

doi: 10.3788/gzxb20154411.1112001

光纤布喇格光栅反射谱寻峰算法优化及比较

陈志军^{1,2}, 白剑¹, 吴祖堂², 赵新华², 张继军²

(1 浙江大学 现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

(2 西北核技术研究所, 西安 710024)

摘 要: 针对光纤布喇格光栅反射谱的特点, 研究了强度阈值对五种典型寻峰算法的影响, 明确了阈值优化对减小寻峰误差的重要性. 对各算法分别进行阈值优化, 从寻峰误差和运行效率两个方面对不同采样间隔条件下的寻峰算法进行比较分析. 研究表明: 各寻峰算法与强度阈值的关系不尽相同, 阈值优化可有效减小各算法的寻峰误差, 提高光纤布喇格光栅传感系统波长的分辨率和检测准确度; 除质心探测法外, 增大采样间隔并不能显著提高各算法的运行效率; 高斯拟合法寻峰误差最小且最为稳定, 适用于静态信号和低频动态信号的解调; 质心探测法运行速度最快且误差相对较小, 可用于中高频动态信号的解调.

关键词: 布喇格光栅; 寻峰算法; 优化; 强度阈值; 采样间隔

中图分类号: TP212

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)11-1112001-6

Optimization and Comparison of the Peak-detection Algorithms for the Reflection Spectrum of Fiber Bragg Grating

CHEN Zhi-jun^{1,2}, BAI Jian¹, WU Zu-tang², ZHAO Xin-hua², ZHANG Ji-jun²

(1 State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(2 Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

Abstract: According to the characteristics of the reflection spectrum of Fiber Bragg grating (FBG), the influence of power threshold value upon five kinds of typical peak-detection algorithms was studied, and the importance of threshold optimization for reducing peak-detection errors is clear and definite. The threshold value of each algorithm was optimized, and the five algorithms were compared and analyzed from the error of peak-detection and the operational efficiency by selecting different sampling intervals. Experiments show that the relationship between each peak-detection algorithm and power thresholds are different, select the appropriate power threshold for each peak-detection algorithm can reduce their error effectively, improve the resolution and accuracy of wavelength of FBG sensing system. Except centroid detection algorithm, increasing the sampling interval does not improve the operational efficiency of each algorithm significantly. Gaussian fitting algorithm has the smallest error and the best stability, and is appropriate for the demodulation of static signal and low-frequency dynamic signal. Centroid detection algorithm has the highest operational efficiency and relatively small error, and can be used in the demodulation of intermediate-frequency and high-frequency dynamic signal.

Key words: Fiber Bragg grating; Peak-detection algorithm; Optimization; Power threshold; Sampling interval

OCIS Codes: 120.6200; 300.6380; 060.3735

0 引言

光纤布喇格光栅 (Fiber Bragg Grating, FBG) 传感器通过外界参量对布喇格中心波长的调制来获取传感

信息, 具有灵敏度高、抗电磁干扰、防水性能好、无零漂、体积小、可靠性高、使用寿命长、可组成准分布式的传感网络等优点, 是一种使用频率高、应用范围广的光纤传感器。

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 41174033) 资助

第一作者: 陈志军 (1981—), 男, 工程师, 硕士研究生, 主要研究方向为光纤光栅传感与解调技术. Email: echenist@163.com

导师 (通讯作者): 白剑 (1967—), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为二元光学、微光学、光电检测和全景成像. Email: bai@zju.edu.cn

收稿日期: 2015-03-23; 录用日期: 2015-06-17

<http://www.photon.ac.cn>

FBG 传感解调系统的关键技术是测量其波长的移动,而布喇格波长又对应其反射谱的峰值位置,因此,通过寻峰算法对反射光谱进行准确的峰值提取对于提高传感系统的波长分辨率和检测准确度至关重要^[1-3].

常用的寻峰算法有多种,现有寻峰算法间的性能比较或未考虑设置阈值条件^[3-8],或只设置了单一阈值条件而没有分别对其优化^[2,9-11],或只针对单一算法考察了不同强度阈值对寻峰结果的影响^[12],这在一定程度上限制了波长分辨率和检测准确度的提高.本文选取 FBG 反射谱的不同强度阈值研究了其对五种典型寻峰算法的影响,根据各算法与强度阈值间的不同关系分别对其优化;在此基础上,设置不同的采样间隔,从算法误差和算法运行效率两个方面对各寻峰算法进行了详细地比较分析.研究表明:进行阈值优化可有效减小各算法的寻峰误差,针对不同的信号类型选取合适的寻峰算法可有效提高波长的分辨率和检测准确度,降低传感系统的误差.

