

doi: 10.3788/gzxb20154411.1105001

准直圆孔衍射高斯光束远场发散度

王超^{1,2}, 江伦^{1,2}, 董科研^{1,2}, 安岩^{1,2}, 姜会林^{1,2}

(1 长春理工大学 空间光电技术国家地方联合工程研究中心, 长春 130022)

(2 长春理工大学 空地激光通信技术重点学科实验室, 长春 130022)

摘 要: 将夫琅和费衍射积分中的贝塞尔函数用高斯函数近似, 得到经圆孔径准直光学系统衍射后高斯光束远场发散角的近似解析式. 在不同衍射情况下, 将其与严格夫琅和费衍射积分进行比较, 发现二者求解出的远场发散度接近. 衍射孔径大小相同情况下, 近似解析式与真实值的误差随准直前光束初始束腰的增大而减小; 初始束腰不变的情况下, 随着衍射孔径的增大, 误差值略有上升, 但最终趋于平稳. 在初始束腰半径不小于 $2\ \mu\text{m}$ 的前提下, 误差值最大不超过 3.4%. 该近似解析式在各种衍射情况下都能较为准确地表征准直圆孔衍射高斯光束远场发散度, 且形式简单. 对比不同衍射孔径和光束初始束腰条件下的光束发散度仿真结果可知, 光束发散度随衍射孔径的增大而减小, 随初始束腰的增大而增加.

关键词: 衍射光学; 高斯光束; 近似解析式; 远场发散度; 光束准直

中图分类号: O431.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)11-1105001-6

Far-field Divergence for Collimated Gaussian Beam Diffracted by a Circular Aperture

WANG Chao^{1,2}, JIANG Lun^{1,2}, DONG Ke-yan^{1,2}, AN Yan^{1,2}, JIANG Hui-lin^{1,2}

(1 Chang Chun University of Science and Technology, NUERC of Space and Optoelectronics Technology, Changchun 130022, China)

(2 Chang Chun University of Science and Technology, Fundamental Science on Space-Ground Laser Communication Technology Laboratory, Changchun 130022, China)

Abstract: By the aid of using Gaussian function instead of Bessel function in the Fraunhofer diffraction formula, the simple approximated analytic expression for the far-field divergence angle of Gaussian beam diffracted by a circular-aperture collimation optical system was obtained. For different diffraction conditions, the expression was compared by strict Fraunhofer diffraction expression, and the far-field divergences solved by these two expressions were nearly identical. With the same diffraction aperture, the error between approximated analytic solution and true value is reduced with the increase of the initial beam waist; with the same initial beam waist, the error increases slightly with the rise of the diffraction aperture semi-diameter, and finally flatten out. On condition that the initial waist is not less than $2\ \mu\text{m}$, the maximum of the error is no more than 3.4%. Therefore the approximated analytic expression correctly describes far-field diffraction divergence in every diffraction case, and has handy form. At the same time, through the comparison for the beam divergence in different diffraction aperture diameters and initial beam waists, it can be seen that the beam divergence decreases with the increasing of the circular aperture semi-diameter and increases with the increasing of initial waist.

Key words: Diffraction optics; Gaussian beam; Approximate analytic formula; Far-field divergence; Beam collimation

OCIS Codes: 050.1960; 140.0140; 010.3310

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(No. 91338116)资助

第一作者: 王超(1986-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为光学系统设计与光通信. Email: Nicklo19992009@163.com

收稿日期: 2015-06-10; 录用日期: 2015-09-01

<http://www.photon.ac.cn>

0 引言

卫星半导体激光通信系统中,经过发射天线出射的通信光束散角是一个重要的指标^[1-2].光束发散度越小,其在传输过程中观察平面上的能量扩散越慢,传输损耗越小.因此发射天线在光学层面上被设计为一个准直系统,通过大幅增加激光束的束腰宽度来压缩束散角^[3].如何快捷地求取激光高斯光束经圆孔径光学系统准直衍射后的远场发散度,判别光束质量,并判断其是否满足系统通信需求,是实际应用中备受关注的问题.

