

doi: 10.3788/gzxb20144305.0506002

# 分数阶傅里叶变换结合高峰均比抑制算法对 CO-OFDM 系统的影响分析

童峥嵘, 刘畅, 曹晔, 张卫华

(天津理工大学 薄膜电子与通信器件重点实验室, 天津 300384)

**摘 要:** 针对相干光正交频分复用系统中出现的高峰值平均功率比问题, 提出分数阶傅里叶变换与高峰值平均功率比抑制算法相结合的方法. 计算表明: 随着分数阶傅里叶变换阶数的减小, 信号的峰值平均功率比逐渐降低; 与抑制算法结合后可进一步降低系统的峰值平均功率比, 并解决抑制算法影响系统性能的问题. 从结合的兼容性、抑制高峰值平均功率比效果及改善引入抑制算法后对系统的负面影响三方面进行仿真分析, 结果表明: 采用选择性映射算法与分数阶傅里叶变换结合后, 旋转因子同为 4 时, 峰值平均功率比高于 6.6 dB 的概率较单一选择性映射算法低  $10^4$ ; 选取高峰值平均功率比抑制情况相近时, 结合算法的时间复杂度比单一选择性映射算法降低了 8 倍; 采用限幅算法与分数阶傅里叶变换结合的仿真情况也较单一限幅算法有很大提高, 表明该算法结合的兼容性良好.

**关键词:** 光正交频分复用; 分数阶傅里叶变换; 峰均功率比抑制算法

中图分类号: TN913.7

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2014)05-0506002-6

## Analysis of the Impact of FRFT Combined with PAPR Reducing Algorithm in CO-OFDM System

TONG Zheng-rong, LIU Chang, CAO Ye, ZHANG Wei-hua

(Key Laboratory of Film Electronics and Communication Devices, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

**Abstract:** Due to the high peak to average power ratio in coherent optical orthogonal frequency division multiplexing system, fractional Fourier transform combined with peak to average power ratio reduction algorithm was proposed. With the decrease of fractional Fourier transform order, the peak to average power ratio of signal is reduced. Fractional Fourier transform combined with the reduction algorithm can reduce the peak to average power ratio further, and improve the degradation of transmission performance caused by the reduction algorithm. The simulation analyses have three aspects including compatibility of the combination, inhibition effect of peak to average power ratio and improvement of the negative effects in the reduction algorithm. The results show that the probability of the selective mapping algorithm combined with fractional Fourier transform is  $10^4$  less than that of the single selective mapping algorithm when the rotation factor is 4 and the peak to average power ratio is higher than 6.6 dB. When the same degree of inhibition of peak to average power ratio is chosen, the time complexity of the combined algorithm decrease by 8 times than single algorithm. The simulation results using clipping algorithm combined with fractional Fourier transform have great improvement than single algorithm, which shows combined algorithm has good performance of compatibility.

**Key words:** Optical Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OOFDM); Fractional Fourier transform; Peak to average power ratio

**OCIS Codes:** 060.0060; 060.4510; 060.1660

基金项目: 国家高技术研究发展计划(No. 2013AA014201)和天津市自然科学基金(Nos. 11JCYBJC00100, 13JCQNJC01800)资助

第一作者: 童峥嵘(1971-), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为光纤通信. Email: zhrong@sohu.com

通讯作者: 刘畅(1987-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为光纤通信. Email: k\_ings3323@126.com

收稿日期: 2013-08-19; 录用日期: 2013-10-10

<http://www.photon.ac.cn>

## 0 引言

光正交频分复用(Optical Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OOFDM)技术凭借其长距离超高速数据传输的优势,引起了人们的关注<sup>[1]</sup>. OOFDM具有对光纤传输损伤的鲁棒性,如色度色散(Chromatic Dispersion, CD)和偏振模色散(Polarization Mode Dispersion, PMD)<sup>[2]</sup>. 按照信号的接收检测方式通常可分为直接检测光 OFDM(Direct Detection Optical-OFDM, DDO-OFDM)和相干光 OFDM(Coherent Optical-OFDM, CO-OFDM). 其中, CO-OFDM 系统由于其优秀的传输性能在下一代长距离光通信系统中更具吸引力.