1 典型寻峰算法拟合原理

1.1 质心探测法

质心探测法的原理是把采集的波形曲线分峰截幅后作为质量非均匀的曲线段,波形曲线采样点每点的横坐标值相当于质点系各质点的位矢,纵坐标值相当于各质点的质量,质点系质心的横坐标可表示为^[13]

$$x_0 = \sum x_i y_i / \sum y_i \quad (1)$$

质心探测法应用于峰值提取又称为功率加权法^[14],实质是以反射谱的光功率为加权系数计算波长的加权平均值,进而得到反射谱光功率在波长方向上的中心位置,以此作为 FBG 反射谱的峰值波长.可将式(1)表示为

$$\lambda_B = \sum \lambda_i I_i / \sum I_i \quad (2)$$

式中, I_i 为反射谱采样点每点的强度值, λ_i 为反射谱采样点每点对应的波长, λ_B 为 FBG 的布喇格波长.

1.2 一般多项式拟合法

一般多项式拟合法^[15]原理为采用多项式作为拟合函数,对采集到的波形曲线进行分峰截幅后以最小二乘法为判定进行拟合,其一般式为

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0 \quad (3)$$

选用二阶多项式进行 FBG 反射谱的拟合,即 $n=2$,可将式(3)表示为

$$P(\lambda) = p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 \quad (4)$$

若反射谱采样点 (λ_i, I_i) 个数为 n ,即 $(i=1, 2, \dots, n)$,按照最小二乘法,式(4)的偏差平方和 S 为

$$S = \sum_{i=1}^n (I_i - P(\lambda_i))^2 \quad (5)$$

当 S 取最小值时即可确定系数 p_0, p_1, p_2 的值,带入式(4)并求其一阶微分解析式为

$$p'_2(\lambda) = 2p_2\lambda + p_1 \quad (6)$$

令解析式 $p'_2(\lambda) = 0$,即可得 FBG 的布喇格波长

$$\lambda_B = -p_1 / 2p_2 \quad (7)$$

1.3 高斯-多项式拟合法

高斯-多项式拟合法^[16]对采集的波形数据首先进行高斯多项式变换,然后再采用一般多项式拟合法进行曲线拟合,进而确定传感光栅反射峰的位置.

FBG 的反射谱近似为高斯分布,可用高斯函数近似表示为^[17]

$$I(\lambda) = I_0 \exp[-4 \ln 2 (\frac{\lambda - \lambda_B}{\Delta \lambda_B})^2] \quad (8)$$

式中, I_0 为反射谱强度 I 的幅值, λ_B 为 FBG 的布喇格波长, $\Delta \lambda_B$ 为反射谱的 3 dB 带宽.对式(8)两边取对数,得

$$\begin{aligned} \ln I(\lambda) = & -(4 \ln 2) \frac{\lambda_B^2}{\Delta \lambda_B^2} - \ln I_0 + \\ & 8 \ln 2 \frac{\lambda_B}{\Delta \lambda_B} \lambda - 4 \ln 2 \frac{1}{\Delta \lambda_B^2} \lambda^2 \end{aligned} \quad (9)$$

令 $P(\lambda) = \ln I(\lambda)$, $p_0 = -(4 \ln 2) \frac{\lambda_B^2}{\Delta \lambda_B^2} - \ln I_0$, $p_1 = 8 \ln 2 \frac{\lambda_B}{\Delta \lambda_B^2}$,

$$p_2 = -4 \ln 2 \frac{1}{\Delta \lambda_B^2}$$

则式(9)变为

$$P(\lambda) = p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 \quad (10)$$

可知,式(10)为典型的二次多项式拟合形式,以最小二乘法为判定进行拟合得出系数 p_0, p_1, p_2 的值,又

$$\lambda_B = -p_1 / 2p_2 \quad (11)$$

由此可得传感光栅的布喇格波长值.

