助

第一作者: 刘晓欢 (1989-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为光波导理论及应用. Email: 1214782300@qq.com

导师 (通讯作者): 李炳新 (1968-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为光波导理论、聚合物光纤. Email: xuanyizi@ysu.edu.cn

收稿日期: 2015-07-13; 录用日期: 2015-08-19

<http://www.photon.ac.cn>

叶光学^[9]研究中应用最为广泛。

本文提出一种用积分方程分析平面光波导模式场的方法,用傅里叶变换将标量波动方程转化成空间频域的积分方程,这是标准第二类 Fredholm 齐次积分方程,可以用 Nyström 方法^[10]求解,采用高斯勒让德积分公式^[11]把积分方程转化成矩阵的特征值问题,用 Lapack^[12]程序包求解出矩阵的特征值和特征向量,继而计算出平面光波导的色散曲线和模式场分布。

1 平面光波导模式场的积分方程

1.1 空间频域的积分方程

平面介质光波导是最常用、最基本的介质波导,其 TE 模式的标量波动方程为

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) E_y = 0 \quad (1)$$

式中 k_0 是光在真空中的波数, $n(x)$ 是平面光波导的折射率分布, β 是传播常量,其边界条件是 E_y 及其一阶导数 dE_y/dx 在边界处连续. 对于任意折射率分布 $n(x)$, 式(1)没有解析解,需要数值求解.

对式(1)作傅里叶变换,并由卷积公式得到积分方程

$$E_y(k) = \frac{k_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(k-\tau) E_y(\tau) d\tau}{k^2 + \beta^2} \quad (2)$$

式中 k 是空间角频率, $\epsilon(k)$ 是 $n^2(x)$ 的傅里叶变换, $E_y(k)$ 是 $E_y(x)$ 的傅里叶变换. 边界条件已经包含在积分方程中,不需要再考虑.

令 $g(k) = E_y(k)(k^2 + \beta^2)$, 式(2)转化为

$$g(k) = \frac{k_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(k-\tau) g(\tau) d\tau}{(\tau^2 + \beta^2)} \quad (3)$$

令 $\tau = \beta \tan(\pi t/2)$, $k = \beta \tan(\pi x/2)$, 由于

$$\frac{d\tau}{\tau^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2} \frac{dt}{\beta}$$

变换式(3)得到

$$g(x) = \frac{k_0^2}{4\beta} \int_{-1}^1 \epsilon(\beta(\tan(\pi x/2) - \tan(\pi t/2))) g(t) dt \quad (4)$$

式(4)是一个标准的关于 $g(x)$ 的第二类 Fredholm 齐次积分方程,其中 $\epsilon(x, t)$ 是积分方程的核函数, $k_0^2/4\beta$ 为积分方程的特征值. 对于给定的 β , 微分方程(1)的边界值问题转化为积分方程(4)的求解问题.

1.2 折射率分布函数 $\epsilon(k)$ 的奇异性

$\epsilon(k)$ 是折射率分布 $n^2(x) = \epsilon(x)$ 的傅里叶变换, $\epsilon(k-\tau)$ 是卷积核函数,积分方程(4)的全部性能都由它决定,以非对称三层平面波导为例,说明 $\epsilon(k)$ 的奇异性及其处理方法.

非对称三层平面波导的 $\epsilon(x)$ 如图 1(a), 可以分解

为四部分,即可平方可积偶函数部分 $\epsilon_{ef}(x)$, 奇函数部分 $\epsilon_{of}(x)$, 无限偶函数部分 $(\epsilon(+\infty) + \epsilon(-\infty))/2$ 和无限奇函数部分 $(\epsilon(+\infty) - \epsilon(-\infty)) \text{sgn}(x)/2$, $\text{sgn}(x)$ 为符号函数.