一般情况下,所有基于 OFDM 的系统有一个共同的缺点,就是潜在的高峰值平均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR). 当大量的子载波调制信号叠加时,会有一些概率使叠加后的信号产生很高的峰值功率,这将破坏子载波之间的正交性. 高 PAPR 对 CO-OFDM 系统的影响主要在 A/D、D/A 转换器和马赫-曾德尔调制器(Mach-Zehnder Modulator, MZM)等器件,随着 PAPR 的增大,将会增加 A/D、D/A 转换器的复杂度,降低 MZM 的功率效率<sup>[3]</sup>. 由于光 OFDM 系统的光功率放大器响应时间缓慢,对输入信号功率能保持理想线性关系,因此光 OFDM 系统中并不存在无线 OFDM 系统中高 PAPR 对放大器的影响<sup>[4]</sup>.

文献[5-8]提出三类技术以减少这一因素对系统的影响,第一类是基于编码的技术,通过传输 PAPR 较小的码型来达到抑制 PAPR 的目的,效果明显;第二类是限幅类技术,通过增加一个额外的信号来降低峰均值;第三类是概率类技术,通过加入旋转因子打乱子载波的一致性来降低 PAPR 出现的概率.

但是这些算法在抑制 PAPR 的同时会对系统其他方面产生影响. 如编码类算法适应性较低,对系统子载波个数以及调制方式等都有很高要求,这就限制了系统的扩展能力;限幅类算法会对信号造成失真,影响系统的误码性能;概率类算法中的选择性会给系统带来很高的复杂度. 因此,研究人员开始尝试两种算法的结合以实现优势互补<sup>[9-11]</sup>,但本文通过研究发现,这类结合算法相比单一算法无论从 PAPR 抑制程度方面还是系统性能改善方面都不会有很大提升.

分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FRFT)是傅里叶变换(Fourier Transform, FT)的广义形式,因此用 FRFT 来取代 OOFDM 系统中的快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)并不会对系统产生负面影响. 本文结合 FRFT 对传统抑制 PAPR 算法进行了研究,从系统传输性能的提高和抑制高 PAPR 两方面分析了 FRFT 的优势.

## 1 一般结合算法局限性分析

文献[9]提出限幅算法和选择性映射(Selected Mapping, SLM)算法的结合,首先采用限幅算法抑制 PAPR,然后经过 SLM 对系统的误码率进行改善,结果显示结合算法的误码率性能相比单一限幅算法有一定提高. 但文献[9]并未考虑 SLM 算法给系统带来很高的复杂度,会影响系统的响应时间. 因此,该文献的结合算法相当于牺牲系统的复杂度换取误码率性能的改善. 而在抑制 PAPR 的性能上,由文献[9]的 CCDF 曲线可以看出单一算法同结合算法并未有太大差别. 这主要是由于该结合算法中,SLM 算法只能降低 PAPR 出现概率,并不能完全抑制 PAPR,因此对抑制 PAPR 起主导作用的是限幅算法.

分析可知:首先,这类结合算法一般是用算法 A 对系统造成的影响来替代算法 B 的影响,但并不能完全消除 B 的影响,同时又引入了 A 算法的影响,这样可能会给系统带来更大的负面作用. 其次,两种算法对 PAPR 的抑制作用有主次之分,一般用来改善系统性能的算法在结合算法中对 PAPR 抑制效果较差,如文献[9]中的 SLM 算法以及文献[10]中的编码等等.

## 2 FRFT

FRFT 可以看作是傅里叶变换的推广<sup>[12]</sup>,其计算复杂度与 FT 相当,在系统中对信号做调制,不会对系统的误码率等因素造成影响. 因此,FRFT 在 CO-OFDM 系统中可以看作是一种无伤模块.