1.4 高斯拟合法

高斯拟合算法^[18]对光栅反射谱采样后,不经过多项式变换,直接作为高斯函数(式(8))进行拟合处理,设反射谱采样点 (λ_i, I_i) 个数为 n ,其中 $(i=1, 2, \dots, n)$,根据最小二乘法,式(8)的偏差平方和 S 为

$$S = \sum_{i=1}^n (I_i - I(\lambda_i))^2 \quad (12)$$

当 S 取最小值时可确定最佳拟合曲线 $I(\lambda)$,进而可得传感光栅的布喇格波长.

1.5 高斯公式非线性曲线拟合法

高斯公式非线性曲线拟合法是以 Levenberg-Marquardt(L-M)算法和最小二乘法为判定,对采集的波形数据曲线直接作为高斯函数(式(8))进行拟合处理.

L-M 算法^[19-21]在 Gauss-Newton(G-N)算法和非线性梯度下降算法之间插值,提供了一种求解函数最小值的数值方法.相对于 G-N 算法,L-M 更能抵制噪声的影响,即使初始值远离最终的最小值也可以得到精确的解.

高斯公式非线性曲线拟合法初值的选取对于最后的拟合效果影响很大,实验中对波形曲线分峰截幅后

首先找到该段波形的功率最大值点,将功率最大值作为 I_0 的初值,将其对应的波长作为 λ_B 的初值,取得了很好的效果。

2 寻峰算法的优化与比较

如图 1,将三个不同中心波长的 FBG 传感器放置于由 FLUKE 深井恒温槽提供的恒温环境中,待其温度稳定后,用 Micron Optics 公司生产的光纤光栅传感解调仪 SM130 获取 FBG 传感器的中心波长,同时用光纤光谱仪获得 FBG 的反射谱.其中一个 FBG 的反射谱如图 2.

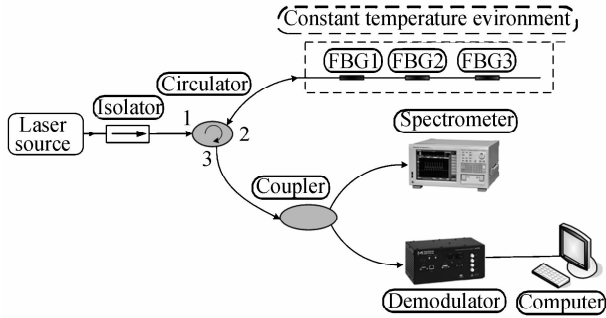


图 1 FBG 反射光谱测量系统

Fig. 1 FBG reflection spectrum measurement system

设置光谱仪扫描带宽为 2 nm,采样间隔 1 pm,每 10 次测量取平均,测得 FBG 传感器反射谱 3 dB 带宽分别为 0.1679 nm、0.1876 nm、0.2091 nm,峰值强度分别为 2.700 nW、2.226 nW、2.301 nW;解调仪 SM130 波长准确度 ≤ 1 pm,波长稳定性可达 0.05 pm,测得三个 FBG 传感器中心波长分别为 1525.2006 nm、1549.9435 nm、1560.3155 nm,将其看作 FBG 布喇格

波长的真实值。

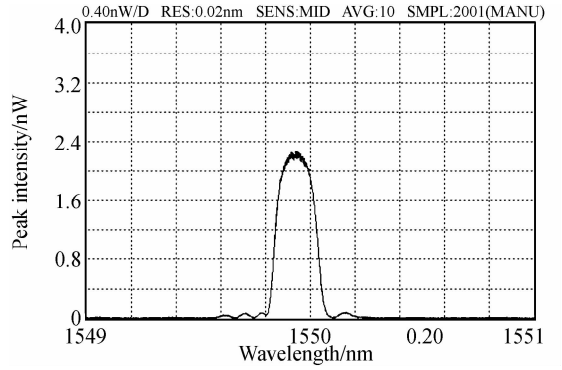


图 2 FBG 反射光谱

Fig. 2 The reflection spectrum of FBG

2.1 强度阈值对寻峰算法的影响分析

如图 2,FBG 的反射谱近似为高斯分布,FBG 传感解调关心的是光谱曲线峰值的位置,选取合适的强度阈值条件进行拟合,即各算法只选用大于该强度值的曲线数据进行光谱重建和峰值提取,可减小算法的数据运算量,提高数据的实时处理能力,也可有效减小各寻峰算法拟合结果的误差。