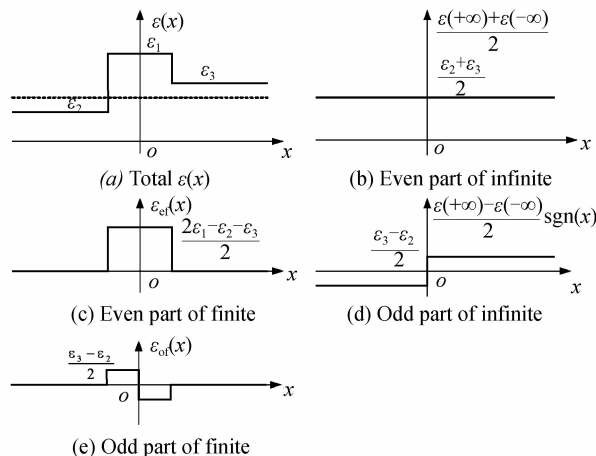


图 1 非对称三层平面波导的 $\epsilon(x)$

Fig. 1 $\epsilon(x)$ of an asymmetrical three layers planar optical waveguide with step index profiles

$\epsilon(x)$ 的傅里叶变换为

$$\epsilon(k) = \epsilon_{ef}(k) + \pi(\epsilon(+\infty) + \epsilon(-\infty))\delta(k) + i(-k^{-1}(\epsilon(+\infty) - \epsilon(-\infty)) + \epsilon_{of}(k)) \quad (5)$$

式中 $\delta(k)$ 是狄拉克 δ 函数, i 是虚数单位. 核函数 $\epsilon(k-\tau)$ 中的 $\delta(k-\tau)$ 和 $(k-\tau)^{-1}$ 两项涉及到奇异积分,即积分函数中含有无穷大项. 关于 $\delta(k-\tau)$ 一项,由于

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k-\tau) E_y(\tau) d\tau = E_y(k)$$

代入式(2),令

$$\tilde{\epsilon}(k) = \epsilon(k) - \pi(\epsilon(+\infty) + \epsilon(-\infty))\delta(k)$$

则式(2)转化为

$$E_y(k) = \frac{k_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\epsilon}(k-\tau) E_y(\tau) d\tau}{k^2 + \beta^2} \quad (6)$$

式中 $\tilde{\beta}^2 = \beta^2 - k_0^2(\epsilon(+\infty) + \epsilon(-\infty))/2$, $\delta(k)$ 的积分奇异性消除了.

奇异项 $(k-\tau)^{-1}$ 在式(4)中的积分为

$$\int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{\tan(\pi x/2) - \tan(\pi t/2)} = \int_{-1}^1 \frac{(x-t) \cos(\pi x/2) \cos(\pi t/2) g(t) dt}{\sin(\pi(x-t)/2)} \frac{dt}{x-t}$$

$$\simeq \sum_{k=0}^{M-1} a_k(x) P_k(t),$$

式中 $P_k(t)$ 为 k 阶勒让德多项式,此式将奇异积分中非奇异函数部分用勒让德多项式展开. 由于积分

$$\int_{-1}^1 \frac{P_k(t) dt}{x-t} = 2Q_k(x)$$

$Q_k(x)$ 为 k 阶第二类勒让德函数,其递归定义为

$$\begin{cases} Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ Q_1(x) = -1 + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ Q_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} ((2k+1)xQ_k(x) - nQ_{k-1}(x)) \end{cases}$$

因此奇异积分项转化为

$$\int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{\tan(\pi x/2) - \tan(\pi t/2)} = 2 \sum_{k=0}^{M-1} a_k(x) Q_k(x)$$

依据勒让德多项式的正交性,有

$$\int_{-1}^1 P_k(t) P_n(t) dt = \frac{2}{2k+1} \delta_{kn}$$

于是

$$a_k(x) = \frac{(2k+1) \cos(\pi x/2)}{2} \cdot$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(x-t) \cos(\pi t/2) g(t)}{\sin(\pi(x-t)/2)} P_k(t) dt$$

故奇异积分项转化为

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{\tan(\pi x/2) - \tan(\pi t/2)} &\simeq \cos(\pi x/2) \cdot \\ &\sum_{k=0}^{M-1} (2k+1) Q_k(x) \int_{-1}^1 \frac{(x-t) \cos(\pi t/2)}{\sin(\pi(x-t)/2)} \\ &P_k(t) g(t) dt \end{aligned} \quad (7)$$

至此,奇异积分问题被消除.