信号  $x(t)$  的分数阶傅里叶变换定义为

$$X_p(u) = F_p\{x(t)\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) K_p(t, u) dt \quad (1)$$

式中,  $p$  是 FRFT 的阶数,  $\alpha = p \cdot \pi/2$  是 FRFT 角,即完成一次 FRFT 所对应的时频平面旋转角度,  $K_p(t, u)$  为 FRFT 的变换核心,即

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot(p\pi/2)}{2\pi}} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2}\right) \cdot \\ \cot(p\pi/2) - j u t \csc(p\pi/2) & p\pi/2 \neq n\pi \\ \delta(t - u) & p\pi/2 = 2n\pi \\ \delta(t + u) & p\pi/2 = (2n - 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

FRFT 可以认为是信号在直角坐标系中一条过原点直线上的投影,这样就与时间轴形成了一个角度,这个角度被称作分数阶傅里叶变换角<sup>[13]</sup>. 从式(2)可以看出,该角度是任意的,并不唯一. 每进行一次傅里叶变换,对应于时频平面上  $90^\circ$  的角度变换(相当于 FRFT 阶数  $p=1$  时),将  $p=1$  带入式(1)可得

$$F_1(x) = X_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi u t} x(t) dt \quad (3)$$

可以看出,式(3)为傅里叶变换的定义式,该角度在傅里叶变换域为固定值.因此,可以采用 FRFT 代替 FT 研究阶数不等于 1 时的情况.

随着 FRFT 阶数的降低,系统的 PAPR 性能逐渐提高.这是因为 PAPR 为信号峰值功率与均值功率的比值.根据 Martone 提出的基于 FRFT 的多载波系统可知信号的均值功率不会随 FRFT 阶数的变化而变化<sup>[14]</sup>.由于 FRFT 的谱线随着阶数的变化保持连续变化<sup>[15]</sup>,因此,当阶数逐渐趋于 0 时,经过 IFRFT 后的时域波形就逐渐趋近于其频谱曲线.由于 OFDM 信号子载波间保持正交,各子载波的频谱叠加不会产生如时域波形叠加后的高峰值.因此,理论上阶数越小时,信

号叠加后产生的峰值功率越小.这样,基于 FRFT 的 OFDM 信号其均值功率恒定,而峰值功率会随 FRFT 阶数的降低而降低,因此,采用 FRFT 结构的 OFDM 系统 PAPR 较 FFT 要小.

### 3 仿真

系统框图如图 1.该系统由 5 部分组成:电域的 OFDM 信号发射机和接收机,光域的电光转换、光电转换以及光路.从图 1 可以看出,IFFT/FFT 调制解调模块分别位于发射机和接收机上,采用 FRFT 后这两部分分别变成 IFRFT 和 FRFT.

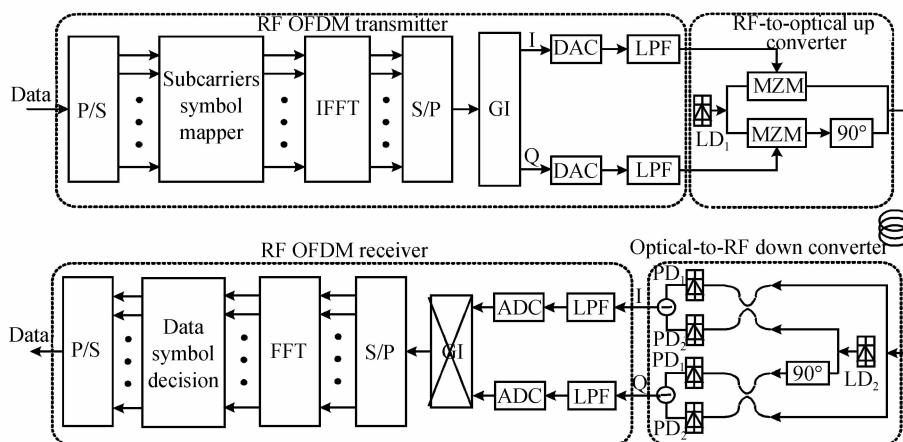


图 1 CO-OFDM 系统框图

Fig. 1 The CO-OFDM system based on FRFT module

仿真实验中,采用 QAM 调制方式,子载波数为 128,采样率为 8 倍,单位时间长度为 0.1 ns.取循环前缀 CP=16,完整 OFDM 符号长度为 144,即符号周期为 14.4 ns,其中 CP 为 1.6 ns.射频的低通滤波器用来滤除经过 DAC 后产生的判决误差噪声,其截止频率为 2.5 GHz.射频 OFDM 信号总长为 249 984.光源采用发送功率为 -5 dBm 的连续波激光器,两个激光器的中心频率均为 193.1 THz,线宽 100 kHz.光纤采用 1 550 nm 的单模光纤,色散常量为 16 ps/nm/km,光纤长度为 5×80 km.

