

doi:10.3788/gzxb20144309.0910003

基于可分离全变差模型的图像去噪

胡辽林, 王斌, 薛瑞洋, 王亚萍

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

摘 要: 在传统离散全变差模型的基础上, 利用低维投影思想, 建立了元素可分离的全变差模型; 结合 Frobenius 范数, 根据图像的凸性, 提出利用凸优化方法求解元素可分离的离散全变差问题, 并将其应用于图像去噪. 仿真表明: 对于添加方差为 0.1 的随机噪音的 256×256 图像, 去噪后峰值信噪比可达到 28.5 dB 左右, 并且能有效地保持轮廓和细节, 说明该方法对随机噪音具有良好的去除能力; 通过改变迭代次数可灵活平衡计算速度和准确度以适应不同的去噪要求.

关键词: 图像去噪; 全变差; 可分离; 随机噪音; 凸优化

中图分类号: TP391.4; TP751.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2014)09-0910003-5

Image Denoising Based on Seperable Total Variation Model

HU Liao-lin, WANG Bin, XUE Rui-yang, WANG Ya-ping

(Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Based on traditional discrete total variation model, we established the separable total variation model exploiting low-dimensional projection; Combining with Frobenius norm and the convexity of image, we proposed a method that rooted in convex optimization to solve the separable discrete total variation problem, which can be applied into image denoising. Simulation results show that, with the ability of effectively keeping profile and details, the peak signal to noise ratio of 256×256 size image after denoising can reach 28.5 dB while the variance of random noise is 0.1, thus illustrating the good performance at the removal of random noise. By revising the numbers of iterations, the relationship between speed and accuracy can be balanced with considerable flexibility, thus adjusting to different denoising requirements.

Key words: Image denoising; Total variation; Separable; Random noise; Convex optimization

OCIS Codes: 100.0100; 110.4280; 110.2960; 110.3000; 110.2960

0 引言

图像在获取、存储和传输过程中, 不可避免地受到噪音污染, 需要去噪以改善质量. 当前图像去噪方法主要分为传统信号处理方法, 如邻域滤波、中值滤波等, 此类方法原理简单, 但效果有限; 小波变换法^[1-4], 具有强大的时频定位功能, 目前应用最广, 但缺乏平移不变性, 去噪过程中会产生伪吉布斯现象, 导致图像失真; 多尺度几何分析法 (Multiscale Geometric Analysis, MGA), 包括脊波 (Ridgelet) 变换^[5]、单尺度脊波 (Monoscale ridgelet) 变换^[6]、曲波 (Curvelet) 变换^[7,8]、剪切波 (Shearlet) 变换^[9]、Contourlet 变换^[10]、Bandelet

变换、Beamlet 变换、Wedgelet 变换、Brushlet 变换等. MGA 继承了小波类方法的局部时频分析能力, 具有比小波变换更强的方向选择和辨识能力, 但也缺乏平移不变性, 同样会产生伪吉布斯现象; 维纳滤波法^[11-12], 该方法的滤波效果比均值滤波好, 但计算量很大, 处理速度较慢; 偏微分方程法, 该方法能够克服线性滤波存在的边缘模糊和位移等缺点.

由于图像信息具有凸性和离散性, 本文试图在传统全变差模型基础上, 建立元素可分离的全变差模型, 并利用凸优化中梯度投影算法探索一种具有较高峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 的灵活去噪方法. 研究表明该方法特别适合处理随机噪音, 能完全

基金项目: 陕西省自然科学基金 (No. 2014JM7273) 资助

第一作者: 胡辽林 (1968-), 男, 副教授, 主要研究方向为传感技术与信号处理. Email: huliaolin@163.com

通讯作者: 王斌 (1989-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为信号与图像处理. Email: 454288852@qq.com

收稿日期: 2013-12-30; 录用日期: 2014-03-06

<http://www.photon.ac.cn>

去除图像低频处噪声,并较好地保留高频轮廓和细节.

1 可分离的全变差模型

含噪声图像模型可表示为

$$\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{b} \quad (1)$$

式中,矩阵 \mathbf{x} 表示无噪声图像, \mathbf{w} 表示噪声, \mathbf{b} 表示受到噪声污染的图像.