实验中,首先计算反射谱各采样点光功率的平均值(记作 avg,三个 FBG 传感器反射谱采样点光功率的平均值分别为 0.24 nW、0.22 nW、0.24 nW),然后以平均值的不同倍数(0~6)作为强度阈值分别用五种寻峰算法进行峰值提取,强度阈值的选取对各算法寻峰结果的影响如图 3,其中五角星标记点代表不同强度阈值条件下三个 FBG 传感器寻峰结果误差绝对值的平均值。

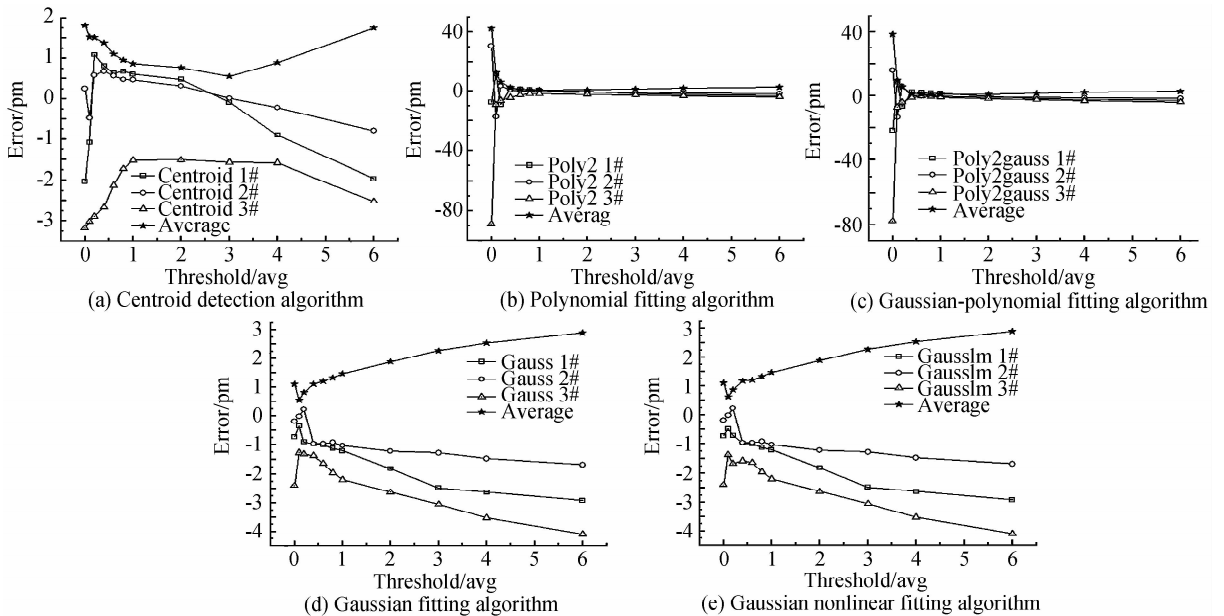


图 3 强度阈值对各算法寻峰误差影响

Fig. 3 The influence of power threshold upon error of algorithms

仿真实验结果表明,阈值的选取对五种算法寻峰结果的影响很大,如图 3(b)和图 3(c),不设置强度阈值(即功率平均值的倍数设为 0)时,一般多项式拟合法和高斯-多项式拟合法的拟合结果误差分别达到了-88.70 pm 和-77.48 pm,设置阈值后其结果误差大幅度减小;由图 3(a)、(d)和(e)可知,质心探测法、高斯拟合法和高斯公式非线性拟合法寻峰误差受强度阈值影响相对较小,质心探测法寻峰结果误差先随阈

值的增大而逐渐减小,并在功率平均值的倍数设置为 3 时具有最小误差值,而后又随阈值的增大而增大;高斯拟合法与高斯公式非线性拟合法具有相似的变化规律,均在功率平均值的倍数设置为 0.1~0.2 时具有较小误差值,而后误差值随阈值的增大而不断增大.取 FBG 传感器寻峰结果误差绝对值的平均值最小时的强度阈值作为各算法的最佳阈值,各寻峰算法最佳阈值及最小误差如表 1.

