

doi: 10.3788/gzxb20154411.1127001

# 双光子过程原子与耦合腔相互作用中的量子失协

邱昌东, 卢道明

(武夷学院 机电工程学院, 福建 武夷山 354300)

**摘要:** 研究原子与耦合腔相互作用系统, 考虑每个腔囚禁一个二能级原子, 原子与腔场发生共振相互作用, 腔场也相互耦合的情况; 采用量子失协几何度量方法—几何量子失协, 来度量两个子系统间的量子失协. 利用数值计算方法给出了量子失协的演化曲线, 讨论了腔场间耦合系数变化对量子失协的影响. 研究表明: 随腔场间耦合系数增大, 两原子间量子失协增大, 而原子与腔场间或两腔场间的量子失协却减小.

**关键词:** 量子光学; 二能级原子; 双光子过程; 耦合腔; 量子失协

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)11-1127001-5

## The Quantum Discord in the System of Atoms Interacting with Coupled Cavities via a Two-photon Hopping Interaction

QIU Chang-dong, LU Dao-ming

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyi Mountain, Fujian, 354300, China)

**Abstract:** The cavity each imprisons one two-level atom, the atom has a resonant interaction with the cavities, and the cavities also interact with each other. Considering these, the geometrical quantum discord was used to measure quantum correlation in quantum systems. The geometrical quantum discord between the atoms, the cavities, and also between the atoms and the cavities were investigated. By using the numerical method, the evolution curves of the geometrical quantum discord were given, and the influences on the geometrical quantum discord with the changing coupling constant between the cavities were discussed. The results obtained show that the geometrical quantum discord between atoms is strengthened, but the geometrical quantum discord between cavities or between the atoms and the cavities are all weakened with the increasing of the coupling constant between cavities.

**Key words:** Quantum optics; Two-level atom; Two-photon process; Coupling cavities; Quantum discord

**OCIS Codes:** 270.0270 ; 270.5580 ; 020.0020 ; 020.5580

## 0 引言

量子纠缠是量子力学的基本概念之一, 它最早于 1935 年由 Einstein、Podolsky 和 Rosen 提出<sup>[1]</sup>. 量子纠缠具有独特的非局域量子关联性质, 它在量子信息处理和量子计算中有着广泛的应用, 如量子态隐形传送<sup>[2]</sup>、量子秘密共享和量子纠缠等<sup>[3-4]</sup>. 然而, 随着对量子纠缠研究的不断深入, 发现它只是量子关联的一种度量, 并不包含系统中的全部量子关联. 在一些纠缠为零的分离态中, 仍然存在量子关联, 这种量子关联能被

用于量子信息处理和量子计算<sup>[5-7]</sup>. 2002 年, Ollivier 和 Zurek 提出了量子失协<sup>[8]</sup> (Quantum Discord), 并用这一物理量来度量这种量子关联. 研究表明量子失协比量子纠缠更为广泛. 对于两体两维系统, Dick 等提出了量子失协的几何度量方法<sup>[9]</sup>, 简称为几何量子失协 (Geometrical Quantum Discord, GQD), 并给出了量子失协的解析表达式. 近年来, 已有大量有关量子失协的研究报道<sup>[10-15]</sup>, 例如, Ji 等研究了电路 QED 系统中纠缠和几何量子失协动力学<sup>[10]</sup>. Hu 等讨论了两原子与单模热场相互作用中的量子失协<sup>[11]</sup>. 耦合腔系统由于

基金项目: 福建省自然科学基金 (No. 2015J01020) 和福建省教育厅 A 类科技项目 (No. JA12327) 资助

第一作者: 邱昌东 (1973-), 副教授, 硕士, 主要研究方向为量子光学. Email: qiucd\_321@126.com

通讯作者: 卢道明 (1963-), 教授, 硕士, 主要研究方向为量子光学. Email: daominglu79@hotmail.com

收稿日期: 2015-06-30; 录用日期: 2015-09-21

它在分布式量子计算中具有潜在应用,引起了研究者的广泛关注. 目前,关于耦合腔系统中量子失协的研究<sup>[16]</sup>,主要考虑原子通过单光子跃迁与腔场相互作用的情况. 本文研究了原子与耦合腔体系双光子过程中两原子间、两腔场间、以及原子与腔场间的量子失协.