对于任意折射率分布的平面光波导,偶函数无限部分 $(\epsilon(+\infty) + \epsilon(-\infty))/2$ 一项必然存在,其引起的奇异积分用式(6)消除;若 $\epsilon(+\infty) = \epsilon(-\infty)$,则 $(k-\tau)^{-1}$ 引起的奇异积分不存在,若 $\epsilon(+\infty) \neq \epsilon(-\infty)$,则可以按照式(7)方法处理,奇异积分问题也可以解决.

2 模式场积分方程数值求解

关于第二类 Fredholm 积分方程

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) g(t) dt + f(s) \quad (8)$$

的数值求解方法有很多^[13-15],其中 Nyström 方法^[10]最为简洁、高效,其基本原理是利用数值积分公式来近似式(8)中的积分项,这样积分方程转化为线性代数方程组求解.在众多数值积分法中,高斯求积公式 n 个积分点就能达到 $2n-1$ 阶的代数准确度,故选取高斯-勒让德(Gauss-Legendre)积分公式,即

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n A_i g(t_i) \quad (9)$$

式中 A_i 是积分的权值, t_i 是横坐标点,共有 n 个,权重值和坐标点由 n 阶勒让德多项式的零点决定.

将式(9)应用到式(8)中,有

$$g(s) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(s, t_j) f(t_j) + f(s) \quad (10)$$

对于齐次方程 $f(s) = 0$, 则

$$g(s) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(s, t_j) g(t_j) \quad (11)$$

若变量 s 选取与积分横坐标点 t_i 相同,则

$$g(t_i) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(t_i, t_j) g(t_j) \quad (12)$$

为标准的矩阵特征值方程.

$$\mathbf{M} \mathbf{g} = \sigma \mathbf{g} \quad (13)$$

式中 $\sigma = \lambda^{-1}$, 向量 $\mathbf{g} = \{g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_n)\}$, 而矩阵是 $M_{ij} = A_j K(t_i, t_j)$.

Nyström 方法应用到积分方程(4),考虑到 $\bar{\epsilon}(k)$ 包含实部和虚部两部分,即 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^R + i\mathbf{M}^I$, 则矩阵元

$$M_{ij}^R = A_j \cdot \epsilon_{\text{ef}}(\beta \tan(\pi t_i/2) - \beta \tan(\pi t_j/2))$$

$$M_{ij}^I = A_j \cdot \epsilon_{\text{of}}(\beta \tan(\pi t_i/2) - \beta \tan(\pi t_j/2)) -$$

$$A_j (\epsilon(+\infty) - \epsilon(-\infty)) \cos(\pi t_i/2) \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} (2k+1) Q_k(t_i) \frac{(t_i - t_j) \cos(\pi t_j/2)}{\sin(\pi(t_i - t_j)/2)} P_k(t_j)$$

式中 A_j 是高斯-勒让德积分权重值, t_i 和 t_j 是高斯-勒让德积分的坐标点. 矩阵特征值式(13)转化为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^R & -\mathbf{M}^I \\ \mathbf{M}^I & \mathbf{M}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}^R \\ \mathbf{g}^I \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \mathbf{g}^R \\ \mathbf{g}^I \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中特征值 $\sigma = 4\beta/k_0^2$, 给一定的 β , 这是标准的矩阵特征值问题,可以用线性代数程序包 Lapack 求解特征值和特征向量.不同的特征值及其特征向量代表不同的模式,将特征值和特征向量代回式(11),再根据 $g(k) = E_y(k)(k^2 + \beta^2)$, 就能得模式场在空间频域的场分布,经逆傅里叶变换可以得到空间的场分布.

3 算例

计算了几种不同折射率分布平面光波导的色散曲线,其中三种具有解析解.