表 1 各寻峰算法最佳阈值及最小误差

Table 1 The best threshold and minimum error of algorithms

Peak-detection algorithm	Centroid detection algorithm	Polynomial fitting algorithm	Gaussian-polynomial fitting algorithm	Gaussian fitting algorithm	Gaussian nonlinear fitting algorithm
Power threshold/avg	3	1	0.8	0.1	0.1
Minimum error/pm	0.56	0.83	0.74	0.55	0.63

各寻峰算法与强度阈值间的关系不尽相同,分析认为与阈值设置后反射谱的谱型有关.阈值设置较小时,用于峰值提取的谱型严重偏离标准二次型的形状,一般多项式拟合法和高斯-多项式拟合法寻峰结果误差很大;阈值设置较大时,用于峰值提取的谱型逐渐偏离高斯谱形状,高斯拟合法与高斯公式非线性拟合法的寻峰误差随之逐渐增大,而质心探测法受低幅度不

规则波形的影响逐渐减小,寻峰误差也随之减小.

如表 2,将五种寻峰算法均分别按表 1 取得最小误差时的阈值条件进行优化,相对于阈值优化前(即功率平均值的倍数为 0 时),各算法优化后的寻峰误差均有大幅减小.由此可知,阈值优化是改善算法实际性能、提高其检测准确度的有效手段.

表 2 各寻峰算法阈值优化前后误差对比

Table 2 The comparison of error before and after optimization of algorithms

Peak-detection algorithm	Centroid detection algorithm	Polynomial fitting algorithm	Gaussian-polynomial fitting algorithm	Gaussian fitting algorithm	Gaussian nonlinear fitting algorithm
Error before optimization/pm	1.82	42.25	38.32	1.10	1.12
Error after optimization/pm	0.56	0.83	0.74	0.55	0.63
Error reduction	69%	98%	98%	50%	44%

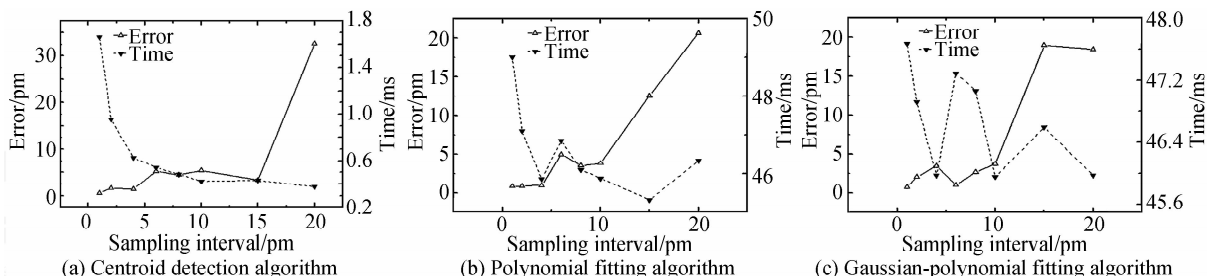
2.2 采样间隔对寻峰算法的影响分析

设置五种寻峰算法的最佳阈值条件,对不同采样间隔的光谱曲线数据进行拟合,从采样间隔对各算法寻峰结果误差影响和算法运行时间两个方面对五种寻峰算法的运行效率进行比较分析.

实验中,用光纤光谱仪共采集了 8 种不同采样间隔(1 pm~20 pm)的反射谱曲线,在相同的硬件条件和 Matlab 环境下分别用五种不同算法对其进行寻峰,并记录算法每次的运行时间,每种算法对每种采样间隔反射谱曲线的寻峰过程均运行 10 次,取 10 次运行时

间的平均值作为其最终结果.五种寻峰算法不同采样间隔寻峰误差(取绝对值)及运行时间如图 4.

实验结果显示,随着反射谱曲线采样间隔的增大,各算法寻峰误差均成增大趋势.质心探测法在采样间隔不大于 15 pm 时,其寻峰误差变化在 5.5 pm 以内;一般多项式拟合法和高斯-多项式拟合法寻峰误差波动较大,其最大误差值分别为 20.6 pm 和 19.1 pm;高斯拟合法与高斯公式非线性拟合法具有相似的变化规律,寻峰误差的变化最为稳定,均在 3 pm 以内.