高斯光束经准直后成为另一参量不同的高斯光束,其束腰的大小和位置均发生了变化,因此求解高斯光束经准直后的远场发散度变为求解该光束通过有限衍射孔径的发散度.以往研究多通过衍射积分式来求得圆形光阑衍射后的远场复振幅与强度分布,进而求出光束边缘光强为中心强度 $1/e$ 处所对应的发散度^[4-10].该方法准确度高但过程繁琐.研究者为了得到一种更加方便高效的方法进行了大量探索,其中 E. M. Drege 等推导了截断傍轴高斯光束衍射后的束散角近似解析式,但该公式不适用于束腰与衍射光阑具有一定距离的情况^[11].刘宏展等将圆孔函数进行复高斯分解,使得高斯光束衍射积分简化为有限项级数和^[11-13];周国泉等基于能流二阶矩的定义,得到了高斯衍射光束 TE 项和 TM 项远场发散角的有限项级数展开^[14].但这两种方法使用的级数项繁多且形式复杂,对计算过程的简化程度有限.因此,仍需进一步寻找适用范围广、计算方便、精确度高的高斯光束远场发散角解析表达式.

本文借助于数学处理技巧,得到了简洁的圆孔受限准直高斯光束远场发散角的近似解析式,并在强衍射、弱衍射和接近自由传播的条件下,将其与严格的夫琅禾费衍射积分进行了比较.

1 经准直和孔径衍射后高斯光束远场发散角的近似解析式

如图 1,激光器产生的单一基模光束,在实际工程

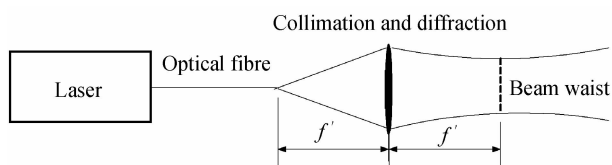


图 1 高斯光束经光学系统准直和衍射示意图

Fig. 1 The schematic diagram of Gaussian beam collimated and diffracted by the optical system

应用中经常耦合进尾纤并输出为一点状光源.尾纤输出模场通常使用高斯分布近似.光纤出射的高斯光束经天线系统准直扩束,同时也受到光学系统有限孔径

的限制而产生衍射,其发散角受到准直和衍射的双重影响.设光纤模场半径为 ω_0 ,准直系统焦距为 f' .初始束腰距光学系统主面距离为 s ,经镜组变换后的光束束腰距主面距离为 s' ,光源波长为 λ ,则 s' 为^[15]

$$s' = f' \frac{s(f' + s) + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2}{(f' + s)^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \quad (1)$$

为了得到更好的准直效果,通常将初始束腰定位于光学系统的前焦面上.此时 $s = -f'$,代入式(1),得到 $s' = f'$,即发生变换后的束腰在系统的后焦面上.此时束腰半径为

$$\omega_0' = f' \frac{\lambda}{\pi\omega_0} \quad (2)$$

因此可将光束在通过准直系统时发生的物理行为看作一高斯光束通过位于光学系统主面的光阑发生衍射,其束腰(准直变换后的)距硬边圆形孔径光阑的距离刚好为光学系统焦距.这与以往计算高斯光束远场发散度时为了简化计算,认为束腰与光阑共面的假设不符.为了得到衍射后的远场发散角,首先给出圆孔受限情况下的远场复振幅分布,即

$$U(r', z) = \frac{\exp(ikz) \exp\left(i \frac{kr'^2}{2z}\right)}{i\lambda z} \times 2\pi \int_0^a U_G(r) J_0\left(\frac{kr'r'}{z}\right) r dr \quad (3)$$

式中, a 为圆孔半径, $U_G(r)$ 为变换后高斯光束复振幅, $k = 2\pi/\lambda$,其余变量含义见图 2. $U_G(r)$ 的具体形式为(只考虑与积分有关的部分)

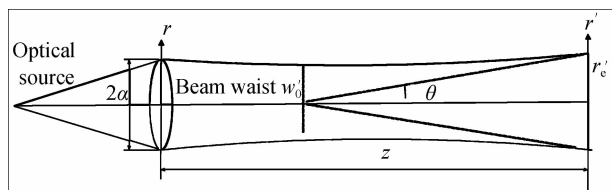


图 2 高斯光束圆孔衍射参量

Fig. 2 Circular aperture diffraction parameters for Gaussian beam

$$U_G(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2}\right) \exp\left(-ik \frac{r^2}{2R}\right) \quad (4)$$