1.1 全变差模型

图像去噪全变差模型为^[13]

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \\ \text{subject to } \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 为 \mathbf{x} 的全变差范数,物理意义是 x, y 两个方向上相邻像素的灰度差的总和,

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \|\mathbf{B}_{ij}\mathbf{x}\|_2, \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i+1,j} - x_{i,j} \\ x_{i,j+1} - x_{i,j} \end{bmatrix}.$$

由于图像信息具有冗余性,无噪声图像的 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 非常小,有噪声时就变得很大^[4],尤其含白噪声时.式(2)中

$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 的最小化表示降低噪声. $\|\mathbf{x}\|_{\text{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_{i,j}^2}$ 为 \mathbf{x} 的 Frobenius 范数,即 F-范数. $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 \leq \epsilon$ 表征了原图像与噪声图像的能量相似程度,根据优化理论,式(2)可转化为一个无约束问题,即

$$\min \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \quad (3)$$

式中, λ 为拉格朗日乘子,表示求解过程中对 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 或 $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2$ 的重视程度.如果 λ 较大,表示重视噪声的去除,恢复后的图像保真度就较差; λ 较小,表示重视保真度,去噪效果就会差一些. λ 的具体值与原始图像有关,其准确值的计算非常复杂耗时,通常无法得到,但是 λ 的取值范围并不大,所以其估计值较易得到,令 σ^2 为 \mathbf{b} 的归一化方差,通常取 $\lambda \approx \sigma^2$. 针对不同的图像, λ 的取值需要通过实验确定.

假设噪声图像的尺寸为 $n_1 \times n_2$. 为了减少运算量,将灰度值由 $[0, 255]$ 归一化为 $[0, 1]$, 对式(3)加约束条件,即

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \\ \text{subject to } \mathbf{x} = \{x_{i,j}, 0 \leq x_{i,j} \leq 1\} \end{aligned} \quad (4)$$

全变差范数有多种形式,本文采用各向同性全变差范数 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1}$, 即

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2} + \sum_{i=1}^{n_1-1} |x_{i,n_2} - x_{i+1,n_2}| + \sum_{j=1}^{n_2-1} |x_{n_1,j} - x_{n_1,j+1}| \quad (5)$$

1.2 元素可分离的全变差模型

为了求解式(4), $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1}$ 应像 $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2$ 一样可分离,即将 $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ 和 $x_{i,j} - x_{i,j+1}$ 由双变量变为单变量,且去掉根号.为此,引入新集合 \mathfrak{R} , \mathfrak{R} 的元素由矩阵 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 组成,即 $(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{p} \in R^{(n_1-1) \times n_2}, \mathbf{q} \in R^{n_1 \times (n_2-1)}$, 且满足

$$\begin{cases} |p_{i,n_2}| \leq 1 \\ |q_{n_1,j}| \leq 1, 1 \leq i \leq n_1-1, 1 \leq j \leq n_2-1 \\ p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2 \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

边界条件为 $p_{0,j} = p_{n_1,j} = q_{i,0} = q_{i,n_2} = 0$. 针对 $n_1 \times n_2$ 的原始图像,定义线性算子 ψ

$$\begin{aligned} (\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))_{i,j} = p_{i,j} - p_{i-1,j} + q_{i,j} - q_{i,j-1} \\ 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)定义了 ψ 的投影指向 $n_1 \times n_2$ 的图像空间,根据文献^[15],它的伴随算子 ψ^* 则是从图像空间投影到 (\mathbf{p}, \mathbf{q}) 空间^[15],伴随算子为

$$\psi^*(x_{i,j}) = (p_{i,j}, q_{i,j}) \quad (8)$$

式中

$$p_{i,j} = x_{i,j} - x_{i+1,j}, 1 \leq i \leq n_1-1, 1 \leq j \leq n_2 \quad (9)$$

$$q_{i,j} = x_{i,j} - x_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2-1 \quad (10)$$

式(8)说明在图像空间中任一像素 $x_{i,j}$, 可通过 $\psi^*(\mathbf{x})$ 得到它在 (\mathbf{p}, \mathbf{q}) 空间下的原象 $(p_{i,j}, q_{i,j})$, $p_{i,j}$ 和 $q_{i,j}$ 就是 $x_{i,j}$ 在两个方向上的差分. 通过这种投影,可将 $x_{i,j}$ 在两个方向上的差分 $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ 和 $x_{i,j} - x_{i,j+1}$ 转为单变量 $p_{i,j}$ 和 $q_{i,j}$.

