

doi: 10.3788/gzxb20144301.0127002

广义 Greenberger-Horne-Zeilinger 态纠缠度 和 Bell 型不等式实验

赵加强, 曹连振, 逯怀新, 王晓芹

(潍坊学院 山东省多光子纠缠与操纵重点实验室; 物理与光电工程学院, 山东 潍坊 261061)

摘 要: 利用制备的三光子偏振广义 Greenberger-Horne-Zeilinger 纠缠态, 测量了三体纠缠度、Svetlichny 不等式和广义 Greenberger-Horne-Zeilinger 态的密度矩阵. 根据密度矩阵计算了三体纠缠度, 测量得到了广义 Greenberger-Horne-Zeilinger 纠缠态的纠缠和非定域性之间的关系. 结果表明: 在实验误差范围内, 三体纠缠度的实验测量值和理论值一致; Svetlichny 算符的期望值和理论计算结果具有较好的一致性; 体系非定域特性和体系的纠缠程度密切相关, 当纠缠度减小时, 非定域性减弱.

关键词: 量子纠缠; 广义 GHZ 纠缠态; Svetlichny 算符; 非定域性

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2014)01-0127002-4

Experimental Investigation of Entanglement and Bell-type Inequality of Generalized Greenberger-Horne-Zeilinger States

ZHAO Jia-qiang, CAO Lian-zhen, LU Huai-xin, WANG Xiao-Qin

(Shandong Provincial Key Laboratory of Multi-photon Entanglement and Manipulation; Department of Physics and Optoelectronic Engineering, Weifang University, Weifang, Shandong 261061, China)

Abstract: Three qubits entanglement and Svetlichny inequality of generalized Greenberger-Horne-Zeilinger states were measured. Based on the density matrix of the generalized Greenberger-Horne-Zeilinger states, the degree of tripartite entanglement was calculated. Through the experimental investigation of the three qubits generalized Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement and Svetlichny inequality, the relation between the entanglement and nonlocality property was obtained. The results show that the three-body entanglement measurement values are consistent with the theoretical values within the limits of experimental error. The expectation values of Svetlichny operator are consistent with the theoretical results. The nonlocal properties are closely related to the degree of the entangled system. The nonlocal properties decrease as the entanglement decreases.

Key words: Quantum entanglement; Generalized GHZ entangled states; Svetlichny inequality; Nonlocality

OCIS Codes: 270.0270; 270.5585

0 引言

纠缠体现了量子力学最奇特的性质, 其来源于系统中各组分的非经典关联^[1-2]. 纠缠系统是量子通信和量子计算等量子信息处理中最基本的资源^[3-5]. 纠缠体系也可以用来证明量子体系的内在特性与隐变量理论之间的矛盾^[6-7], 而且非定域特性和两体间的纠缠程度相关^[8-9]. 理论研究表明, 两体以上的纠缠体系,

如三体广义 GHZ (Generalized Greenberger-Horne-Zeilinger, GGHZ) 态也可以用来研究量子纠缠和非定域性之间的关系^[10-12]. 但是, 这个推广具有复杂性, 因为三体纠缠度和 Bell 不等式是否可以直接由两体向三体推广还不是很清楚. 而在量子信息研究中, 纠缠和非定域性之间的关系是非常重要的问题. 例如, 最大纠缠态是量子信息处理中的理想资源, 非最大纠缠态会使量子信息处理的效率降低, 并且变得不可靠^[13-15].

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11174224)、山东省科技发展计划 (No. 2011YD01049)、山东省自然科学基金 (Nos. ZR2011AL012、ZR2013FM001) 和山东省大型科学仪器设备升级改造技术研究项目 (No. 2013SJGZ10) 资助

第一作者: 赵加强 (1976-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为量子信息. Email: zhaojiaqiang@eyou.com

收稿日期: 2013-05-15; **录用日期:** 2013-06-28

<http://www.photon.ac.cn>

实际上, 由于多种非理想因素的存在, 实验中制备的纠缠体系往往很难是最大纠缠态, 但 Ekert 已证明, 只要纠缠系统破坏了 Bell 定理, 用作量子密钥分发的信道就是安全的^[16], 所以 Ekert 的 E91 协议成为目前量子密码分发的理论基础. 因此, 研究量子态的非定域性具有重要的现实意义. 文献[17]理论研究了 GHZ 态和 MS 态(Maximal Slice)两种非最大纠缠态的非定域特性, 但所提到的 GHZ 态的纠缠度和 Bell 型不等式违背的实验研究还未见报道.