式中

$$\omega = \omega_0' \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda f'}{\pi\omega_0'^2}\right)^2} \quad (5)$$

$$R = f' \left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0'^2}{\lambda f'}\right)^2\right] \quad (6)$$

根据式(3),对于观察屏轴上点,其复振幅解析式为

$$U(0, z) = C \cdot 2 \int_0^a U_G(r) r dr = C \cdot \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{ik}{2R}\right)^{-1} \cdot \left\{1 - \exp\left[-a^2 \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right]\right\} \quad (7)$$

式中, $C = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \pi$, 则 $|C| = \frac{\pi}{\lambda z}$.

高斯光束的发散角定义为光束幅值为最大值的 $1/e$ 点所对应的光场径向距离 r'_e 与光束传播距离 z 的比值^[12]. 即

$$|U(r'_e, z)| = \frac{|U(0, z)|}{e} \quad (8)$$

$$\theta_{\text{div}} = \frac{r'_e}{z} \quad (9)$$

式(3)的精确解析解难以求出, 导致在求取远场发散角时只能进行繁琐的数值积分. 为了解决这一问题, 将对式(3)积分的核函数进行进一步研究. 核函数部分可写为

$$T(r, r', z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left(-ik \frac{r^2}{2R}\right) J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) \quad (10)$$

由于在圆口径满足 $r' \leq r'_e$ 条件下, 零阶贝塞尔函数可以使用高斯函数近似^[11, 13], 即

$$J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) \approx \exp\left(-\frac{r^2}{v(r', z)^2}\right) \quad (11)$$

则式(10)可转换为

$$T(r, r', z) \approx \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left(-ik \frac{r^2}{2R}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{v(r', z)^2}\right) = \exp\left[-\frac{r^2}{u(r', z)^2}\right] \quad (12)$$

式中

$$v(r', z) = Kz/kr' \quad (13)$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} + \frac{1}{v^2} \quad (14)$$

式(13)中, K 为一个需确定的常量. 将式(12)代入式(3)中, 得到

$$U(r', z) = C' \cdot 2 \int_0^a \exp\left[-\frac{r^2}{u(r', z)^2}\right] r dr = C' u^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)\right] \quad (15)$$

式中 $C' = \frac{\exp(ikz) \exp\left(i \frac{kr'^2}{2z}\right)}{i\lambda z} \cdot \pi$, 则 $|C'| = \frac{\pi}{\lambda z}$.

令 $D = \frac{|U(0, z)|}{e \cdot |C'|}$, 则根据式(7), 可得

$$D = \left| \frac{1}{\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R}} \cdot \left\{1 - \exp\left[-a^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right]\right\} \right| / e = \frac{1}{e \left[\frac{1}{w^4} + \frac{k^2}{4R^2}\right]^{1/2}} \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2}{w^2}\right) \cos\left(-\frac{a^2 k}{2R}\right)\right]^2 + \left[\exp\left(-\frac{a^2}{w^2}\right) \sin\left(-\frac{a^2 k}{2R}\right)\right]^2 \right\}^{1/2} \quad (16)$$

对于确定参量的光源与系统, D 是一个常量. 根据式(8)、(15), 有

$$|U(r'_e, z)| = |C'| \cdot \left| \frac{1}{\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} + \frac{1}{v^2}} \right| \times$$

$$\left| \left\{1 - \exp\left[-a^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} + \frac{1}{v^2}\right)\right]\right\} \right| = |C'| \cdot D \quad (17)$$

假设圆孔大小远大于光束束腰大小, 即 $a \gg w$. 则容易得到式(17)等号右面相乘的第三项近似等于 1,

且由推导已知 $|C| = |C'| = \frac{\pi}{\lambda z}$, 则式(17)可简化为

$$\left[\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{v(r'_e)^2}\right)^2 + \frac{k^2}{4R^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{D} \quad (18)$$