根据范数性质,实数的 L_2 和 L_1 范数可等价

$$\begin{aligned} \sqrt{z^2 + y^2} = \max\{p_1 z + p_2 y : p_1^2 + p_2^2 \leq 1\} \\ |z| = \max\{p z : |p| \leq 1\} \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)类推式(5), $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1}$ 可写成

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1} = \max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \psi} \text{T}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{T}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} [p_{i,j}(x_{i,j} - x_{i+1,j}) + q_{i,j}(x_{i,j} - \\ x_{i,j+1})] + \sum_{i=1}^{n_1-1} p_{i,n_2}(x_{i,n_2} - x_{i+1,n_2}) + \sum_{j=1}^{n_2-1} q_{n_1,j}(x_{n_1,j} - \\ x_{n_1,j+1}) \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $\text{T}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{Tr}(\psi^{\text{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x})$, Tr 表示矩阵的迹, $\psi^{\text{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 是 $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 的转置. 于是式(4)可写成

$$\min_{x_{i,j} \in [0,1]} \max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}} \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \text{Tr}[\psi^{\text{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}] \} \quad (14)$$

这样就将 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}_1}$ 中的开根转为求最大值问题.

对于一个既有求最大值、也有求最小值的问题,如果目标函数对求最小值的变量是凸函数,对求最大值的变量是凹函数,则求最大值和求最小值可以对调^[16]. 式(14)中, $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2$ 是凸函数, $2\lambda \cdot \text{Tr}[\psi^{\text{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}]$ 是线性函数,可视为凹函数,满足上述条件,调换次序得

$$\max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}} \min_{x_{i,j} \in [0,1]} \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\text{F}}^2 + 2\lambda \text{Tr}[\psi^{\text{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{x}] \} \quad (15)$$

利用迹的性质,式(15)可改写为

$$\begin{aligned} \max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}} \min_{x_{i,j} \in [0,1]} \{ \|\mathbf{x} - (\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\|_{\text{F}}^2 - \|\mathbf{b} - \\ \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})\|_{\text{F}}^2 \} \end{aligned} \quad (16)$$

显然,式(16)可以分解为 $n_1 \times n_2$ 个子问题的集合,每一个子问题为

$$\max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n_1} \times [0, 1]} \min \left\{ \|\mathbf{x}_{i,j} - (\mathbf{b}_{i,j} - \lambda(\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))_{i,j})\|_F^2 - \|\mathbf{b}_{i,j} - \lambda(\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))_{i,j}\|_F^2 + \|\mathbf{b}_{i,j}\|_F^2 \right\} \quad (17)$$

这就实现了全变差范数的不同元素的分离. 通过求解式(16)的子式(17), 再将其解组成矩阵, 即可得到 \mathbf{x} .

2 可分离全变差模型解与复杂度分析

式(16)中只有第一项含 \mathbf{x} , 先做以 \mathbf{x} 为变量的最小化得

$$\mathbf{x} = P_{B_{\cdot,1}}(\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \quad (18)$$

式中, $P_{B_{\cdot,1}}$ 表示当解出的 \mathbf{x} 中有元素值小于 0 时, 将该元素置 0; 元素值大于 1 时, 将其置 1. 由于 $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 值在式(18)中不能确定, 需要将式(18)代回式(16), 使式(16)变成一个自变量只含 $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 的最大化问题, 即

$$\max_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}} \left\{ \|P_{B_{\cdot,1}}(\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})) - (\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\|_F^2 - \|\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})\|_F^2 \right\} \quad (19)$$

利用对偶优化理论, 将式(18)转化为一个最小化问题, 然后利用文献[18]中的一阶梯度下降法即可求解, 其解为

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = P_{\mathfrak{R}} \left\{ (\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1}) + \frac{1}{8\lambda} \psi^T(P_{B_{\cdot,1}}[\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1})]) \right\} \quad (20)$$

式中, $P_{\mathfrak{R}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{(n_1-1) \times n_2}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n_1 \times (n_2-1)}$

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{p_{i,j}}{\max\{1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2}\}}, & \mathbf{p} \text{ 非边界处} \\ \frac{p_{i,j}}{\max\{1, |p_{i,j}|\}}, & \mathbf{p} \text{ 边界处} \end{cases} \quad (21)$$

$$v_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{\max\{1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2}\}}, & \mathbf{q} \text{ 非边界处} \\ \frac{q_{i,j}}{\max\{1, |q_{i,j}|\}}, & \mathbf{q} \text{ 边界处} \end{cases} \quad (22)$$

结合式(21)和式(22)对式(20)反复迭代, 迭代一定次数后, 可得到稳定解, 将稳定后的 $(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)$ 代入 $\mathbf{x} = P_{B_{\cdot,1}}(\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k))$, 就得到去噪后的图像.