## 1 物理模型和系统态矢演化

考虑如图 1 的原子与耦合腔相互作用系统. 每个腔中囚禁一个二能级原子,原子与腔场、以及腔与腔之间都通过双光子过程耦合. 在旋波近似下,系统的相互作用哈密顿为<sup>[17]</sup>

$$H_I = f_1(a_A^+s_1^+ + a_A^+s_1^-) + f_2(a_B^+s_2^+ + a_B^+s_2^-) + J(a_A^+a_B^+ + a_A^+a_B^-) \quad (1)$$

式中  $a_A^+$ ,  $a_A$  ( $a_B^+$ ,  $a_B$ ) 分别表示腔场的产生和湮没算符,  $s_i^+$  和  $s_i^-$  ( $i=1,2$ ) 分别表示第  $i$  个原子的上升和下降算符.  $f_i$  ( $i=1,2$ ) 为原子与腔场间的相互作用强度,  $J$  为两个腔之间的耦合系数. 为简单起见,取  $f_1 = f_2 = f$ .

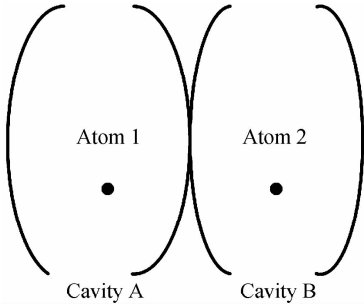


图 1 系统框图

Fig. 1 Sketch of the set-up

假设初始时刻系统处于  $|\varphi_3\rangle = |e0\rangle_A |g0\rangle_B$  表示的状态. 由于系统演化过程中保持激发数守恒,因此,系统将在以  $|\varphi_1\rangle = |g2\rangle_A |g0\rangle_B$ ,  $|\varphi_2\rangle = |g0\rangle_A |g2\rangle_B$ ,  $|\varphi_3\rangle = |e0\rangle_A |g0\rangle_B$ ,  $|\varphi_4\rangle = |g0\rangle_A |e0\rangle_B$  为基矢构成的子空间中演化. 态  $|mn\rangle_i$  ( $i=A,B$ ) 表示第  $i$  个腔中原子和腔场的状态,其中第一位表示原子状态,第二位表示腔场状态,  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) 表示原子的激发态(基态),  $|n\rangle$  表示 Fock 态. 那么,系统态矢的演化规律为

$$|\Psi(t)\rangle = C|\varphi_1\rangle + D|\varphi_2\rangle + F|\varphi_3\rangle + G|\varphi_4\rangle \quad (2)$$

它满足薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H_I |\Psi(t)\rangle \quad (3)$$

式中  $\hbar=1$ . 将式(2)代入式(3),解得式(2)的展开系数为

$$C = \frac{-i}{2\sqrt{2}fH} [\alpha(\beta^2 - 2f^2)\sin(\alpha t) - \beta(\alpha^2 - 2f^2)\sin(\beta t)] \quad (4)$$

$$D = \frac{1}{4\sqrt{2}fJH} (\alpha^2 - 2f^2)(\beta^2 - 2f^2) \times (\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)) \quad (5)$$

$$F = \frac{-1}{2H} [(\beta^2 - 2f^2)\cos(\alpha t) - (\alpha^2 - 2f^2)\cos(\beta t)] \quad (6)$$

$$G = \frac{-i}{4JH} (\alpha^2 - 2f^2)(\beta^2 - 2f^2) \times \left[ \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} - \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \right] \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha = (2f^2 + 2J^2 + H)^{1/2} \\ \beta = (2f^2 + 2J^2 - H)^{1/2} \\ H = ((2f^2 + 2J^2)^2 - 4f^4)^{1/2} \end{cases} \quad (8)$$