将式(13)代入式(18), 得

$$\left\{ \left[\frac{1}{w^2} + \left(\frac{kr'_e}{Kz}\right)^2\right]^2 + \frac{k^2}{4R^2} \right\}^{1/2} = \frac{1}{D} \quad (19)$$

将式(10)代入式(19)并整理, 得

$$\theta_{\text{div}} = \frac{r'_e}{z} = \frac{K}{k} \left\{ \left(\frac{1}{D^2} - \frac{k^2}{4R^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{w^2} \right\}^{1/2} \quad (20)$$

为了求得常量 K 的值, 需要对 θ_{div} 在极端情况下的取值加以考虑. 在光束自由传播的情况下, 认为衍射孔径 a 无限大, 那么将衍射孔径挪至光束束腰处基本不会对计算结果造成影响, 即认为 $w \approx w_0$. 由于发散角是量取无穷远处光束参量计算后获得, 那么无限远处光束波面的曲率半径 R 为无穷大. 基于这两点假设, 式(16)和(20)可简化为

$$D = \frac{w_0^2}{e} \quad (21)$$

$$\theta_{\text{free}} = \frac{K\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{1}{D} - \frac{1}{w_0^2} \right\}^{1/2} \quad (22)$$

将式(21)代入(22), 得到自由传播情况下, 光束传播无穷远距离后的发散程度

$$\theta_{\text{free}} = \frac{K \sqrt{e-1}}{2} \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (23)$$

由于已知自由传播情况下高斯光束在无穷远处孔径角为

$$\theta'_{\text{free}} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (24)$$

比较式(23)、(24), 可得 $K = 2/\sqrt{e-1} \approx 1.5257$. 代入式(20), 即得到了满足远场条件时, 高斯光束经准直系统后的束散角的近似解析式

$$\theta_{\text{div}} = \frac{1.5257}{k} \left\{ \left(\frac{1}{D^2} - \frac{k^2}{4R^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{w^2} \right\}^{1/2} \quad (25)$$

式中 D 、 R 与 w 的值通过对光束参量进行简单的运算即可得到.

式(25)的推导中假设 $a \gg w$. 实际上, 该式是一个一般性的公式, 同样适用于 a 与 w 大小接近, 以及 $w > a$ 的情况.

2 远场发散角数值仿真计算

设光源为光纤出射光, 纤芯数值孔径 NA 为 0.12, 波长为 1 550 μm . 由于光纤定位于准直系统的前焦平面, 因此一旦确定了光学系统的半口径 a , 其焦距也将

被确定,即

$$f' = \frac{a}{NA} \approx 8.33a \quad (26)$$

根据式(2),可求出准直后的束腰 w'_0 . 由式(2)还可得出,扩束后的腰粗与光束准直前的束腰 w_0 成反比. 分别令初始束腰半径为 $2 \mu\text{m}$ 、 $4.5 \mu\text{m}$ 、 $50 \mu\text{m}$,则这三种情况下准直后的 w'_0 与系统口径的关系曲线,如图3.

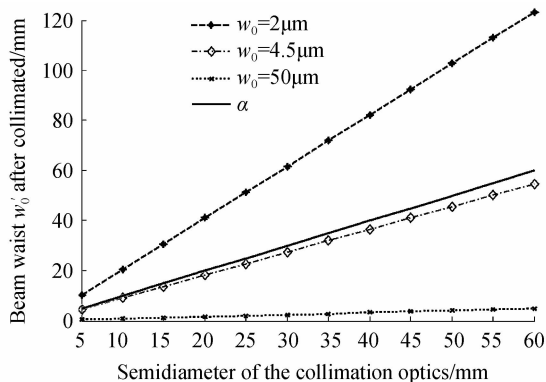
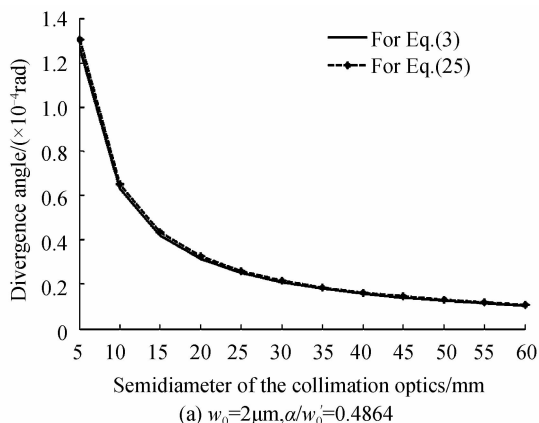


