

doi: 10.3788/gzxb20144301.0101001

# 部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流中的传输特性

江月松, 张新岗, 王帅会, 欧军, 唐华

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

**摘要:**根据广义惠更斯-菲涅耳原理, 推导出了部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流中传输时平均光强和偏振度的解析表达式, 研究了部分相干贝塞尔-高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流模型下的光强分布特征和偏振度变化规律, 同时分析了指数项、折射率结构常量、湍流内外尺度以及拓扑荷、光源相干性等对光束传输性质的影响. 数值计算表明, 随着传输距离的增加, 部分相干贝塞尔高斯光束的光强会从空心分布逐渐演变为高斯分布, 同时光束会有一定程度的展宽. 而且, 当指数项值越接近于 3.1, 折射率结构常量越大, 外尺度越大或者内尺度越小时, 光强分布的演变越为迅速, 展宽现象也越明显; 当拓扑荷越小或者相干长度越小时, 光强分布的演变越迅速, 但是二者对展宽现象的影响并不明显. 另外, 偏振度在近距离处会经历一段振荡及升降变化过程, 当距离足够远时会趋于一个稳定值, 且该值等于光源平面上的初始偏振度. 偏振度变化的快慢程度受指数项、折射率结构常量、湍流内外尺度、拓扑荷和相干长度等因素的影响.

**关键词:**大气光学; 部分相干贝塞尔高斯光束; 非柯尔莫哥诺夫湍流; 平均光强; 偏振度

中图分类号: TN012

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2014)01-0101001-6

## Propagation of Partially Coherent Bessel-Gaussian Beams in Non-Kolmogorov Turbulence

JIANG Yue-song, ZHANG Xin-gang, WANG Shuai-hui, OU Jun, TANG Hua

(School of Electronic and Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Based on the extended Huygens-Fresnel principle, analytical expressions for the average intensity and degree of polarization of partially coherent Bessel-Gaussian beams propagating in non-Kolmogorov turbulence were derived. The intensity distribution feature and the variation principle of polarization degree were studied, and the effects of the exponent parameter, structure constant, outer scale, inner scale, topological change and coherent length on the propagation properties were analyzed. The results show that the beam profile approaches to a Gaussian shape from a hollow shape and gets some spreads with increasing the value of the propagation distance. The average intensity distribution changes more quickly and gets more spreads with exponent parameter closer to 3.1, larger structure constant, larger outer scale and smaller inner scale. When the topological charge or coherent length is smaller, the average intensity distribution changes faster, but it has few effects on the spread phenomenon. Furthermore, at near distance the degree of polarization first fluctuates, then a rise and a reduce appear in succession, and when the propagation distance is long enough it tends to a stable value which equals the initial value on the source plane. The variation process is affected by the exponent parameter, structure constant, outer scale, inner scale, topological charge and coherent length.

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61101005)和北京航空航天大学基本科研业务费(No. YWF-B-D2-XX-2)资助

第一作者: 江月松(1959-), 男, 教授, 博士, 从事研究方向为激光空间信息技术与光子量子信息技术. Email: yuesongjiang@buaa.edu.cn

通讯作者: 张新岗(1988-), 男, 硕士, 主要研究方向为涡旋光束. Email: ghsyzxg@163.com

收稿日期: 2013-07-17; 录用日期: 2013-09-23

<http://www.photon.ac.cn>

**Key words:** Atmospheric optics; Partially coherent Bessel-Gaussian beams; Non-Kolmogorov turbulence; Average intensity; Degree of polarization

**OCIS Codes:** 010.1290; 010.1300; 030.7060; 260.2710

## 0 引言

激光在遥感、成像以及远距离光通信等方面有着重要的应用,因此激光光束在大气湍流中的传输一直受到人们的关注<sup>[1-6]</sup>.文献[7]研究了椭圆涡旋光束在大气湍流中传输时的闪烁特性.在文献[8]中提出矢量涡旋光束的传输会受到大气湍流更小的干扰.文献[9]研究了部分相干厄米-高斯光束在大气湍流中传输的光束扩展和方向性.2002年,Gbur等从理论上证明,在一定的条件下,部分相干光束受到大气湍流的影响要小于完全相干光束. Dogariu 等通过实验验证了该理论的正确性<sup>[10-11]</sup>,自此部分相干光束在大气湍流中的传输已成为一个研究的热点.1987年,Durnin提出了贝塞尔光束,由于其无衍射特性理想的贝塞尔光束在物理上不可实现,而贝塞尔高斯光束作为它的一种典型近似形式在实际中得到广泛应用.近年来,贝塞尔高斯光束在大气湍流中的传输特性得到了广泛研究<sup>[12-14]</sup>.