3.1 与解析解的比较

第一种可以解析求解的是对称三层阶跃平面光波导(Step3),其结构参量为:薄膜厚度 $2a = 1.0 \mu\text{m}$,薄膜折射率 $n_1 = 1.5$,衬底 $n_2 = 1.0$,包层 $n_3 = 1.0$;第二种为非对称三层阶跃平面光波导(NsStep3),其结构参量为:薄膜厚度 $2a = 1.0 \mu\text{m}$,薄膜折射率 $n_1 = 1.5$,衬底 $n_2 = 1.3$,包层 $n_3 = 1.0$;第三种是双曲余弦平面光波导(Hyperbolic cosine),其折射率 $n^2(x)$ 分布和传输常量 β 分别为

$$n^2(x) = n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \sec h^2(2x/a)$$

$$\beta^2 = k_0^2 n_2^2 + \left(\sqrt{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) + \frac{1}{a^2}} - \frac{2m+1}{a} \right)^2$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

式中 $a = 0.5 \mu\text{m}$, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.0$.

当取传输常量 $\beta = 10.0 \mu\text{m}^{-1}$ 时,图 2 给出三种光波导 TE₀ 模有效折射率 n_{eff} 与理论值比较的相对误差,横轴为高斯积分点数目 N . 随着 N 的增加,相对误差减小,当 $N > 30$, 三种光波导 TE₀ 模有效折射率相对误差都小于 1.0×10^{-4} , 可见本文方法只需要很小的计算量就能达到较高的计算准确度.

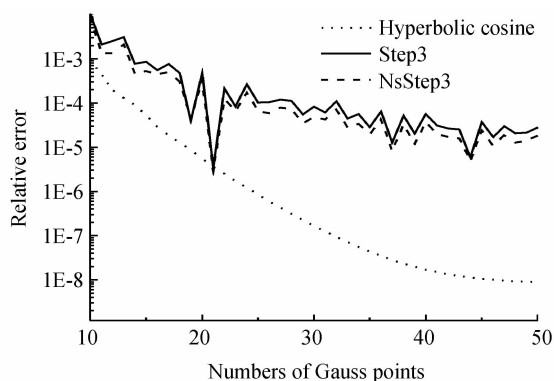


图2 TE₀ 模有效折射率计算结果的相对误差
Fig. 2 The relative error of n_{eff} for mode TE₀ as a function of Gauss points numbers

图3是TE₀模有效折射率计算误差随传输常量 β 的变化曲线, 高斯点数目 $N=28$, 传输常量 β 在 $(3.0 \mu\text{m}^{-1}, 20.0 \mu\text{m}^{-1})$ 范围内, TE₀模有效折射率相对误差小于 1.0×10^{-4} .

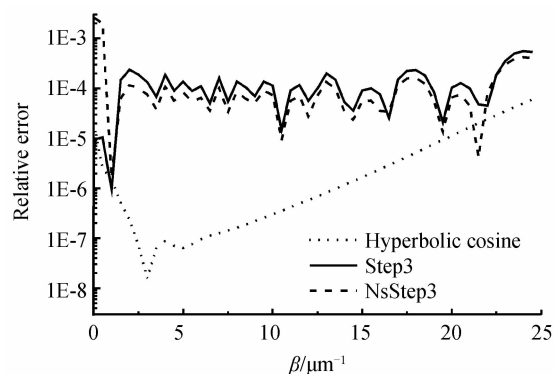


图3 TE₀ 模有效折射率计算误差与传输常量 β 的关系
Fig. 3 The relative error of n_{eff} for mode TE₀ as a function of propagation constant β

3.2 色散关系曲线和模式场分布

图4给出几个典型平面介质光波导TE₀模的色散关系曲线, 其中三角平面光波导(Triangle)的折射率分布为

$$n^2(x) = \begin{cases} (n_1^2 - n_2^2)(1 - |x|/a) & |x| \leq a \\ n_2^2 & |x| > a \end{cases}$$

式中 $a=0.5 \mu\text{m}$, $n_1=1.5$, $n_2=1.0$; 指数型(Exponent)折射率分布为

$$n^2(x) = \begin{cases} ae(n_1^2 - n_2^2)xe^{-ax} + n_2^2 & x \geq 0 \\ n_2^2 & x < 0 \end{cases}$$

式中 $a=4.0 \mu\text{m}^{-1}$, $n_1=1.5$, $n_2=1.0$; 对称三层阶跃平面光波导(Step3)和双曲余弦平面光波导(Hyperbolic Cosine)的折射率分布参量与3.1节相同.