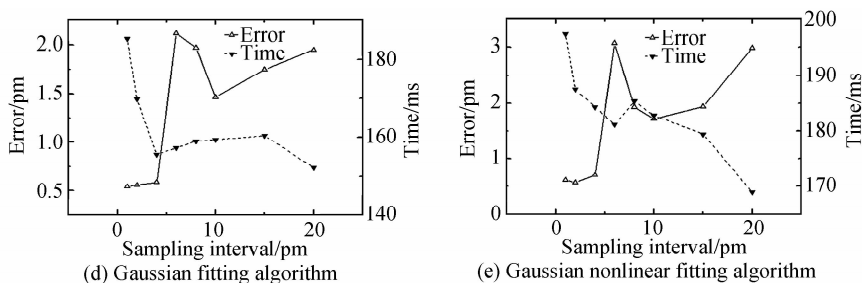


图4 各算法不同采用间隔寻峰误差及运行时间比较

Fig. 4 Comparison of peak-detection error and operational efficiency of algorithms with different sampling interval

除质心探测法外,各算法运行时间并不随采样点的减少而严格减小.质心探测法运行时间最短,采样间隔大于1 pm时其采样时间小于1 ms;一般多项式拟合法和高斯-多项式拟合法运行时间均在45 ms~50 ms范围内;高斯拟合法运行时间大于150 ms,而高斯公式非线性拟合法运行时间最长,在168 ms以上.

2.3 寻峰算法分析比较

由分析可知,各寻峰算法与强度阈值间的关系不尽相同,阈值优化可显著减小各算法的误差,提高寻峰的准确度.在对各寻峰算法进行优化后,高斯拟合法和高斯公式非线性拟合法的寻峰误差最小且最为稳定,但两者的运行时间都较长,增大采样间隔并不能有效提高算法的运行效率,高斯拟合法相对更加高效,适用于静态信号或低频动态信号的解调;质心探测法运行速度最快,且其寻峰误差相对较小,可适当减小其采样点的密度以用于中高动态信号的解调.

3 结论

通过仿真实验,深入研究了五种典型寻峰算法与强度阈值间的关系,明确了阈值优化对减小各寻峰算法结果误差的重要性;结合反射谱曲线采样间隔对各算法寻峰误差和运行效率的影响,对各寻峰算法的特性进行了比较,得出应根据测试信号的类型选取合适的寻峰算法的结论,为FBG传感解调技术的深入研究提供了参考.

解调过程中,可先对FBG传感信号进行分峰,然后分别计算各反射峰采样点光功率的平均值,进而根据寻峰算法进行阈值优化和峰值提取.本文旨在验证强度阈值的选取对各算法寻峰误差的影响,定性各算法的最佳阈值区间,实际测量过程中,FBG传感器反射谱因栅距、反射率等参数的不同和回路中干扰的影响而变化各异,如何精确地选取不同寻峰算法的最佳强度阈值还需要进一步深入研究.

参考文献

[1] LI Jun-shou, ZHU Yong, WANG Ning, *et al.* An algorithm for improving the signal stability of the fast fiber optic Fabry-Perot non-scanning correlation demodulation system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, **44**(1):0106005.
李钧寿,朱永,王宁,等.一种提高快速光纤法-珀非扫描式相

关解调系统信号稳定性的算法[J]. *光子学报*, 2015, **44**(1): 0106005.

- [2] BODENDORFER T, MULLER M S, HIRTH F, *et al.* Comparison of different peak algorithms with regards to spectrometric fiber Bragg grating interrogation systems[C]. *International Symposium on Optomechatronic Technologies*, 2009: 122-126.
- [3] NEGRI L, NIED A, KALINOWSKI H, *et al.* Benchmark for peak detection algorithms in fiber bragg grating interrogation and a new neural network for its performance improvement [J]. *Sensors*, 2011, **11**(4): 3466-3482.
- [4] SHELLE D D, Paul A W, ESPEJO R J, *et al.* Fundamental limits in fiber Bragg grating peak wavelength measurements [C]. *17th International Conference on Optical Fibre Sensors*, 2005, 5855: 88-92.
- [5] ZHU Mei, ZHANG Miao, HU Li-zhang, *et al.* Peak-search algorithm for center wavelength detection in fiber Bragg gratings[J]. *Study on Optical Communications*, 2011, **167**(5): 60-63.
朱梅,张森,胡立章,等.光纤布喇格光栅中心波长检测中的寻峰算法[J]. *光通信研究*, 2011, **167**(5): 60-63.
- [6] LIU Quan, WANG Huan. Research on the peak-detection algorithm in high-frequency demodulation for the fiber bragg grating[J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2010, **32**(6): 59-61.
刘泉,王欢.高速光纤光栅解调的寻峰算法研究[J]. *武汉理工大学学报*, 2010, **32**(6): 59-61.
- [7] SHANG Qiu-feng, LIN Bing-hua. The comparison and analysis of typical peak-detection algorithms in fiber bragg grating sensor system [J]. *Electrical Measurement & Instrumentation*, 2010, **47**(530): 1-4.
尚秋峰,林炳华.光纤Bragg光栅传感系统典型寻峰算法的比较分析[J]. *电测与仪表*, 2010, **47**(530): 1-4.
- [8] ZHU Hao-han, QIN Hai-kun, ZHANG Min, *et al.* Peak-detection algorithm in the demodulation for the fiber bragg grating sensor systym[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2008, **35**(6): 893-897.
朱浩瀚,秦海琨,张敏,等.光纤布喇格光栅传感解调中的寻峰算法[J]. *中国激光*, 2008, **35**(6): 893-897.
- [9] YIN Cheng-qun, WANG Zi-shuo, HE Yu-jun, *et al.* Simulation and experiment analysis of central wavelength detection algorithm for FBG reflection spectrum[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2011, **40**(2): 322-327.
尹成群,王梓朔,何玉钧,等.FBG反射谱中心波长检测算法仿真与实验分析[J]. *红外与激光工程*, 2011, **40**(2): 322-327.
- [10] TANG Bo, HUANG Jun-bin, GU Hong-can, *et al.* FBG demodulation technology based on a tunable fabry-perot interferometer[J]. *Ship Electronic Engineering*, 2013, **33**(12): 42-45.