图3 准直后的束腰随系统半口径变化的关系曲线
Fig. 3 The curve of the waists after collimated with semiapertures of the system

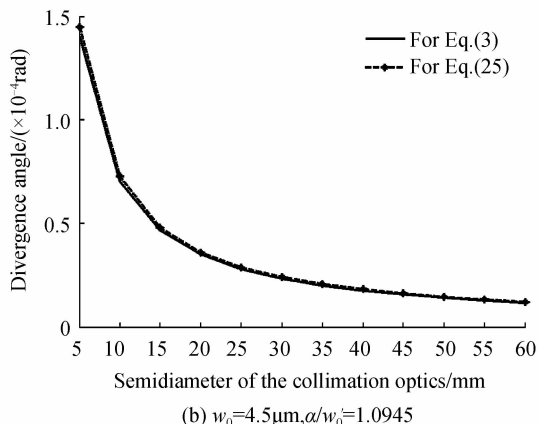
由图3容易得到,准直后的束腰 w'_0 大小与系统半口径 a ,即衍射孔径成正比关系;同时,初始束腰 w_0 越小,准直后腰粗越大,这与式(2)中的表达相一致. 从图3中可以得出,在初始束腰 w_0 为 $2 \mu\text{m}$ 时, $a/w'_0 = 0.4864$, w'_0 的大小为衍射孔径的2倍以上,衍射效应较强; w_0 为 $4.5 \mu\text{m}$ 时, $a/w'_0 = 1.0945$, w'_0 大小与衍射孔径相接近; w_0 为 $50 \mu\text{m}$ 时, $a/w'_0 = 12.1655$, w'_0 远小于衍射孔径,高斯光束接近自由传播. 因此可选择这三种典型情况来检验式(25)与式(3)的相符程度. 通过数值运算,及相应的图形来进行比较. 分析中使用的衍射半口径 a 最大为 60 mm , 光束波长 $\lambda = 1550 \text{ nm}$, 则瑞利距离 $L = ka^2/2 = 7293 \text{ m}^{[12]}$. 选择远场距离 $z = 75000 \text{ m} \gg L$ 来进行仿真,相应结果如图4.

从图4中可以直观地看出,利用式(3)和式(25)计算得出的数据插值形成的曲线吻合得较好. 图5为三种典型情况下,两条曲线的误差值(式(3)所得结果与式(25)所得结果的差值与式(3)结果相除得到的比值). 由图5可见利用式(25)计算的结果的误差随束腰增大而减小. 束腰不变的情况下,随衍射孔径的增大,误差值略有上升, $w_0 = 2 \mu\text{m}$ 时 ($a < w'_0$, 衍射效应较强),孔径半径从 5 mm 变化至 60 mm ,误差从 3.3% 上升至 3.31% ; $w_0 = 4.5 \mu\text{m}$ 时 (a 与 w'_0 相接近),误差从 2.73% 上升至 2.8% ; $w_0 = 50 \mu\text{m}$ 时 ($a \gg w'_0$, 接近自由传播),误差从 0 上升至 0.92% . 初始束腰值越大,

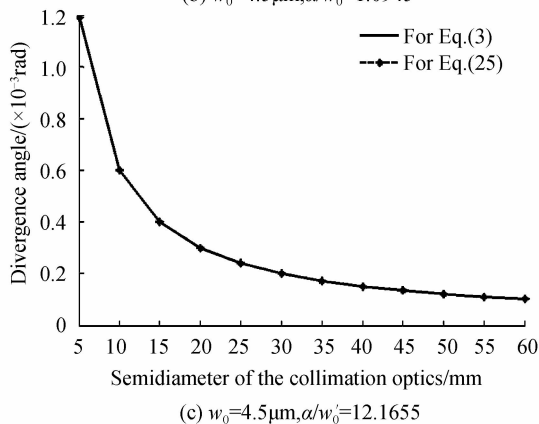
误差平均值越小,但随孔径增大其值上升越快. 对于这三种情况,到衍射孔径半径增大至 60 mm 时,误差值基本趋于稳定. 因此,对于一个圆孔径准直光学天线,当接入该天线的光纤出光的初始束腰半径 w_0 满足 $w_0 \geq 2 \mu\text{m}$ 时,利用式(25)来近似准直后的高斯光束远场发散角,误差不超过 3.4% .