## 2 几何量子失协

采用 Dakic 等建议的几何量子失协 GQD 来度量两子系统间的量子关联. 对于一个用密度矩阵  $\rho$  描述的两体两维系统,若  $\rho$  能表示为

$$\rho = \frac{1}{4} [I \otimes I + \sum_{i=1}^3 (a_i \sigma_i \otimes I + b_i I \otimes \sigma_i) + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j] \quad (9)$$

式中  $I$  表示单位矩阵,  $\sigma_i$  ( $i=x,y,z$ ) 为泡利矩阵

$$\begin{cases} a_i = \text{Tr} \rho(\sigma_i \otimes I) \\ b_i = \text{Tr} \rho(I \otimes \sigma_i) \\ T_{ij} = \text{Tr} \rho(\sigma_i \otimes \sigma_j) \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\text{Tr}$  表示求迹,那么,两子系统间的 GQD 为<sup>[9]</sup>

$$D(\rho) = \frac{1}{4} (\| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{T} \|^2 - k_{\max}) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  表示列向量,  $\| \mathbf{a} \|^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2$ ,  $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$  是个矩阵,  $\| \mathbf{T} \|^2 = \text{Tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})$ ,  $k_{\max}$  为矩阵  $\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{T}\mathbf{T}^T$  的最大本征值,上标 T 表示矢量或者矩阵的转置.

### 2.1 两原子间的几何量子失协

首先,研究腔中两原子间的几何量子失协 GQD. 在原子基  $|ee\rangle$ ,  $|eg\rangle$ ,  $|ge\rangle$  和  $|gg\rangle$  下,描述两原子体系的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |F|^2 & FG^* & 0 \\ 0 & GF^* & |G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |D|^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

将式(12)代入式(10)和式(11),计算得出两原子间的 GQD 为

$$D_{12} = \frac{1}{4} [a_{3a}^2 + 2T_{12a}^2 + T_{33a}^2 - \max(T_{12a}^2, T_{33a}^2 + a_{3a}^2)] \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} a_{3a} = 2|F|^2 - 1 \\ T_{12a} = 2iFG \\ T_{33a} = 1 - 2|F|^2 - 2|G|^2 \end{cases} \quad (14)$$

为了讨论腔与腔之间耦合系数变化对量子失协的影响,取耦合系数  $J$  分别等于  $0.5f, f, 2f, 4f$  等确定值时,几何量子失协  $D_{12}$  随规范时间  $ft$  的演化曲线如图 2. 由图 2 得出:随耦合系数  $J$  的增大,几何量子失协

$D_{12}$ 演化体现从准周期性演化到不规则振荡再到准周期性演化的过程. 随  $J$  的增大, 曲线重心上移, 平均值增大. 平均值计算结果为,  $J=0.5f$  时,  $\bar{D}_{12}=0.10646$ ;  $J=f$  时,  $\bar{D}_{12}=0.12034$ ;  $J=2.0f$  时,  $\bar{D}_{12}=0.16972$ ;  $J=4.0f$  时,  $\bar{D}_{12}=0.22609$ . 这表明随  $J$  的增大, 两原子

间几何量子失协增大, 即两原子间的量子关联增强. 从物理机制上看, 这是因为随腔与腔之间耦合系数增大, 两原子分享激发数的几率增大, 因此两原子间量子关联增强, 原子间量子失协也就提高了.