- 唐波, 黄俊斌, 顾宏灿, 等. 基于可调谐 F-P 滤波器的光纤光栅波长解调算法研究[J]. 舰船电子工程, 2013, **33**(12): 42-45.
- [11] HAN Ping, ZHOU Zu-de. Feedback relative peak-detection algorithm for high-speed and high-precision grating demodulator [J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2011, **33**(1): 10-13.
韩屏, 周祖德. 高速高精光栅解调器的反馈式相对寻峰算法[J]. 武汉理工大学学报, 2011, **33**(1): 10-13.
- [12] YU You-long, WANG Xue-wei, WANG Hao. Analysis of peak-detection algorithms in fiber bragg grating by different sampling methods [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(11): 1274-1278.
余有龙, 王雪微, 王浩. 不同采样方式下光纤布喇格光栅反射谱寻峰算法的分析[J]. 光子学报, 2012, **41**(11): 1274-1278.
- [13] OTHONOS A, KALLI K. Fiber gratings-fundamentals and applications in telecommunications and sensing[M]. Norwood: Artech House, 1999, 318-319.
- [14] JING Wen-cai, WANG Guang-hui, LIU Kun, *et al.* Application of weight wavelength algorithm on the demodulation of a fiber bragg grating optical sensing system [J]. *Journal of Optoelectronics • Laser*, 2007, **18**(9): 1022-1025.
井文才, 王光辉, 刘琨, 等. 功率加权法用于光纤 Bragg 光栅特征波长检测[J]. 光电子·激光, 2007, **18**(9): 1022-1025.
- [15] STEVEN C C. Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists[M]. New York: McGraw-Hill, 2009, 333-348.
- [16] FU Jian-wei, XIAO Li-zhi, ZHANG Yuan-zhong, *et al.* Methods for improving fiber Bragg grating wavelength measurement precision [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2006, **33**(2): 123-126.
付建伟, 肖立志, 张元中, 等. 提高光纤 Bragg 光栅波长测量准确度的方法[J]. 光电工程, 2006, **33**(2): 123-126.
- [17] CHEN C C, JIN W, DEMOKAN M S. Enhancement of measurement accuracy in fiber Bragg grating sensors by using digital signal processing [J]. *Optics & Laser Technology*, 1999, **31**(4): 299-307.
- [18] LEE H W, PARK H J, LEE J H, *et al.* Accuracy improvement in peak positioning of spectrally distorted fiber Bragg grating sensors by Gaussian curve fitting[J]. *Applied Optics*, 2007, **46**(12): 2205-2208.
- [19] FAN J Y, PAN J Y. A note on the Levenberg-Marquardt parameter [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **207**(2): 351-359.
- [20] WILAMOWSKI B M, HAO Y. Improved computation for levenberg-marquardt training [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, **21**(6): 930-937.
- [21] CHRISTIAN K, NOBUO Y, MASAO F. Levenberg-Marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constrains[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **172**(2): 375-397.