(a) $w_0 = 2 \mu\text{m}$, $a/w'_0 = 0.4864$



(b) $w_0 = 4.5 \mu\text{m}$, $a/w'_0 = 1.0945$



(c) $w_0 = 4.5 \mu\text{m}$, $a/w'_0 = 12.1655$

图4 同一传播距离,光束初始束腰大小不同时,分别利用夫琅禾费衍射积分和近似解析式计算得到的光束远场发散角随衍射孔径变化的关系曲线

Fig. 4 Curves of the far-field divergence angles calculated by Fraunhofer diffraction integration and the approximated analytic expression with the radius of diffraction aperture in the same propagation distance and different initial waist

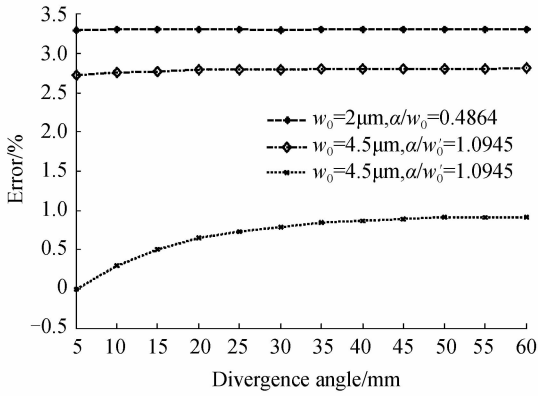


图5 不同初始束腰条件下,衍射积分与近似解析式的误差随衍射孔径大小的变化曲线

Fig. 5 Curves of errors between diffraction integration and approximated analytic expression with radius of diffraction apertures in different initial waist

由图4还可知,远场发散角随衍射孔径的增大而减小,随光束初始束腰的增大而增加。因此为缩小光束发散角,在远距激光通信系统中应尽可能增大发射天线的口径,同时尽量选择初始束腰较细(模场半径小)的光纤。

由于单模光纤模场半径通常为 $4.5\sim 6\mu\text{m}$,多模光纤一般大于等于 $50\mu\text{m}$,均大于 $2\mu\text{m}$,可知分别使用单模和多模光纤作为光通信系统的接入光源,式(25)所得结果的误差分别不超过 3.4% 和 1% ,能够满足工程应用需求。

3 结论

本文对经光学天线准直后,束腰距衍射圆形光阑有一定距离的高斯光束的远场发散度进行了理论研究。通过对夫琅禾费衍射积分核函数进行近似,将繁琐的衍射积分转化为简单的近似解析式。在强衍射、弱衍射和接近自由传播的条件下,将该解析式与严格的远场衍射积分相对照,发现二者求解出的远场发散度数值接近。在初始束腰 w_0 不小于 $2\mu\text{m}$ 的前提下,衍射孔径大小一定时,近似解析式与真实值的误差随准直前的光束初始束腰(光纤模场半径)的增大而减小;初始束腰一定的情况下,误差值随衍射孔径的增大而略有上升,但逐渐趋于平稳,最大不超过 3.4% 。另外,仿真结果表明,远场发散度随衍射孔径的增大而减小,随光束初始束腰的增大而增加,这为实际系统设计提供了理论依据。在各种衍射条件下,近似解析式(25)都能较为准确地表征准直高斯光束远场衍射发散度,且形式简单,可为工程计算提供方便。由于误差值与初始束腰范围有关,实际应用时可针对不同的初始束腰范围对式(25)中的常量 1.5257 进行调整,并针对实际应用中特定的初始束腰大小将其变换为适当的值,以进一步增加该近似式的精确度。