一般通过互补累积分布函数(Complementary Cumulative Distribution Function, CCDF)来衡量一个 OFDM 系统的 PAPR 指标.在基于 FRFT 的 CO-OFDM 系统中,可以通过观察经过 MZM 调制后的光时域波形图来考察信号 PAPR 的情况.

由于抑制 PAPR 的算法众多,这里仅选择了两种算法做结合,即 SLM 算法和限幅算法.这两种算法属于两类不同算法,在原理、抑制效果以及对系统的影响方面都完全不同.在仿真中,采用两个极端的方式来分析结合算法对系统的最大作用,即不额外引入负面影响的前提下分析结合算法的 PAPR 抑制能力以及不提

升算法的 PAPR 抑制能力的前提下分析结合算法对引入的负面影响的改善.

#### 3.1 SLM 算法结合 FRFT

SLM 结合 FRFT 的仿真分析中,首先对 FRFT 的有效性进行分析.选择 FRFT 的阶数  $p=0.001$ ,SLM 的旋转因子个数  $D=4$ .仿真结果如图 2.

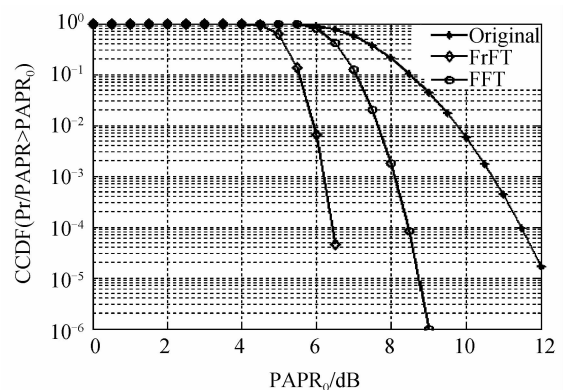


图 2 基于 SLM 算法下 FRFT 与 FFT 降低 PAPR 对比图

Fig. 2 The comparison of FRFT and FFT based on SLM algorithm

由图 2 可以看出,FRFT 在 FFT 的基础上,其 PAPR 得到进一步降低.阈值 PAPR<sub>0</sub> 在 6.6 dB 附近

时,FRFT 下的 PAPR 高于这一阈值的概率在  $10^{-4}$  以下,而此时 FFT 的结果高于  $10^{-1}$ . 可以看到高 PAPR 的概率降低了大概  $10^4$ , FRFT 下的 PAPR 最高在 6.6 dB 左右,而 FFT 下的 PAPR 能达到 9 dB.

为了便于比较,统一选取时间为  $0 \sim 6.2438 \mu\text{s}$ , 功率为  $-10 \text{ dBm} \sim -6 \text{ dBm}$  的时域信号. 仿真结果如图 3.