另一方面,柯尔莫哥诺夫模型一直被广泛地用来描述理想的大气湍流.但近来的实验结果表明,真实的大气结构与柯尔莫哥诺夫模型所描述的并不一致,基于柯尔莫哥诺夫模型的预测结果与实际测量值有一定偏差,因此提出了非柯尔莫哥诺夫湍流模型<sup>[15-16]</sup>.基于非柯尔莫哥诺夫湍流模型,文献[17-18]研究了光斑的弥散、闪烁、误码率等.另外文献[19]研究了非柯尔莫哥诺夫湍流模型下光束的漂移现象.然而,到目前为止,还未见部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流模型下的传输特性的研究报道.

本文根据广义惠更斯-菲涅耳原理,从理论上研究了部分相干贝塞尔-高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流模型下的光强分布特征和偏振度变化规律,利用数值计算重点分析了非柯尔莫哥诺夫湍流模型中的指数项、折射率结构常量、湍流内外尺度以及光源的拓扑荷、相干长度对光束传输性质的影响.

## 1 理论分析

在光源平面  $z=0$  上,完全相干贝塞尔高斯光束的场分布可以表示为

$$E(\rho_0, \phi, 0) = J_n(\beta\rho_0) \exp(-\rho_0^2/\omega_0^2) \exp(in\phi) \quad (1)$$

式中  $\rho_0$  和  $\phi$  分别为柱坐标系下光源平面上位置矢量的模和方位角,  $J_n$  为  $n$  阶贝塞尔函数,  $\beta$  为波矢的横向分量,  $n$  为拓扑荷.

部分相干贝塞尔高斯光束在光源平面上的二阶相

干和偏振性质可以用  $2 \times 2$  交叉谱密度矩阵表示为<sup>[20]</sup>

$$\mathbf{W}(\rho_{01}, \rho_{02}, \phi_1, \phi_2, 0) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\rho_{01}, \rho_{02}, \phi_1, \phi_2, 0) & W_{xy}(\rho_{01}, \rho_{02}, \phi_1, \phi_2, 0) \\ W_{yx}(\rho_{01}, \rho_{02}, \phi_1, \phi_2, 0) & W_{yy}(\rho_{01}, \rho_{02}, \phi_1, \phi_2, 0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中

$$W_{xx}(\rho_{01}, \rho_{02}, 0) = I_{x0} J_n(\beta\rho_{01}) J_n(\beta\rho_{02}) \cdot \exp \left[ -\frac{(\rho_{01} - \rho_{02})^2}{\sigma_{xx}} - \frac{\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2}{\omega_0^2} \right] \exp[-in(\phi_1 - \phi_2)] \quad (3)$$

$$W_{yy}(\rho_{01}, \rho_{02}, 0) = I_{y0} J_n(\beta\rho_{01}) J_n(\beta\rho_{02}) \cdot \exp \left[ -\frac{(\rho_{01} - \rho_{02})^2}{\sigma_{yy}} - \frac{\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2}{\omega_0^2} \right] \exp[-in(\phi_1 - \phi_2)] \quad (4)$$

式中  $(\rho_{01}, \phi_1), (\rho_{02}, \phi_2)$  表示光源平面上两点  $\rho_{01}, \rho_{02}$  坐标,  $I_{x0}$  和  $I_{y0}$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的光强,  $\sigma_{xx}$  和  $\sigma_{yy}$  分别为光束在  $x$  和  $y$  方向的横向相干长度.交叉谱密度矩阵中的非对角线元素可以为零,表示在光源平面每个点上相互正交的两个电场分量  $E_x$  和  $E_y$  是非相关的.