参考文献

- [1] YU Jian-jie, LI Xuan-jiao, TAN Li-ying, et al. Off-axis optical telescope for satellite laser communication terminal[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, **42**(7): 1890-1895. 俞建杰,李宣娇,谭立英,等. 离轴天线在卫星激光通信系统中的应用[J]. *红外与激光工程*, 2012, **42**(7): 1890-1895.
- [2] TONG Shou-feng, JIANG Hui-lin, ZHANG Li-zhong. High data-rate space laser communication system and its application [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, **39**(4): 649-654. 佟首峰,姜会林,张立中. 高速率空间激光通信系统及应用[J]. *红外与激光工程*, 2010, **39**(4): 649-654.
- [3] RAN Ying-hua. Design and analysis of the optical antenna system in space optical communication [D]. Cheng du: University of Electronic Science and Technology. 2006:9-19. 冉英华. 空间光通信中光学天线系统的设计及性能分析[D]. 成都:电子科技大学. 2006:9-19.
- [4] KAUFFMAN J F. The calculated radiation patterns of a truncated Gaussian aperture distribution [C]. IEEE Transaction Antennas Propagation, 1965, AP-13: 473-474.
- [5] WANG Peng, XU Yu-guang, WANG Wei, et al. Analytic expression for Fresnel diffraction[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1998, **15**: 684-688.
- [6] ZHOU Guo-qiang, ZHAO Dao-mu, WANG Shao-min. Characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(1): 22-25. 周国泉,赵道木,王绍民. 平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(1): 22-25.
- [7] ZHOU Guo-quan, NI Yong-zhou, WANG Shao-min. Axial light intensity characteristics of Gaussian beam diffracted by a wavelength-order circular aperture [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2004, **31**(4): 437-440. 周国泉,倪涌舟,王绍民. 高斯光束经波长级圆孔衍射的轴上光强特性[J]. *中国激光*, 2004, **31**(4): 437-440.
- [8] ZHOU Song-qing, GUAN Xiao-wei, QIANG Xi-wen, et al. The near and far field transmission characteristics of high energy laser annular beam[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(10): 1014003. 周松青,关小伟,强希文,等. 高能激光环形光束近场和远场传输特性[J]. *光子学报*, 2014, **43**(10): 1014003.
- [9] WANG Shan-shan, DENG Xiao-jiu, LIU Cai-xia. Propagation characteristics of truncated nonparaxial scalar Gaussian Beams [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(4): 0426003. 王珊珊,邓小玖,刘彩霞. 截断非傍轴标量高斯光束的传输特性[J]. *光子学报*, 2014, **43**(4): 0426003.
- [10] GAO Ming, NAN Wei-na, LÜ Hong, et al. Analysis on influence of the turbulent on polarization properties of elliptically polarized laser beams in propagation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, **42**(9): 1107-1112. 高明,南妮娜,吕宏,等. 湍流对椭圆偏振激光传输中偏振特性的影响分析[J]. *光子学报*, 2013, **42**(9): 1107-1112.
- [11] DREGÉ E M, SKINNER N G, BYRNE D M. Analytical far-field divergence angle of a truncated Gaussian beam [J]. *Applied Optics*, 2000, **39**(27): 4918-4925.
- [12] LIU Hong-zhan, XU Rong-wei, LIU Li-ren, et al. Far-Field approximation and divergence of Gaussian beam with phase aberrations diffracted by a circular aperture[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(1): 131-135. 刘宏展,徐荣伟,刘立人,等. 圆孔受限波差高斯光束的远场近似及发散度分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(1): 131-135.
- [13] LIU Hong-zhan, HUANG Xu-guang. Analysis of far-field

divergence of a Gaussian beam with phase variation under circular aperture diffraction [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(11): 2138-2141.

刘宏展, 黄旭光. 圆孔限制下有相位变化的高斯光束远场发散度的理论分析[J]. 光子学报, 2007, **36**(11): 2138-2141.

[14] ZHOU Guo-quan, CHU Xiu-xiang. Far-field divergent properties of linearly polarized Gaussian beam diffracted at

circular aperture [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2012, **24**(9): 2047-2052.

周国泉, 储修祥. 高斯光束经圆形光阑衍射的远场发散特性[J]. 强激光与粒子束, 2012, **24**(9): 2047-2052.

[15] 郁道银, 谈恒英. 工程光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005, 165-171.