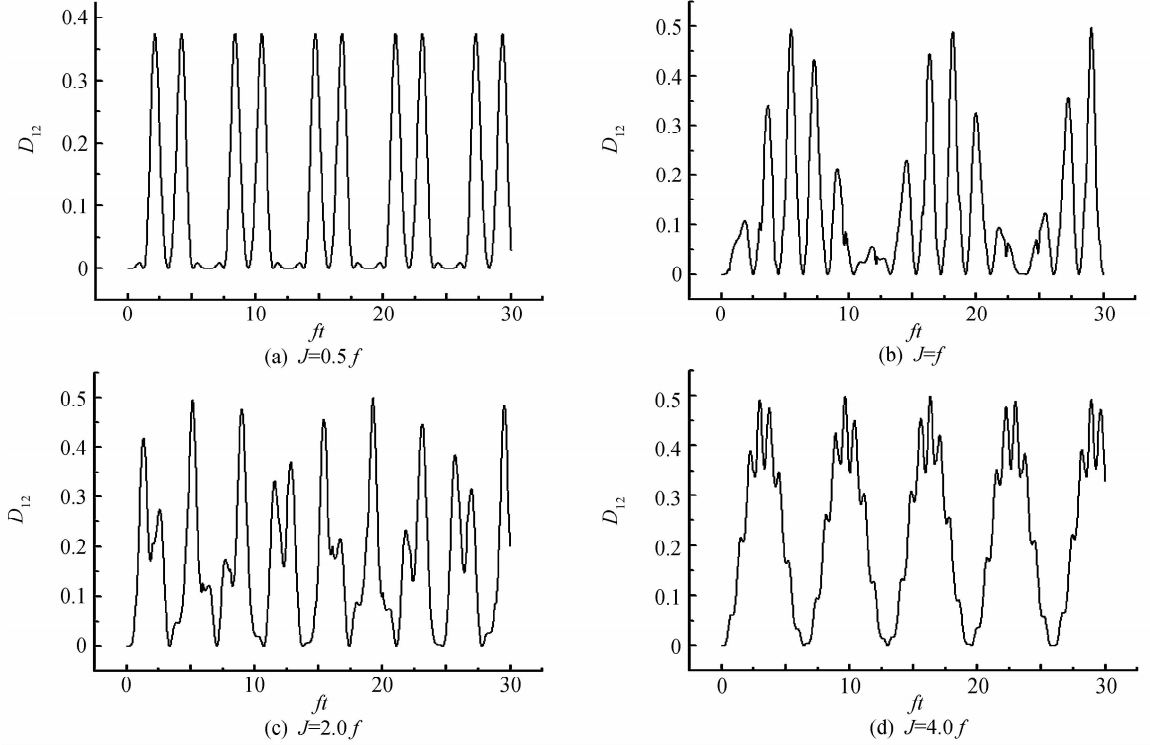


图2 两原子间量子失协  $D_{12}$  随规范时间  $ft$  的演化

Fig. 2 The evolution of  $D_{12}$  with scaled time  $ft$

## 2.2 两腔场间的几何量子失协

在腔场基  $|22\rangle, |20\rangle, |02\rangle$  和  $|00\rangle$  下, 描述两腔场系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & CD^* & 0 \\ 0 & C^*D & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |F|^2 + |G|^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(15)代入式(10)和式(11), 同样能得出两腔场间的 GQD 为

$$D_{AB} = \frac{1}{4} [a_{3b}^2 + 2T_{12b}^2 + T_{33b}^2, -\max(T_{12b}^2, T_{33b}^2 + a_{3b}^2)] \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} a_{3b} = 2|C|^2 - 1 \\ T_{12b} = -2iCD \\ T_{33b} = 1 - 2|C|^2 - 2|D|^2 \end{cases} \quad (17)$$

同样, 取耦合系数  $J$  分别等于  $0.5f, f, 2f, 4f$  等确定值时, 两腔场间几何量子失协  $D_{AB}$  随规范时间  $ft$  的演化数值计算结果如图3. 由图3得出: 随耦合系数  $J$  的