2.1 复杂度分析

由于求解式(18)采用一阶梯度下降算法, 设 \mathbf{x}_k 算

法迭代 k 次得到的解, \mathbf{x}^* 为最优解, 并设 $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_F^2 + 2\lambda \|\mathbf{x}\|_{TV}$, 即式(4)中需要最小化的部分, 利用文献[17]中定理 3.1 的证明有

$$F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{L \|\mathbf{b} - \mathbf{x}^*\|_2^2}{2k} \quad (23)$$

\mathbf{b} 与 \mathbf{x}^* 均为定值, k 为迭代次数, L 为一常量. 式(23)说明算法的收敛速度为线性, 故其时间复杂度为 $O(1/k)$.

2.2 算法流程

算法流程如下:

输入: 含噪音图像 \mathbf{b} , 拉格朗日乘子 λ , 迭代数 $k-1$;

步骤 1: 取 $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (0_{(n_1-1) \times n_2}, 0_{n_1 \times (n_2-1)})$;

步骤 2: 计算式(20);

步骤 m ($2 < m \leq k-1$): 重复步骤 2 至 $k-1$ 次;

步骤 k : 计算 $\mathbf{x} = P_{B_{\cdot,1}}(\mathbf{b} - \lambda\psi(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k))$, 得到去噪后的图像.

3 仿真及分析

仿真采用 256×256 的标准 lena 和 cameraman 图像, 输入拉格朗日乘子 $\lambda = 0.1$, 迭代次数 $k = 200$. 由于全变差模型最适合去除随机噪音, 所以向原始图像加入均值为 0, 归一化方差为 0.1 的高斯随机噪音.

图 1 和图 2 分别为 256×256 lena 和 cameraman 图像的去噪效果, 图 3 为 lena (1024×1024) 原始图像和去噪后图像局部细节对比. 从中可以看出, 加噪图像的 PSNR 约为 20 dB, 经过 200 次迭代后, lena 和 cameraman 的 PSNR 分别提高到 28.46 dB 和 27.80 dB 左右. 对比其它方法, 对于 512×512 的 lena 图像, 小波类方法^[1,4,11]的 PSNR 在 27 到 29 之间, Curvelet 类方法^[7-8]、Shearlet 类方法^[9]、Ridgelet 类方法^[5-6]、Contourlet 类方法^[10]的 PSNR 在 29.2 到 29.7 之间, 本文方法为 29.91 dB. 这说明本方法的去噪效果要好于当前比较流行的一些方法. 并且, 图像低频处噪音去除得非常干净, 高频处轮廓也得到了较好的保留. 需要指出, 虽然经过 200 次迭代后, PSNR 已经趋向不变了, 但实际上 PSNR 仍在非常缓慢地增加, 通常迭代次数达到 50 次就能满足基本要求了.



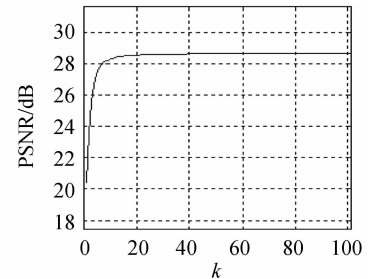
(a) Original image



(b) Noise contaminated image



(c) Denoised image



(d) PSNR vs. iteration numbers

图 1 lena 去噪效果(噪音方差=0.1, $\lambda=0.1$)

Fig. 1 Denoising result of lena(noise variance=0.1, $\lambda=0.1$)