本文在 GHZ 态的基础上^[18], 测量了纠缠度和器件偏置角度的关系, 研究了所制备的 GHZ 纠缠态对文献[17]给出的 Bell 型不等式的破坏程度. 实验结果表明, 所测量的三体纠缠度 τ 和文献[19]给出的理论结果是一致的. 对于 GHZ 纠缠态即使不是最大纠缠态, 在一定范围内用其进行量子密钥分发也是安全的, 为量子态在量子通信中的应用提供了实验支持.

1 GHZ 态的纠缠度和非定域性

对于三光子偏振 GHZ 纠缠态 $|\psi_g\rangle$ 定义为

$$|\psi_g\rangle = \cos\theta|V\rangle_1|V\rangle_2|V\rangle_3 + \sin\theta|H\rangle_1|H\rangle_2|H\rangle_3 \quad (1)$$

式中 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$ 分别表示光子的竖直极化和水平极化状态. 根据 V Coffman 的定义^[19], 三体纠缠度为

$$\tau = \sin^2 2\theta \quad (2)$$

当 $\theta = 45^\circ$ 时, $|\psi_g\rangle$ 退化为 GHZ 态, 此时 $\tau = 1$ 为最大纠缠态, 当 $0^\circ \leq \theta < 45^\circ$ 时, 为非最大纠缠态.

Svetlichny 把两位比特的 Bell 不等式推广到三位比特, 给出了描述三体纠缠体系非定域性的 Bell 型 Svetlichny 算符为^[20]

$$S = A(BK + B'K') + A'(BK' + B'K) \quad (3)$$

式中, $K = C + C'$, $K' = C - C'$, $A = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $A' = \mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ 作用于比特 1, $B = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 和 $B' = \mathbf{b}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 作用于比特 2, $C = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3$ 和 $C' = \mathbf{c}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_3$ 作用于比特 3. $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ 和 \mathbf{c}, \mathbf{c}' 是单位矢量, $\boldsymbol{\sigma}_i$ 为可写作 Pauli 矩阵的自旋投影算符.

类似其它的 Bell 型算符, S (Svetlichny) 不等式的定域实在论(Local Realism, LR)理论期望值为

$$|\langle S \rangle|_{LR} \leq 4 \quad (4)$$

量子力学(Quantum Mechanics, QM)理论给出 S 算符期望值的上边界为^[17]

$$S_{\max} = \begin{cases} 4\sqrt{1-\tau}, & \tau \leq 1/3 \\ 4\sqrt{2\tau}, & \tau \geq 1/3 \end{cases} \quad (5)$$

也即, $|\langle S \rangle|_{QM} \leq 4\sqrt{2}$. 本文可以把式(3)改造为一组实验可测力学量

$$S = \sigma_x \sigma_b \sigma_x + \sigma_y \sigma_b \sigma_x - \sigma_y \sigma_a \sigma_x - \sigma_y \sigma_a \sigma_y - \sigma_y \sigma_b \sigma_y - \sigma_x \sigma_a \sigma_y + \sigma_x \sigma_a \sigma_x + \sigma_x \sigma_b \sigma_y \quad (6)$$

式中, σ_x, σ_y 为 Pauli 算符, $\sigma_a = (\sigma_x + \sigma_y)/\sqrt{2}$, $\sigma_b =$

$(\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{2}$.

用图示的方法可直观的给出式(5)描述的 S 算符的上边界, 如图 1, 大于 4 的部分即为量子力学值对定域实在论结果的违背.