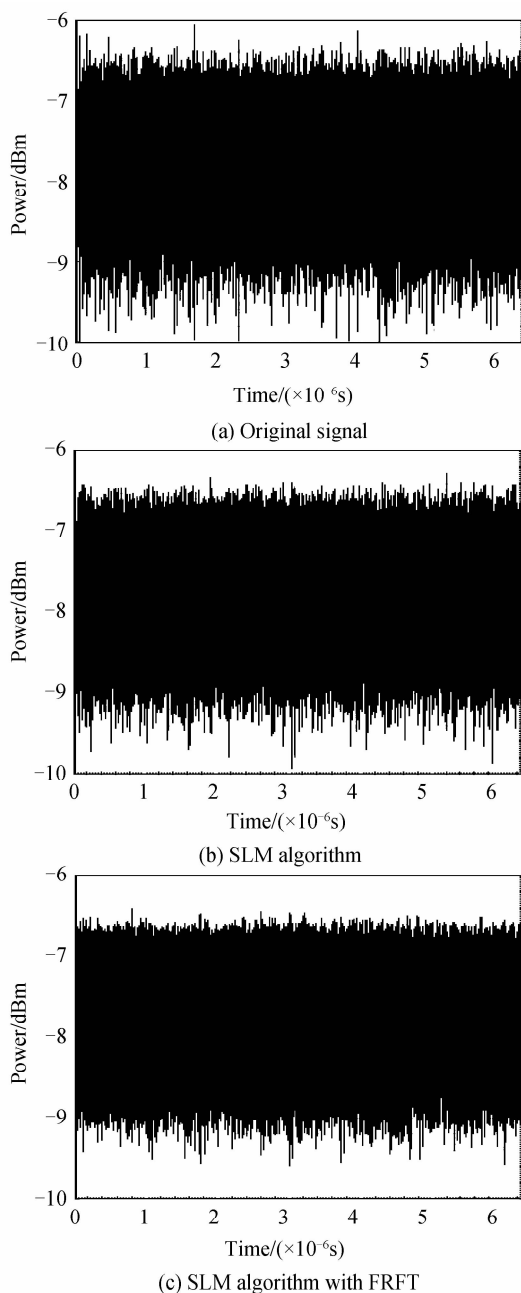


图 3 OFDM 光域信号功率对比图

Fig. 3 Comparison figure about OFDM signal power in optical domain

从图 3 可以看出:原始信号的最高峰值功率在  $-6.05 \text{ dBm}$  左右;经 SLM 算法处理后,最高峰值功率在  $-6.27 \text{ dBm}$  左右;而基于 FRFT 的 SLM 算法处理后,最高峰值功率仅为  $-6.40 \text{ dBm}$ . 且基于 FRFT 的 SLM

算法处理过的信号,毛刺最少,信号最平滑. 因此,通过结合 FRFT 算法,SLM 的 PAPR 抑制能力得到进一步提高.

在实际系统中,可以考虑牺牲一部分 PAPR 的抑制性能来提高引入 SLM 算法对系统造成的影响. 由于 SLM 算法的引入会给系统带来很高的复杂度,随着旋转因子的增加,复杂度也成倍增加. FRFT 与 SLM 算法结合对 SLM 算法本身复杂度影响的仿真结果见图 4.

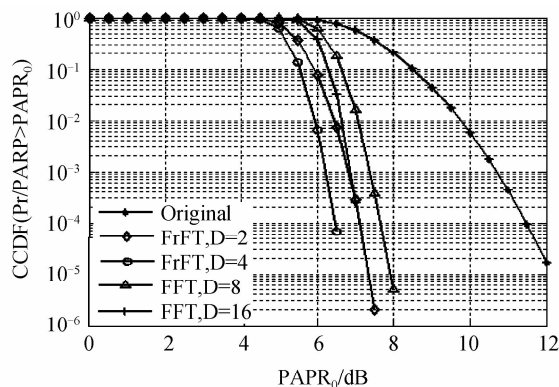


图 4 SLM 算法下不同旋转因子数的 FRFT 与 FFT 降低 PAPR 对比图

Fig. 4 Comparison figure about FRFT and FFT with different rotation factor under SLM

从图 4 可看出,基于 FRFT 的 SLM 算法中旋转因子数  $D=2$  时的 PAPR 抑制能力位于单一 SLM 算法中  $D=8$  与  $D=16$  的抑制能力之间,且与  $D=16$  的抑制能力较为接近. 因此采用 FRFT 下  $D=2$  的 SLM 算法来替代 FFT 下  $D=16$  的 SLM 算法,其 PAPR 抑制性能相近,但引入 SLM 算法对系统增加的复杂度降低了 8 倍.

### 3.2 限幅算法结合 FRFT

限幅类算法主要通过信号失真达到抑制 PAPR 的目的,这里考虑最简单的削峰限幅. 首先对结合算法的有效性进行分析,限幅算法中的限幅门限选择 6.6,得到的 CCDF 曲线如图 5.