增大, 几何量子失协  $D_{AB}$  呈现出从准周期性演化到不规则振荡转化, 并且不规则振荡频率随  $J$  的增大而增大. 从式(16)得出,  $D_{AB}$  演化决定于展开系数  $C$  和  $D$ , 式(4)、(5)表明  $C$  和  $D$  是角频率为  $\alpha$  和  $\beta$  的正弦函数或余弦函数叠加. 当  $J \ll f$  时,  $\alpha \approx \beta$ , 因此这时  $D_{AB}$  呈现出准周期性演化. 另一方面,  $\alpha$  和  $\beta$  随  $J$  的增大而增大, 因此导致随  $J$  的增大曲线振荡频率增大. 比较图 3(a)、(b)、(c) 和 (d) 可见, 随  $J$  的增大, 曲线峰值减小, 重心下移, 平均值减小. 在计算的区间内,  $J=0.5f$  时,  $\bar{D}_{AB}=0.06886$ ;  $J=f$  时,  $\bar{D}_{AB}=0.03402$ ;  $J=2.0f$  时,  $\bar{D}_{AB}=0.01049$ ;  $J=4.0f$  时,  $\bar{D}_{AB}=0.00115$ . 这表明随  $J$  的增大, 两腔场间几何量子失协减小. 从物理机制上看, 随腔与腔之间耦合系数增大, 腔模被激发的几率减小, 因此两腔场间量子关联减弱, 两腔场间量子失协也就减小. 例如, 腔 B 被激发的几率为  $|D|^2$ .  $D = \sqrt{2}fJ \cdot [\cos(\beta t) - \cos(\alpha t)]/H$ , 因为  $H$  随  $J^2$  量级增大, 所以其振幅  $\sqrt{2}fJ/H$  随  $J$  增大而减小, 腔 B 被激发的几率也就减小.

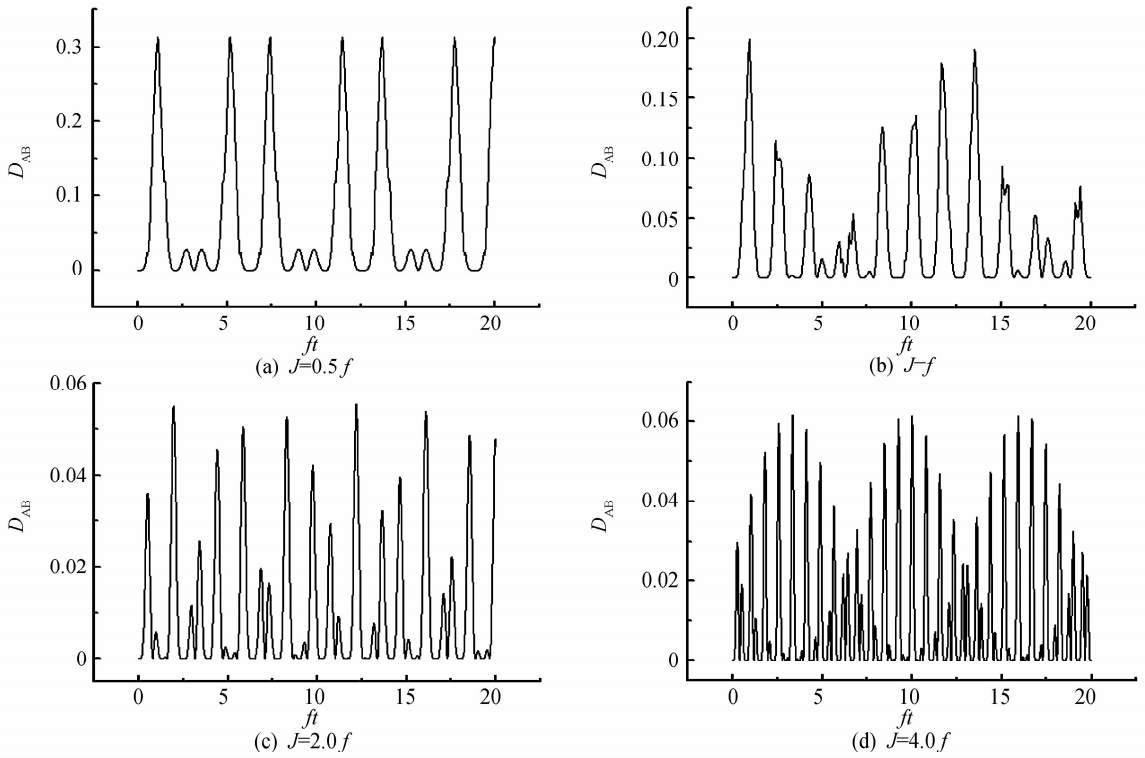


图3 两腔场间量子失协  $D_{AB}$  随规范时间  $ft$  的演化  
Fig. 3 The evolution of  $D_{AB}$  with scaled time  $ft$