根据广义惠更斯-菲涅耳原理,假设光束在湍流介质中传输距离为  $z$ ,则交叉谱密度函数可以表示为<sup>[21]</sup>

$$W_{ii}(\rho_1, \rho_2, z) = \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{ii}(\rho_{01}, \rho_{02}, 0) \cdot \exp \left[ -\frac{ik}{2z}(\rho_{01} - \rho_1)^2 + \frac{ik}{2z}(\rho_{02} - \rho_2)^2 \right] \cdot \langle \exp[\psi(\rho_{01}, \rho_1) + \psi^*(\rho_{02}, \rho_2)] \rangle d\rho_{01} d\rho_{02} \quad (5)$$

式中  $k=2\pi/\lambda$  为波数,下标  $i=x, y, (\rho_1, \rho_2)$  为观察平面上的两点.  $\langle \exp[\psi(\rho_{01}, \rho_1) + \psi^*(\rho_{02}, \rho_2)] \rangle$  表示湍流对相位的干扰项,可以表示为

$$\langle \exp[\psi(\rho_{01}, \rho_1) + \psi^*(\rho_{02}, \rho_2)] \rangle = \exp \left\{ -\frac{\pi^2 k^2 z^2}{3} \int_0^{\infty} \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa [(\rho_{01} - \rho_{02})^2 + (\rho_{01} - \rho_{02})(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2)^2] \right\} \quad (6)$$

式中  $\Phi_n(\kappa)$  表示湍流介质折射率起伏的一维能量谱函数,  $\kappa$  为二维空间频率的振幅.在此引入非柯尔莫哥诺夫模型的能量谱函数<sup>[22]</sup>,即

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}} \quad (7)$$

式中  $\alpha$  为指数项,  $\tilde{C}_n^2$  为广义折射率结构常量.  $A(\alpha)$  和  $c(\alpha)$  可以分别表示为  $A(\alpha) = \Gamma(\alpha-1) \cos(\alpha\pi/2)/4\pi^2$ ,  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ,  $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$  和  $c(\alpha) = \left[ \Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right) A(\alpha) \frac{2\pi}{3} \right]^{\frac{1}{1-(\alpha-5)}}$ , 式中  $L_0$  为湍流外尺度,  $l_0$  为湍流内尺度.

假设  $T = \frac{\pi^2 k^2 z^2}{3} \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa$ , 则表达式  $T$  可以表示为

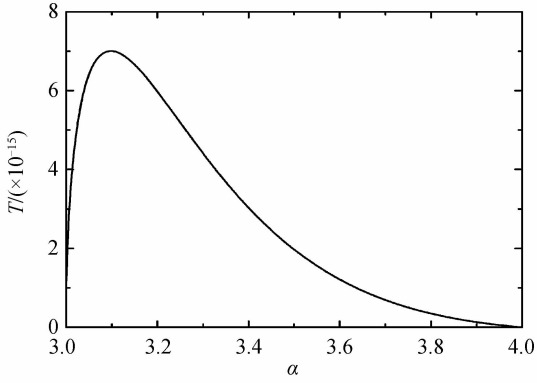

 图1 湍流干扰项与指数项  $\alpha$  的关系

 Fig. 1 The relationship between turbulence perturbed items and exponent parameter  $\alpha$ 

$$T = \frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa = \frac{\pi^2 k^2 z A(\alpha) \tilde{C}_n^2}{6} \cdot \frac{\kappa_m^{2-\alpha} \gamma \exp(\kappa_0^2/\kappa_m^2) \Gamma(2-\alpha/2, \kappa_0^2/\kappa_m^2) - 2\kappa_0^{4-\alpha}}{\alpha-2} \quad (8)$$

式中  $\gamma = 2\kappa_0^2 - 2\kappa_m^2 + \alpha\kappa_m^2$ ,  $\Gamma$  表示伽马函数.  $T$  与  $\alpha$  的关系如图 1 所示, 其他参量为  $\tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-\alpha-3}$ ,  $L_0 = 1 \text{ m}$ ,  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ .

对于在非柯尔莫哥诺夫湍流中传输的部分相干贝塞尔高斯光束, 令  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , 平均光强和偏振度分别为<sup>[20]</sup>

$$I = W_{xx}(\rho, \varphi, \rho, \varphi, z) + W_{yy}(\rho, \varphi, \rho, \varphi, z) \quad (9)$$

$$P(\rho, \varphi, \rho, \varphi, z) = \frac{|W_{xx} - W_{yy}|}{W_{xx} + W_{yy}} \quad (10)$$