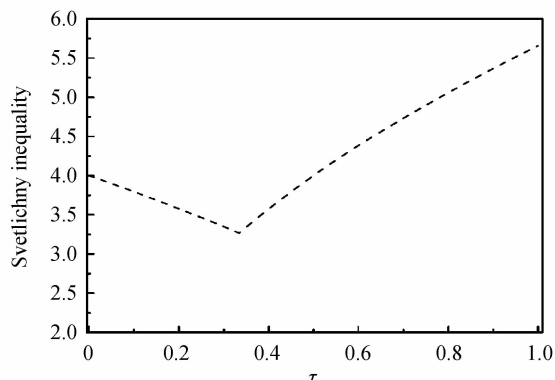


图 1 Svetlichny 不等式的量子力学边界值
Fig. 1 Quantum bound of Svetlichny inequality

2 实验方案

实验用与文献[18]相同的参量下转换和极化后选择实验方案, 装置如图 2.

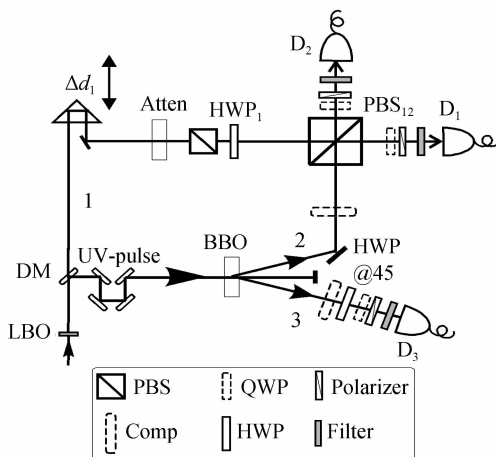


图 2 GHZ 纠缠态装置

Fig. 2 Schematic drawing of GHZ entanglement states

532 nm 的激光 (Millennia Pro 10s, Newport Co.) 泵浦锁模钛宝石激光器 (Tsunami, Newport Co.) 产生 780 nm 的飞秒激光脉冲, 重复频率为 80 MHz, 脉宽约 100 fs. 非线性晶体 LBO (LiB_3O_5) 可使 780 nm 的红外光倍频产生波长为 390 nm 的紫外光脉冲, 通过 5 个二色分光镜 (Dichroic Beamsplitters, DM), 反射 390 nm 光, 透射 780 nm 光) 将未发生参量上转换的红外光滤除后, 入射在硼酸钡 (Barium Boron Oxide, BBO) 晶体上, 产生 II 型参量下转换, 把一个 390 nm 的光子劈裂为两个 780 nm 的光子, 由此产生 Bell 纠缠态. LBO 晶体上未产生参量转换的 780 nm 红外光通过衰减和补偿光程与 2 路同时到达偏振分束器 (Polarizing Beam Splitter, PBS) 上, 制备出三光子 GHZ 态. 然后进行

GGHZ 态的制备. 根据计算结果,把 Half-Wave Plate (HWP1) 设置为合适的角度,单光子源制备在 $\cos \theta|V\rangle_1 + \sin \theta|H\rangle_1$ 上,经过和 2 路光子在 PBS 上的相干叠加,得到的三光子态为式(1)所示的 GHZ 纠缠态. θ 值可以通过实验测 HHH 基矢下的光子计数 n_{HHH} 和 VVV 基矢下的光子计数 n_{VVV} 计算得到, θ 满足

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{n_{HHH}}{n_{HHH} + n_{VVV}}} \quad (7)$$

实验中分别测量了 $n_{HHH}/n_{VVV} = 1:1, 1:2, 1:4, 1:6, 1:8, 1:10, 1:14, 1:20, 1:60$ 的 9 个点,计算出 $\theta = 45^\circ, 35.3^\circ, 26.6^\circ, 22.2^\circ, 19.5^\circ, 17.5^\circ, 15^\circ, 12.6^\circ, 7.4^\circ$. 纠缠态的保真度在 $F = 0.85$ 左右,即,实验制备了保真度较高的三光子偏振 GHZ 纠缠态.