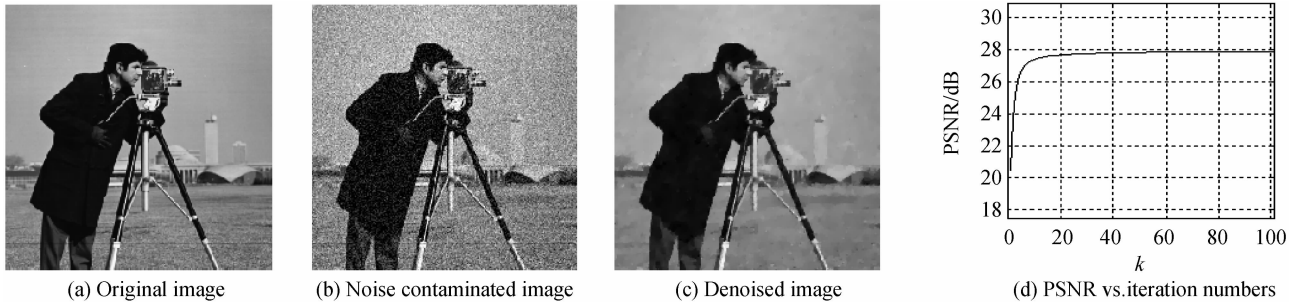
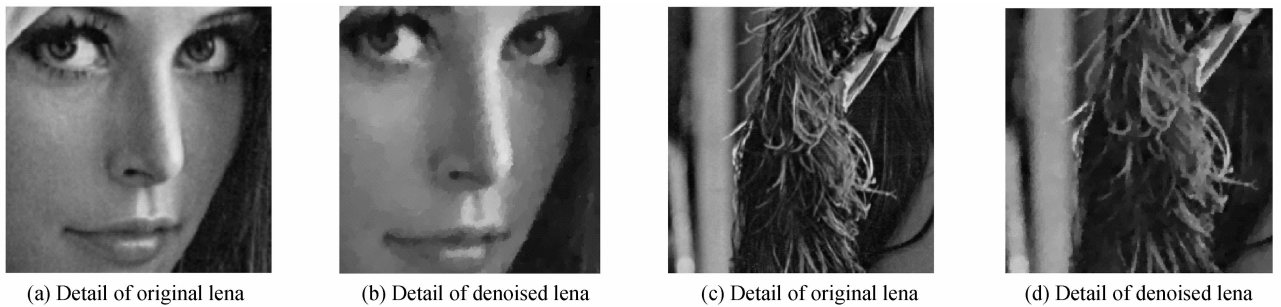
图2 cameraman 去噪效果(随机噪音方差=0.1, $\lambda=0.1$)Fig. 2 Denoising result of cameraman(noise variance=0.1, $\lambda=0.1$)

图3 lena(1 024×1 024)细节对比

Fig. 3 Detail contrast of lena(1 024×1 024)

表1和表2分别为不同随机噪音方差和迭代次数时的PSNR.可以看出,迭代次数小于200时,PSNR的增长比较明显;迭代次数大于200后,PSNR的增长非常缓慢,通常做200次迭代就可获得较理想的PSNR.

表1 不同方差和迭代次数下 lena 的 PSNR

Table 1 PSNR viariation of lena

	100	150	200	250	300
0.090	28.72	28.74	28.75	28.75	28.75
0.095	28.60	28.61	28.62	28.62	28.63
0.100	28.42	28.45	28.46	28.46	28.46
0.105	28.26	28.27	28.28	28.28	28.28
0.110	28.03	28.04	28.05	28.06	28.06

表2 不同方差和迭代次数下 cameraman 的 PSNR

Table 2 PSNR viariation of cameraman

	100	150	200	250	300
0.090	28.02	28.04	28.05	28.05	28.05
0.095	27.86	27.87	27.88	27.88	27.88
0.100	27.77	27.78	27.80	27.81	27.81
0.105	27.67	27.68	27.69	27.69	27.70
0.110	27.55	27.57	27.58	27.59	27.59

4 结论

本文提出了一种基于元素可分离全变差模型的图像去噪方法.研究表明该方法能够很好地去掉图像中的随机噪音,有效地保留细节和纹理,可通过改变迭代次数 k 来调整计算速度和准确度, k 较大时计算速度较慢但PSNR较高, k 较小时计算速度较快但PSNR稍低.对于速度要求高而准确度要求稍低的场合,可选择

较少的迭代次数;对于速度要求低而准确度要求高的场合,可选择较多的迭代次数.通常要求迭代次数至少大于50次.但是该算法的迭代次数相对较多,总体速度不快,下一步工作是改进算法,提高算法速度,进一步提高去噪能力,并将其应用于更广泛的场合.