根据式(6)~(8), 交叉谱密度函数可以表示为

$$W_{ii}(\rho, \varphi, \rho, \varphi, z) = \frac{k^2 I_{i0}}{4\pi^2 z^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} J_n(\beta\rho_{01}) J_n(\beta\rho_{02}) \exp[-in(\varphi_1 - \varphi_2)] \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\omega_0^2} + T\right)(\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2)\right] \cdot \exp\left[\left(\frac{2}{\sigma_i^2} + 2T\right)\rho_{01}\rho_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \exp\left[\frac{ik}{z}\rho_{01}\rho\cos(\varphi_1 - \varphi) - \frac{ik}{z}\rho_{02}\rho\cos(\varphi_2 - \varphi)\right] \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\rho_{01}^2 - \rho_{02}^2)\right] \cdot \rho_{01}\rho_{02} d\rho_{01} d\varphi_1 d\rho_{02} d\varphi_2 \quad (11)$$

根据文献[23], 有

$$\exp\left[\frac{ik\rho_0\rho}{z}\cos(\varphi - \varphi)\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l\left(\frac{k\rho_0\rho}{z}\right) \exp[i l(\varphi - \varphi)] \quad (12)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp[-i(n+l)\varphi_1] \exp\left[\left(\frac{2}{\sigma_i^2} + 2T\right)\rho_{01}\rho_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] d\varphi_1 = 2\pi \exp[i(n+l)\varphi_2] I_{n+l}\left[\left(\frac{2}{\sigma_i^2} + 2T\right)\rho_{01}\rho_{02}\right] \quad (13)$$

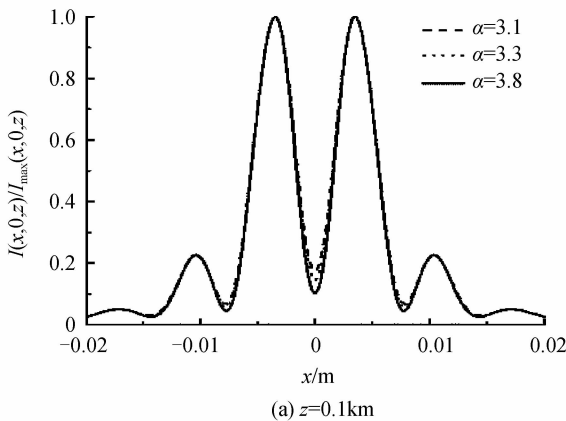
式(11)可以简化为

$$W_{ii}(\rho, \varphi, \rho, \varphi, z) = \frac{k^2}{z^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty J_n(\beta\rho_{01}) J_n(\beta\rho_{02}) \exp\left[-\left(\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\omega_0^2} + T\right)(\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2)\right] J_l\left(\frac{k\rho_{01}\rho}{z}\right) J_l\left(\frac{k\rho_{02}\rho}{z}\right) \cdot \exp\left[-\frac{ik}{2z}(\rho_{01}^2 - \rho_{02}^2)\right] \times I_{n+l}\left[\left(\frac{2}{\sigma_0^2} + 2T\right)\rho_{01}\rho_{02}\right] \times \rho_{01}\rho_{02} d\rho_{01} d\rho_{02} \quad (14)$$

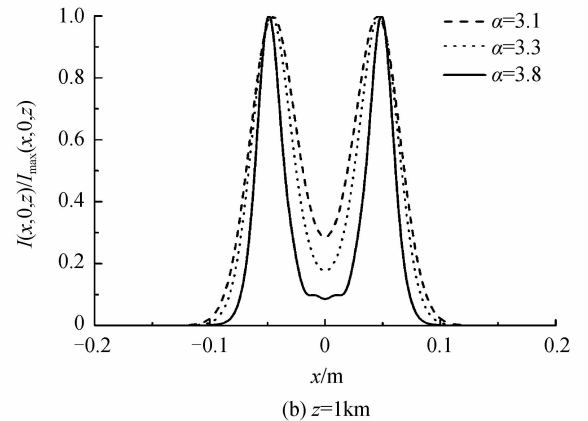
## 2 数值计算及分析

为了更清楚地说明部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流中的传输特性, 利用式(14)进行了数值计算. 同时为便于比较, 光强分布归一化为  $(I(x, 0, z)/I(x, 0, z)_{\max})$ .