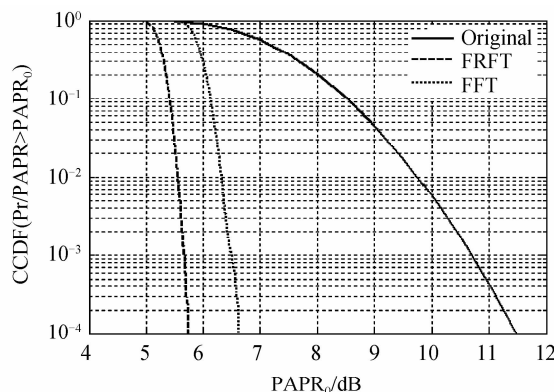


图 5 基于限幅算法下 FRFT 与 FFT 降低 PAPR 对比图  
Fig. 5 The comparison of FRFT and FFT based on a clipping algorithm

由于限幅算法的抑制特点,两种处理信号的曲线

走势很相似,相比 SLM 算法,限幅算法的 PAPR 抑制效果更为突出.由图 5 中可知,FRFT 处理的信号对于限幅更加敏感,FRFT 处理过的信号 PAPR 高于 5.8 dB 的概率为  $10^{-4}$ ,而此时 FFT 处理过的信号 PAPR 高于 5.8 dB 的概率高达 0.8.

同样对该结合算法进行光路仿真分析,观察窗同 FRFT 结合 SLM 算法相同.仿真结果如图 6.

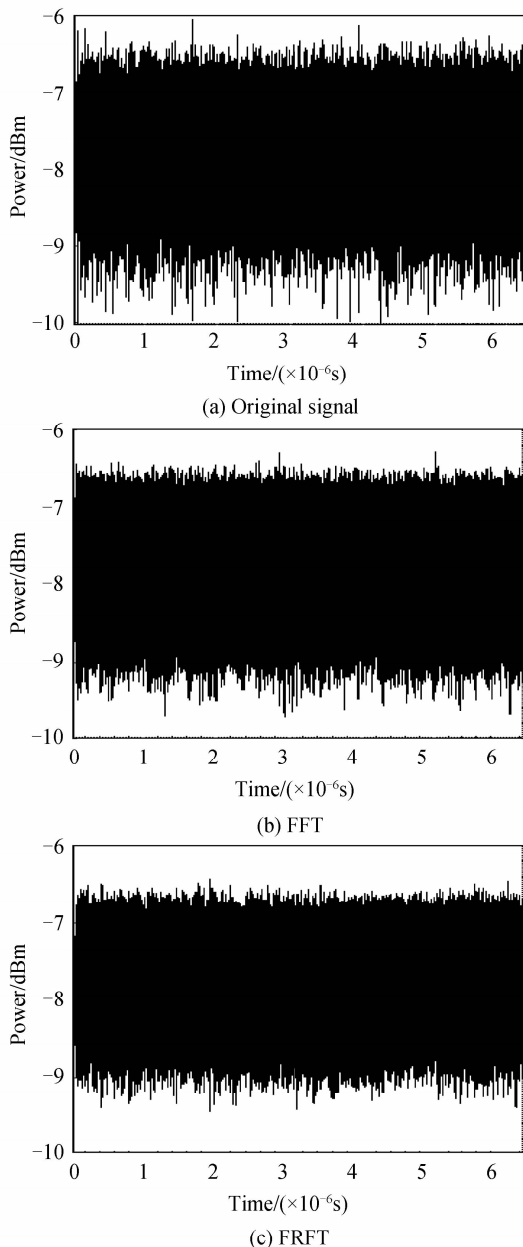


图 6 OFDM 光域信号功率对比图

Fig. 6 Comparison figure about OFDM signal power in optical domain

从图 6 中可看出,原始信号的峰值功率为  $-6.02$  dBm;经限幅处理的信号峰值功率为  $-6.30$  dBm;基于 FRFT 的限幅算法处理信号的峰值功率为  $-6.40$  dBm. FRFT 结合限幅算法处理信号的毛刺平滑程度最好.由于选取的限幅门限值相同,因

此,理论上两种傅里叶变换处理的信号可达到的最高 PAPR 值相同.但经光路传输 249 984 bit 信息后,经 FRFT 处理的信号峰值均低于经 FFT 处理的信号峰值.可见,FRFT 与限幅算法结合更加有效.