3 纠缠度和 S 不等式的测量结果

实验中,在每个选定的角度处,对所制备的 GHZ 纠缠态在 $|H\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $|V\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $|+\rangle = H+V$ 、 $|R\rangle = H+iV$ 基矢上测得 $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$ 态的密度矩阵,然后根据 V Coffman 对三体纠缠体系纠缠度的定义

$$\tau = C_{1(23)}^2 - C_{123}^2 - C_{13}^2 \quad (8)$$

计算出制备的 GHZ 纠缠态的三体纠缠度. 如图 3. 由图 3 可知,在实验误差范围内,三体纠缠度的实验测量值和理论值一致,保真度 F 和三体纠缠度描述的纠缠态的性质一致.

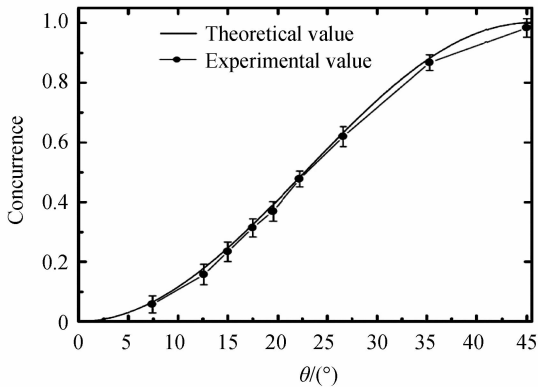


图 3 三体纠缠度的实验测量值

Fig. 3 Experimental value of tripartite entanglement

对于式(6)所定义的 Svetlichny 不等式中的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_a, \sigma_b$, 分别在 $+/-, R/L, \alpha/\beta, \gamma/\delta$ 基矢上测量,其中 $|-\rangle = H-V, |L\rangle = H-iV$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \cos 247.5^\circ |H\rangle + \sin 247.5^\circ e^{-i\pi} |V\rangle, \\ |\beta\rangle &= \cos 337.5^\circ |H\rangle + \sin 337.5^\circ e^{-i\pi} |V\rangle, \\ |\gamma\rangle &= \cos 77.5^\circ |H\rangle + \sin 77.5^\circ e^{-i\pi} |V\rangle, \\ |\delta\rangle &= \cos -12.5^\circ |H\rangle + \sin -12.5^\circ e^{-i\pi} |V\rangle. \end{aligned}$$

实验测得 S 算符在所制备的 GHZ 纠缠态中平均值结果如表 1.

表 1 表明,实验测得 S 算符的期望值和理论计算

结果具有较好的一致性. 三体纠缠度的测量结果和 S 测量结果表明体系非定域特性和体系的纠缠程度密切相关,并且都和理论计算结果一致. 当纠缠度减小时,非定域性减弱,纠缠体系的制备会受到参量转换过程中不可消除的噪声影响,造成制备的态为混态;其次,实验系统的电子学噪声和实验环境中杂散光等因素都会使制备出的 GHZ 纠缠态不是纯态;而噪声的存在会使实验测量的纠缠度和不等式的违背量减小^[21].

表 1 Svetlichny inequality 的实验测量值

Table 1 Expremental value of Svetlichny inequality	
	1:1 1:2 1:4 1:6 1:8 1:10 1:14 1:20 1:60
Concurrence	1 0.889 0.64 0.489 0.395 0.331 0.249 0.182 0.065
S(Exp)	4.541 4.188 3.581 3.009 2.701 2.528 2.917 3.177 3.456
S-error	0.043 0.046 0.054 0.057 0.058 0.061 0.027 0.035 0.029

4 结论

利用参量下转换和极化后选择的方案制备了保真度 $F = 0.85$ 左右的三光子 GHZ 纠缠态. 测量了 GHZ 三光子偏振纠缠态的密度矩阵,根据密度矩阵计算了三体纠缠度,验证了 V Coffman 给出的三体纠缠度理论结果;测量了 GHZ 纠缠态的 Svetlichny 不等式,通过此不等式的实验测量验证了 Ghose 给出的纠缠度和非定域性之间的关系.