图 2 给出了在不同指数项的湍流介质传输时, 不


 (a)  $z=0.1\text{ km}$ 

同传输距离处所对应的平均光强分布情况: (a)  $z=0.1 \text{ km}$ , (b)  $z=1 \text{ km}$ , (c)  $z=5 \text{ km}$ , (d)  $z=10 \text{ km}$ . 图中虚线、点线和实线分别表示  $\alpha=3.1, 3.3, 3.8$  时的光强分布图. 其他参量为: 波长  $\lambda=632.8 \text{ nm}$ , 束腰半径  $w_0=0.02 \text{ m}$ ,  $\sigma_{xx}=0.02 \text{ m}$ ,  $\sigma_{yy}=0.04 \text{ m}$ ,  $n=1$ ,  $C_n^2=5 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $L_0=1 \text{ m}$ ,  $l_0=0.01 \text{ m}$ . 从图中可以看出, 一阶贝塞尔高斯光束的平均光强服从空心分布, 随着传


 (b)  $z=1\text{ km}$

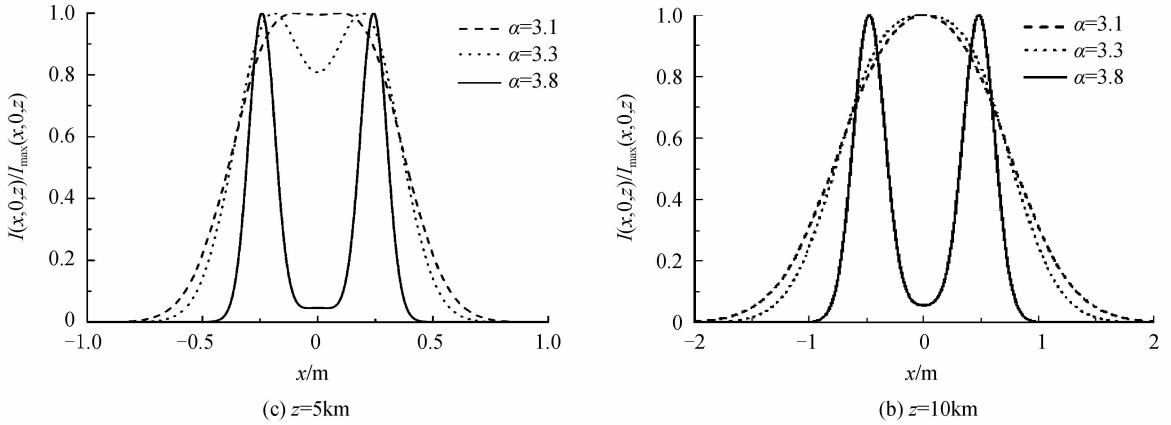


图2 在不同传输距离处  $\alpha$  对光强分布的影响

Fig. 2 Normalized intensity distribution at several propagation distances for different values of  $\alpha$

输距离的增加,光束的中心光强逐渐增大,光强由空心分布逐渐演变为高斯分布,同时光束会有一定程度的展宽.而且当 $\alpha=3.1$ 时,光强演变为高斯分布得最快,展宽现象最明显;当 $\alpha=3.8$ 时,光强演变为高斯分布得最慢,展宽现象最不明显.这个现象可通过非柯尔莫哥诺夫湍流模型做出解释:根据上面湍流模型的分析可见,当 $3 < \alpha < 3.1$ 时, $T$ 值随 $\alpha$ 的增大而逐渐增大直到 $\alpha=3.1$ 时达到最大值,随后再随 $\alpha$ 的增大而减小.因此, $\alpha=3.1$ 时湍流干扰最大,光强分布的演变最为迅速,展宽现象最为明显;而 $\alpha=3.8$ 时湍流干扰最小,光强分布的变化情况最不明显.

图3(a)~(c)分别给出了不同强弱的湍流介质、不同的湍流外尺度和内尺度时,光束在观察平面 $z=5$  km上的光强分布情况.从图3(a)可以看出,随着折射率结构常量的增大,光强演变为高斯分布的速度加快,光束展宽现象更加明显.从图3(b)和(c)可以看出,湍流外尺度越大或者湍流内尺度越小时,光强分布演变得越快,展宽现象越明显,而且光强分布受到湍流内尺度的影响要大于湍流外尺度.实际上湍流外尺度增加或者内尺度减小都会使湍流强度变大,湍流越大必然导致对光强分布的影响越明显.