限幅算法会对系统的误码率性能产生影响,对两种傅里叶变换结合限幅算法,经光路传输后系统误码率的性能进行仿真分析,仿真结果如图 7.

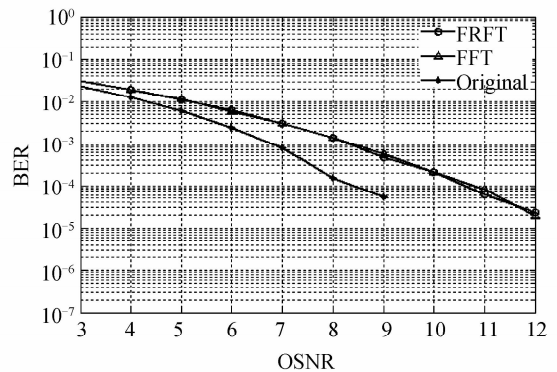


图 7 基于限幅算法下 FRFT 与 FFT 的误码率对比图  
Fig. 7 Comparison figure about the BER of FRFT and FFT under clipping

从图 7 中可以看出,FRFT 与 FFT 的误码率性能相当,符合理论分析.但由于限幅算法的引入,误码率性能明显降低,在光信噪比为 8 dB 时,误码率由  $10^{-4}$  升高到  $10^{-3}$ .

通过提高 FRFT 情况下限幅算法的限幅门限来改善引入限幅算法后对误码率造成的影响.经过多次调节后得到在限幅门限提升为 7.4 时,FRFT 结合限幅算法与门限为 6.6 时限幅算法的 CCDF 曲线基本一致,即两种情况的 PAPR 抑制性能基本一致,结果如图 8.此时经光路传输的误码率情况如图 9.

从图 9 可以看到提高限幅门限之后,经 FRFT 处理的信号误码率性能有了明显的改善.而且随着光信噪比的提高,改善效果愈加明显.在光信噪比达到 10 dB 之后,经 FRFT 处理的信号误码率已经由原算法的  $10^{-4}$  降低到  $10^{-5}$ .

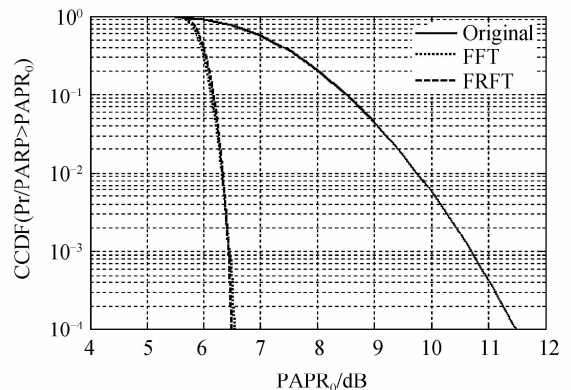


图 8 提升 FRFT 情况下的限幅门限后与原算法 PAPR 抑制情况对比图  
Fig. 8 Comparison figure about PAPR reduction between enhance the CT in FRFT and original algorithm

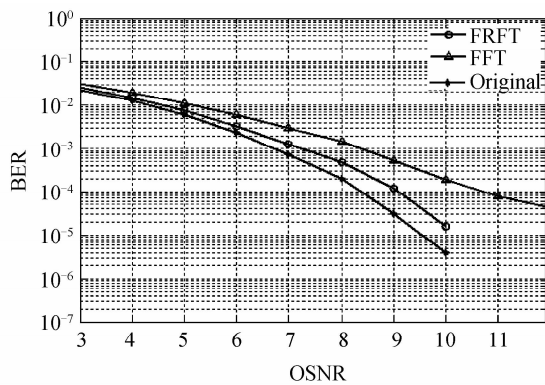


图9 提升FRFT情况下的限幅门限后与原算法 PAPR 误码率对比

Fig.9 Comparison figure about BER between enhance the CT in FRFT and original algorithm