参考文献

- [1] CLAUSER J F, HOME M A, SHIMONY A, *et al.* Proposed experiment to test local hidden-variable theories[J]. *Physical Review Letters*, 1969, **23**(15): 880-884.
- [2] WANG Zhong-jie, LI Cong, ZHANG Xiao-dong. Entanglement properties of photon-added two-mode entangled coherent states and their preparations via cavity quantum electrodynamics[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(11): 1342-1346.
王中杰, 李聪, 张晓东. 增光子二模纠缠相干态的纠缠特性及其通过腔量子电动力学的制备[J]. *光子学报*, 2012, **41**(11): 1342-1346.
- [3] MOEHRING D L, MAUNZ P, OLMSCHENK S, *et al.* Entanglement of single-atom quantum bits at a distance[J]. *Nature*, 2007, **449**(7158): 68-71.
- [4] CHEN Mei-feng, MA Song-she. Probabilistic remote preparation of a two-atom entangled state[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(1): 188-191.
陈美锋, 马宋设. 远程制备双原子纠缠态[J]. *光子学报*, 2008, **37**(1): 188-191.
- [5] O'BRIEN J L. Optical quantum computing[J]. *Science*, 2007, **318**(5856): 1567-1570.
- [6] CHEN Zeng-bing, PAN Jian-wei, ZHANG Yong-de, *et al.* All-Versus-Nothing violation of local realism for two entangled photons[J]. *Physical Review Letters*, 2003, **90**(16): 160408.
- [7] ASPECT A, DALIBARD J, ROGER G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers[J]. *Physical Review Letters*, 1982, **49**(25): 1804-1807.
- [8] GISIN N. Bell's inequality holds for all non-product states[J]. *Physics Letters A*, 1991, **154**(5-6): 201-206.
- [9] POPESCU S. Bell's inequalities versus teleportation: what is nonlocality[J]. *Physical Review Letters*, 1994, **72**(6): 797-

- 799.
- [10] LINDEN N, POPESCU S, WOOTTERS W K. Almost every pure state of three qubits is completely determined by its two-particle reduced density matrices [J]. *Physical Review Letters*, 2002, **89**(20): 07901.
- [11] YUAN Zhen-sheng, CHEN Yu-ao, ZHAO Bo, *et al.* Experimental demonstration of a BDCZ quantum repeater node[J]. *Nature*, 2008, **454**(7208): 07241.
- [12] HOSSEIN N H, STOCK R, JAMES D F V. Generation of multiphoton entanglement by propagation and detection[J], *Physical Review*, 2009, **80**(2): 022308.
- [13] PAN Jian-wei, DANIELL M, GASPARONI S, *et al.* Experimental demonstration of four-photon entanglement and high-fidelity teleportation [J]. *Physical Review Letters*, 2001, **86**(20): 4435-4438.
- [14] DEUTSCH D, EKERT A, JOZSA R, *et al.* Quantum privacy amplification and the security of quantum cryptography over noisy channels [J]. *Physical Review Letters*, 1996, **77**(9): 2818-2821.
- [15] HOWELL H C, LINARES A L, BOUWMESTER D. Experimental violation of a spin-1 bell inequality using maximally entangled four-photon states[J]. *Physical Review Letters*, 2002, **88**(3): 030401.
- [16] EKERT A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. *Physical Review Letters*, 1991, **67**(6): 661-664.
- [17] GHOSE S, SINCLAIR N, DEBNATH S, *et al.* Tripartite entanglement versus tripartite nonlocality in three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger class states [J]. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(25): 250404.
- [18] ZHAO Jia-qiang, LU Huai-xin, WANG Xiao-qin. Preparation of generalized Greenberger-Horne-Zeilinger and measurement of nonlocality[J]. *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2011, **41**(10): 1198-1202.
赵加强, 逯怀新, 王晓芹. 广义 GHZ 态的制备和非定域性的测量[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, **41**(10): 1198-1202.
- [19] COFFMAN V, KUNDU J, WOOTTERS W K. Distributed entanglement [J]. *Physical Review A*. 2000, **61**(5): 052306.
- [20] MERMIN N D. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states[J]. *Physical Review Letters*, 1990, **65**(15): 1838-1841.
- [21] LU Huai-xin, ZHAO Jia-qiang, CAO Lian-zhen, *et al.* Experimental investigation of the robustness against noise for different Bell-type inequalities in three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger states[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(4): 044101.