参考文献

- [1] ZHENG De-zhong, CUI Fa-yi. New algorithm for image denoising using node threshold wavelet packet transform[J]. *Optical Technique*, 2009, **35**(3): 330-333.
郑德钟, 崔法毅. 结点阈值小波包变换图像去噪新算法[J]. *光学技术*, 2009, **35**(3): 330-333.
- [2] CAO Jian-zhong, ZHOU Zuo-feng, TANG Yao, *et al.* Image denoising algorithm based on bilateral filtering and dual-tree complex wavelet[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1712-1715.
曹剑中, 周祚峰, 唐焱, 等. 基于双边滤波和双树复小波的图像去噪算法[J]. *光子学报*, 2010, **39**(9): 1712-1715.
- [3] LI Wan-gao, ZHAO Xue-mei. Multi-wavelet image denoising based on artificial bee colony algorithm [J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunication (Natural Science Edition)*, 2013, **25**(4): 532-537.
李万高, 赵雪梅. 基于蜂群算法的多小波图像去噪研究[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2013, **25**(4): 532-537.
- [4] CHEN Fang-han, WANG Wen-sheng, YANG Kun, *et al.* Detection and recognition of infrared target based on the multiwavelet transform[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(2): 295-299.
陈方涵, 王文生, 杨坤, 等. 基于多小波变换的红外目标探测与识别[J]. *光子学报*, 2011, **40**(2): 295-299.
- [5] SHU Yuan-yang, WANG Min, LIN Fang-zhao, *et al.* Image noise reduction via geometric multi-scale ridgelet support vector transform and dictionary learning [J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2013, **22**(11): 4161-4169.
- [6] LU Cheng-wu, SONG Yi-mei, SONG Guo-xiang. Nonlinear

- approximation of image based on monoscale orthonormal ridgelets frame [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2007, **18**(4): 806-810.
- [7] GUO Hui-na, CHENG Feng-min, MENG Ming-chuan. A method based on curvelet transform for color image denoising [C]. 2011 International Conference on Electrical and Control Engineering(ICECE), 2011: 2847-2849.
- [8] DEVARAPU K V, MURALA S, KUMAR V. Denoising of ultrasound images using curvelet transform[C]. 2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering(ICCAE), 2010, **3**: 447-451.
- [9] LU Ya-ning, GUO Lei, LI Hui-hui. Total variation based band-limited shearlets transform for image denoising[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, **42**(12): 1430-1435.
路雅宁, 郭雷, 李晖晖. 带限剪切波变换与全变差结合的图像去噪[J]. *光子学报*, 2013, **42**(12): 1430-1435.
- [10] ZENG You-wei, YANG Hui-xian, TANG Fei, *et al.* Improved image denoising algorithm of contourlet transform based on gray relational degree [J]. *Journal of Computer Applications*, 2013, **33**(4): 1103-1107.
曾友伟, 杨恢先, 唐飞, 等. 基于灰度关联度改进的Contourlet变换图像去噪算法[J]. *计算机应用*, 2013, **33**(4):1103-1107.
- [11] ZHAO Zhi-peng, CEN Yi-gang, CHEN Xiao-fang. Sparse representation of signals based on wavelet domain Wiener filtering[J]. *Journal of Applied Sciences*, 2012, **30**(6): 595-600.
赵志鹏, 岑翼刚, 陈晓方. 基于小波域维纳滤波器的信号稀疏表示[J]. *应用科学学报*, 2012, **30**(6): 595-600.
- [12] YI San-li, HE Jian-feng. Image denoising method based on BEMD and adaptive Wiener filter[J]. *Computer Engineering and Application*, 2013, **49**(10): 156-158.
- [13] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, **60**: 259-268.
- [14] ELAD M. Sparse and redundant representation [M]. *Springer Science+Business Media*, 2010.
- [15] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and application[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, **20**: 89-97.
- [16] ROCKAFELLAR R. Convex analysis[M]. World Publishing Corporation, 2011.
- [17] BECK A, TEBOLLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2009, **2**(1): 183-202.