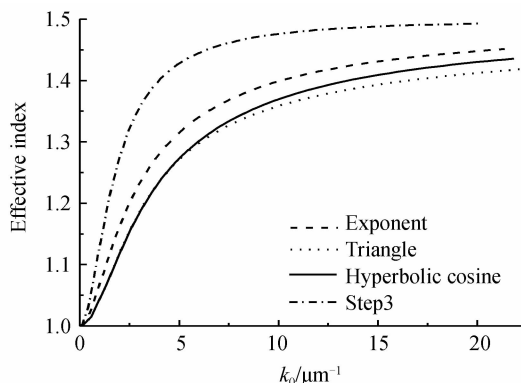


图4 几个典型平面介质光波导的色散关系曲线
Fig. 4 Dispersion relations of some planar optical waveguides

根据本文算法计算了不同折射率分布的平面光波导的TE₀和TE₁模式场分布, 如图5~8, 可知本文算法在较高的准确度下, 可以快速得到任意折射率分布平面光波导各阶模式的色散关系曲线和模式场分布.

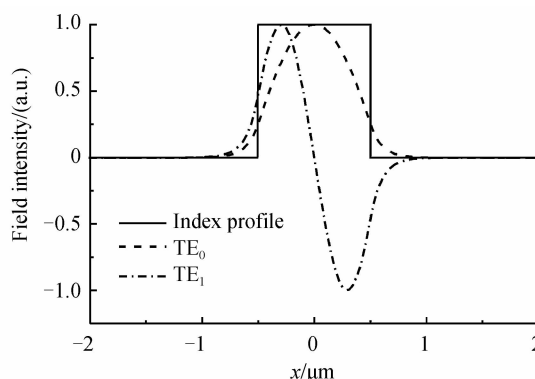


图5 对称三层阶跃平面光波导的TE₀, TE₁模式场
Fig. 5 TE₀, TE₁ mode field for symmetric three layers planar optical waveguide with step index profiles

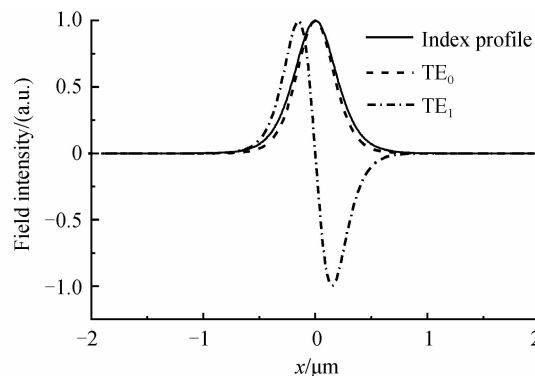


图6 双曲余弦折射率分布平面光波导的TE₀, TE₁模式场
Fig. 6 TE₀, TE₁ mode field for a planar optical waveguide with hyperbolic cosine index profiles

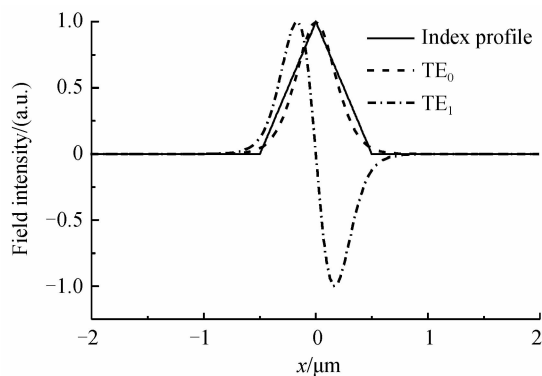


图7 三角形折射率分布平面光波导的 TE_0, TE_1 模式场
Fig. 7 TE_0, TE_1 mode field for a planar optical waveguide with triangle index profiles

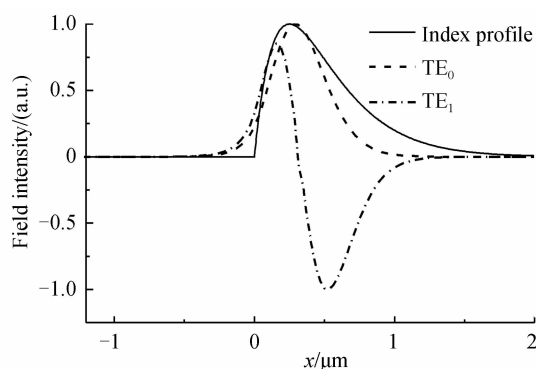


图8 指数折射率分布平面光波导的 TE_0, TE_1 模式场
Fig. 8 TE_0, TE_1 mode field for a planar optical waveguide with exponent index profiles