### 2.3 原子与腔场间的几何量子失协

在基  $|e2\rangle, |e0\rangle, |g2\rangle$  和  $|g0\rangle$  下, 描述原子 1 与腔场 A 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |F|^2 & FC^* & 0 \\ 0 & CF^* & |C|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |D|^2 + |G|^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

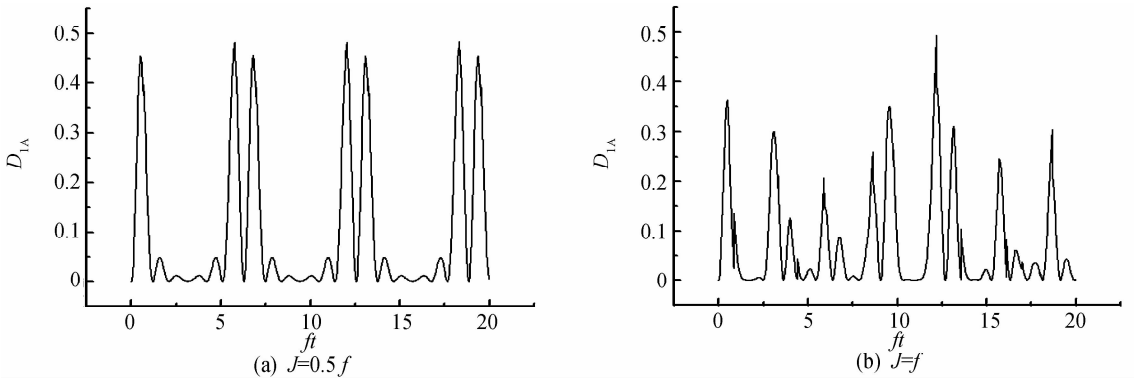
结合式(18)、(10)和(11), 得出原子 1 与腔场 A 间的 GQD 为

$$D_{1A} = \frac{1}{4} [a_{3c}^2 + 2T_{12c}^2 + T_{33c}^2 - \max(T_{12c}^2, T_{33c}^2 + a_{3c}^2)] \quad (19)$$

式中

$$\begin{cases} a_{3c} = 2|F|^2 - 1 \\ T_{12c} = 2iCF \\ T_{33c} = 1 - 2|C|^2 - 2|F|^2 \end{cases} \quad (20)$$

利用式(19), 通过数值计算原子 1 与腔场 A 间的几何量子失协  $D_{1A}$  描绘如图 4. 图 4 的演化曲线表明:  $J$  较小时  $D_{1A}$  呈现出准周期性振荡, 随耦合系数  $J$  的增大,  $D_{1A}$  逐渐向不规则振荡的转变. 当  $J$  大于一定值时,  $D_{1A}$  呈现出崩塌和恢复效应. 另一方面, 随  $J$  的增大, 曲线峰值减小, 重心下降. 这表明随  $J$  的增大原子与腔场间量子失协减小. 其量子失协减小的原因, 也是因为随腔与腔之间耦合系数增大, 腔模被激发的几率减小所致.