## 4 结论

本文分析了一般级联算法对 OFDM 系统 PAPR 抑制性能及系统改善性能的限制性,在此基础上提出了更加有效的基于 FRFT 的结合方案.结合 Matlab 与 Optisystem 光路仿真,从 PAPR 抑制性能和对系统性能改善两个方面分析了 FRFT 的作用,并选择两类算法考察了 FRFT 的普适性.结果显示 FRFT 均有良好效果.从更实际的角度出发,可以根据采用的 PAPR 抑制算法以及系统的具体要求选择 FRFT 的不同作用.采用 SLM 算法,通过仿真可以看到,SLM 算法相比限幅算法对 PAPR 的抑制能力较弱,因此可以结合 FRFT 算法进一步降低系统的 PAPR.而对于限幅算法,由于算法本身有很强的 PAPR 抑制能力,但该算法对系统误码率性能有很大影响,因此可以结合 FRFT 算法改善系统的误码率性能,达到可靠传输的目的.FRFT 作为一个无伤算法,与 PAPR 抑制算法结合是一个很好的选择.

### 参考文献

[1] LIU Wu, YANG Qi. Carrier phase recovery without pilot sub-carriers in coherent optical OFDM transmission systems[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(12): 1893-1898.  
刘武, 杨奇. 相干光正交频分复用传输系统中的无导频相位纠偏方法[J]. *光子学报*, 2011, **40**(12): 1893-1898.

[2] ZHANG Li-jia, LIU Bo, XIN Xiang-jun, *et al.* Theory and performance analyses in secure CO-OFDM transmission system

based on two-dimensional permutation [J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2013, **31**(1): 74-80.

- [3] XIAO Jiang-nan, YU Jian-jun, LI Xin-ying, *et al.* Handmaid transform combined with companding transform technique for PAPR reduction in an optical direct-detection OFDM system [J]. *Journal of Optical Communications and Networking*, 2012, **4**(10): 709-714.
- [4] SHIEH W, DJORDJEVIC I. OFDM for optical communications[M]. Access Online via Elsevier, 2009.
- [5] JOO H S, HEO S J, JEON H B, *et al.* A new blind SLM scheme with low decoding complexity for OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2012, **58**(4): 669-676.
- [6] SABBAGHIAN M, KWAK Y, SMIDA B, *et al.* Near Shannon limit and low peak to average power ratio turbo block coded OFDM [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, **59**(8): 2042-2045.
- [7] SLIMANE S B. Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM signals through pre-coding[J]. *Vehicular Technology*, 2007, **56**(2): 686-695.
- [8] WANG Y, LUO Z. Optimized iterative clipping and filtering for PAPR reduction of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, **59**(1): 33-37.
- [9] MORE A P, SOMANI S B. The reduction of PAPR in OFDM systems using clipping and SLM method [C]. *Information Communication and Embedded Systems (ICICES)*, 2013: 593-597.
- [10] LI Li, QU Dai-ming. Joint decoding of LDPC code and phase factors for OFDM systems with PTS PAPR reduction[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, **62**(1): 444-449.
- [11] SINGH K, BHARTI M R, JAMWAL S. A modified PAPR reduction scheme based on SLM and PTS techniques [C]. *Signal Processing, Computing and Control (ISPPCC)*, 2012: 1-6.
- [12] CHEN En-qing, TAO Ran, ZHANG Wei-qiang, *et al.* The OFDM system and equalization algorithm based on the fractional Fourier transform [J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2007, **35**(3): 409-414.  
陈恩庆, 陶然, 张卫强, 等. 一种基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统及其均衡算法[J]. *电子学报*, 2007, **35**(3): 409-414.
- [13] TAO Ran, MENG Xiang-yi, WANG Yue. Image encryption with multiorders of fractional Fourier transforms [J]. *Information Forensics and Security*, 2010, **5**(4): 734-738.
- [14] MARTONE M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, **49**(6): 1011-1020.
- [15] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶傅里叶变换及其应用[M]. 清华大学出版社, 2009.