4 结论

通过傅里叶变换,一维平面光波导的波动方程及其边界条件在空间频域化为第二类 Fredholm 齐次积分方程,其核函数是光波导相对介电常量函数的傅里叶变换,以传播常量 β 为参量,而积分方程的特征值为波矢量 k_0 的函数.采用 Nyström 方法求解积分方程,并利用第二类勒让德函数解决了计算中可能出现的奇异积分问题.计算实例说明,该方法适用于求解任意折射率分布的平面介质光波导的色散关系曲线和场强分布,算法简单、计算量小,使用低阶矩阵就可以得到高准确度的结果.该方法还可以推广到二维介质光波导即光纤的模式场分析中.

参考文献

[1] KONG Fan-min, LI Kang, GUO Yi-feng, *et al.* FDTD analysis of planar optical waveguide structures [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **33**(3): 281-283.

孔繁敏,李康,郭毅峰,等. 平面光波导结构的 FDTD 分析[J]. 光子学报, 2004, **33**(3):281-283.

[2] KONG Fan-min, LI Kang, LIU Xin. Accurate analysis of planar optical waveguide devices using higher-order FDTD scheme[J]. *Optics Express*, 2006, **14**(24): 11796-11803.

[3] TASKMAKIDIS K, ARYAL D, HESS O. Accurate modal analysis of 3D dielectric waveguide using the nonstandard FDTD method[C]. 24th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, 2008, 956-961.

[4] ZHAO An-ping, SRBA R, CVETKOVIC. Finite-element analysis of hybrid modes in uniaxial planar waveguide by a simple iterative method [J]. *Optics Letters*, 1995, **20**(2): 139-141.

[5] SONG Jun, HE Sai-ling. Moment method study for the scattering loss caused by a point defect in a planar waveguide [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(1): 11-15.

宋军,何赛灵. 矩量法研究平面光波导点缺陷引起的散射损耗 [J]. 光学学报, 2004, **24**(1):11-15.

[6] SHE Shou-xian. Calculations of dispersion for rectangular-core dielectric waveguides and of coupling length for directional couplers by weighted residual method[J]. *Acta Optica Sinica*, 1987, **7**(6): 544-551.

余守宪. 矩形芯介质波导色散关系与定向耦合器的加权余量法计算[J]. 光学学报, 1987, **7**(6):544-551.

[7] LI Qiao, WANG Jing-yi. A refined WKB method for planar waveguides with asymmetric graded index profile[J]. *Optics Communications*, 1991, **83**(1-2): 144-153.

[8] CAO Zhuang-qi, JIANG Yi, SHEN Qi-shun, *et al.* Exact analytical method for planar optical waveguide with arbitrary index profile [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1999, **16**(9): 2209- 2212.

[9] CALVO M L, ALIEVA T, BASTIAAN M J, *et al.* New focus on Fourier optics techniques[C]. SPIE, 2004, **5581**: 517-521.

[10] 吕涛,黄晋. 积分方程的高准确度算法[M]. 北京:科学出版社, 2013.

[11] 邓建中,葛仁杰,程正兴. 计算方法[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1985.

[12] BARKER V A, BLACKFORD L S, DONGARRA J, *et al.* LAPACK 95 Users' Guide[M]. 北京:清华大学出版社, 2011.

[13] FANG Wei-fu, WANG Yi, XU Yue-sheng. An implementation of fast wavelet Galerkin methods for Integral equations of the second kind [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2004, **20**(2): 277-302.

[14] FARNOOSH R, EBRAHIMI M. Monte Carlo method for solving Fredholm integral equations of the second kind[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **195**(1): 309-315.

[15] WANG Qi-sheng, WANG Ke-yuan, CHEN Shao-jun. Least squares approximation method for the solution of Volterra-Fredholm integral equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, **272**: 141-147.