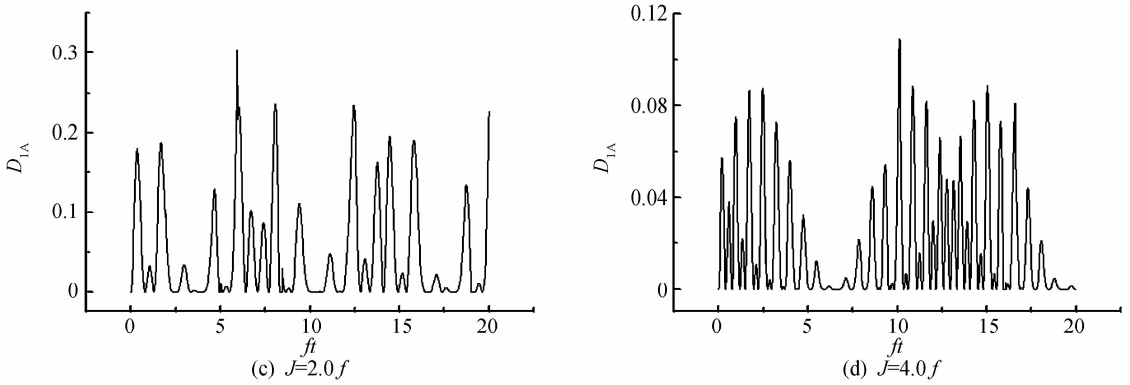


图4 量子失协  $D_{1A}$  随规范时间  $ft$  的演化  
Fig. 4 The evolution of  $D_{1A}$  with scaled time  $ft$

### 3 结论

考虑耦合腔系统中,二能级原子通过双光子跃迁与腔场发生共振相互作用,并且腔与腔之间也是通过双光子耦合的情况.利用 Dick 等提出的几何量子失协,研究了系统中两原子之间、两腔场之间和原子与腔场之间的量子失协.讨论了腔场间耦合系数的变化对量子失协演化的影响.研究表明:随腔场间耦合系数增大,两原子间的量子失协演化曲线重心上移,平均值增大,但原子与腔场间和两腔场间的量子失协演化曲线却呈现出重心下移、平均值减小的情况.这些结果表明,随腔场间耦合系数增大,两原子间量子失协增大,而原子与腔场间和两腔场间的量子失协却减小.

#### 参考文献

- [1] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete[J]. *Physical Review*, 1935, **47**(10): 777-780.
- [2] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. *Physical Review Letters*, 1993, **70**(11): 1895-1899.
- [3] MARK H, BUZEK V, BERTHIANME A. Quantum secret sharing[J]. *Physical Review A*, 1999, **59**(3): 1829-1834.
- [4] SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. *Physical Review A*, 1995, **52**(4): R2493-R2496.
- [5] DATTA A, VIDAL G. Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(4): 042310.
- [6] DATTA A, SHAJI A, CAVES C M. Quantum discord and the power of one qubit[J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(5): 050502.

- [7] LANGON B P, BARBIERI M, ALMEIDA M P, *et al.* Experimental quantum computing without entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 2008, **101**(20): 200501.
- [8] OLLIVIER H, ZUREK W H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations[J]. *Physical Review Letters*, 2002, **88**(1): 017901.
- [9] DAKIC B, VEDRAL V, BRUKNER C. Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord[J]. *Physical Review Letters*, 2010, **105**(19): 190502.
- [10] JI Y H, LIU Y M. Regulation of entanglement and geometric quantum discord of hybrid superconducting qubits for circuit QED[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2013, **52**(9): 3220-3228.
- [11] HU Y H, FANG M F. Quantum discord of two atoms interacting with a single-mode thermal field[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2011, **50**(10): 3158-3165.
- [12] WANG C, CHEN Q H. Quantum discord dynamics of two qubits in single-mode cavities[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(4): 040304.
- [13] JIANG F J, LU H J, YAN X H, *et al.* A symmetric geometric measure and the dynamics of quantum discord[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(4): 040303.
- [14] ALI M, RAU A R P, ALBER G. Quantum discord for two-qubit X states [J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(4): 042105.
- [15] WANG B, XU Z Y, CHEN Z Q, *et al.* Non-Markovian effect on the quantum discord[J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(1): 014101.
- [16] LI R Q, LU D M. Quantum discord in the system of atoms interacting with coupled cavities[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(3): 030301.  
李锐奇, 卢道明. 原子与耦合腔相互作用系统中的量子失协[J]. *物理学报*, 2014, **63**(3): 030301.
- [17] ALEXANIAN M. Two-Photon exchange between two three-level atoms in separate cavities[J]. *Physical Review A*, 2011, **83**(2): 023814.