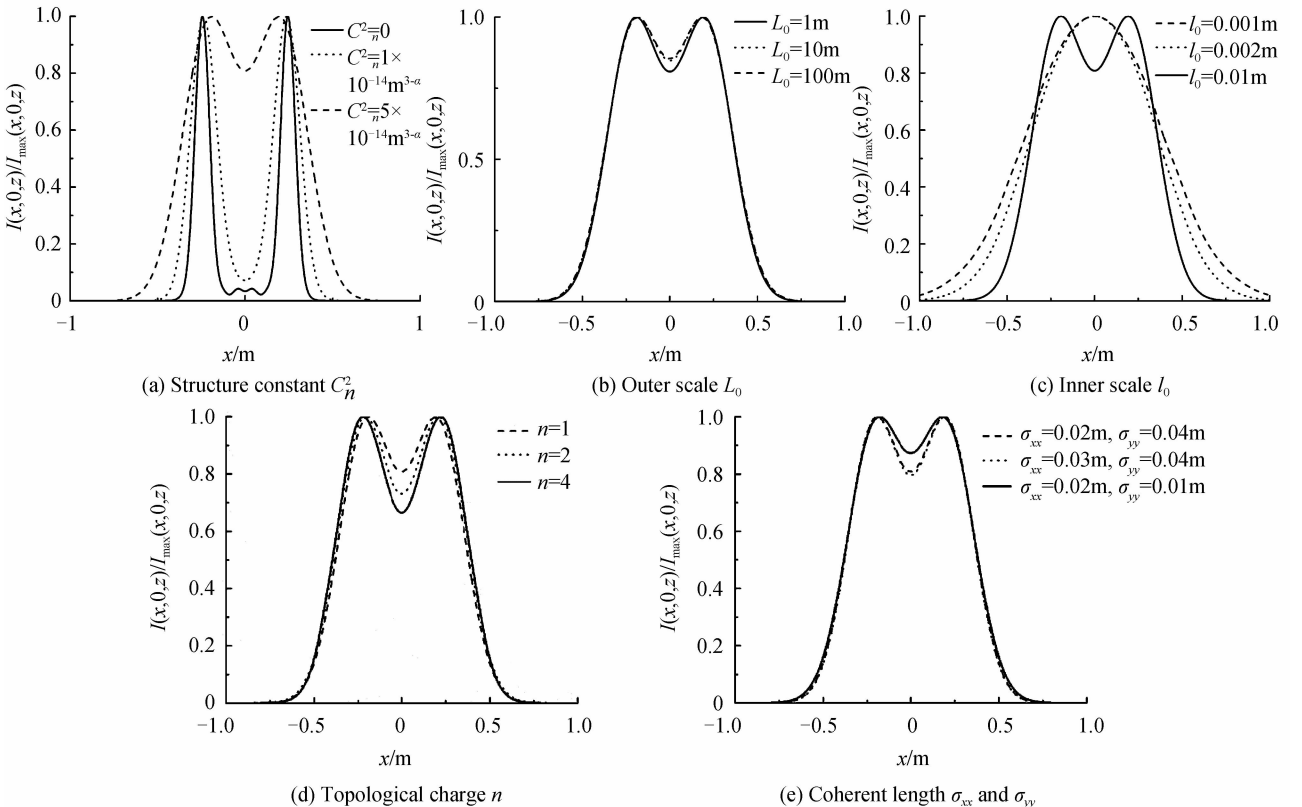


图3 在 $z=5$  km处不同参量对光强分布的影响

Fig. 3 Normalized intensity distribution at a fixed propagation distance  $z=5$  km for different parameters

图 3(d)和(e)分别给出了拓扑荷和光源相干性对光强分布的影响.由图可知,拓扑荷越小,或者相干长度越小即光源相干性越好时,光强演变为高斯分布的速度越快,但是二者的大小变化对光束的展宽程度几乎没有影响.

图 4(a)~(c)给出了不同的指数项、不同强弱的湍流介质、不同的湍流外尺度和内尺度时,偏振度随传输距离的变化情况.计算参量分别为  $I_{x_0}=0.8, I_{y_0}=0.2$ , 因此初始偏振度  $P^{(0)}=0.6$ .可以看出,在近距离处由

于光斑半径比较小,导致偏振度会经历一段振荡及升降变化过程,当传输距离足够远时,光束的分布状态保持稳定,偏振度也随之趋于一个稳定值,且该值等于光源平面上的初始偏振度.从图 4(a)和(b)可以看出,指数项值越接近于 3.1 或者折射率结构常数越大,偏振度趋于稳定值的速度越快.另外,图 4(c)和(d)表明,湍流外尺度越大或者湍流内尺度越小,偏振度进入稳定状态越快,而且外尺度对偏振度变化的影响要小于内尺度.

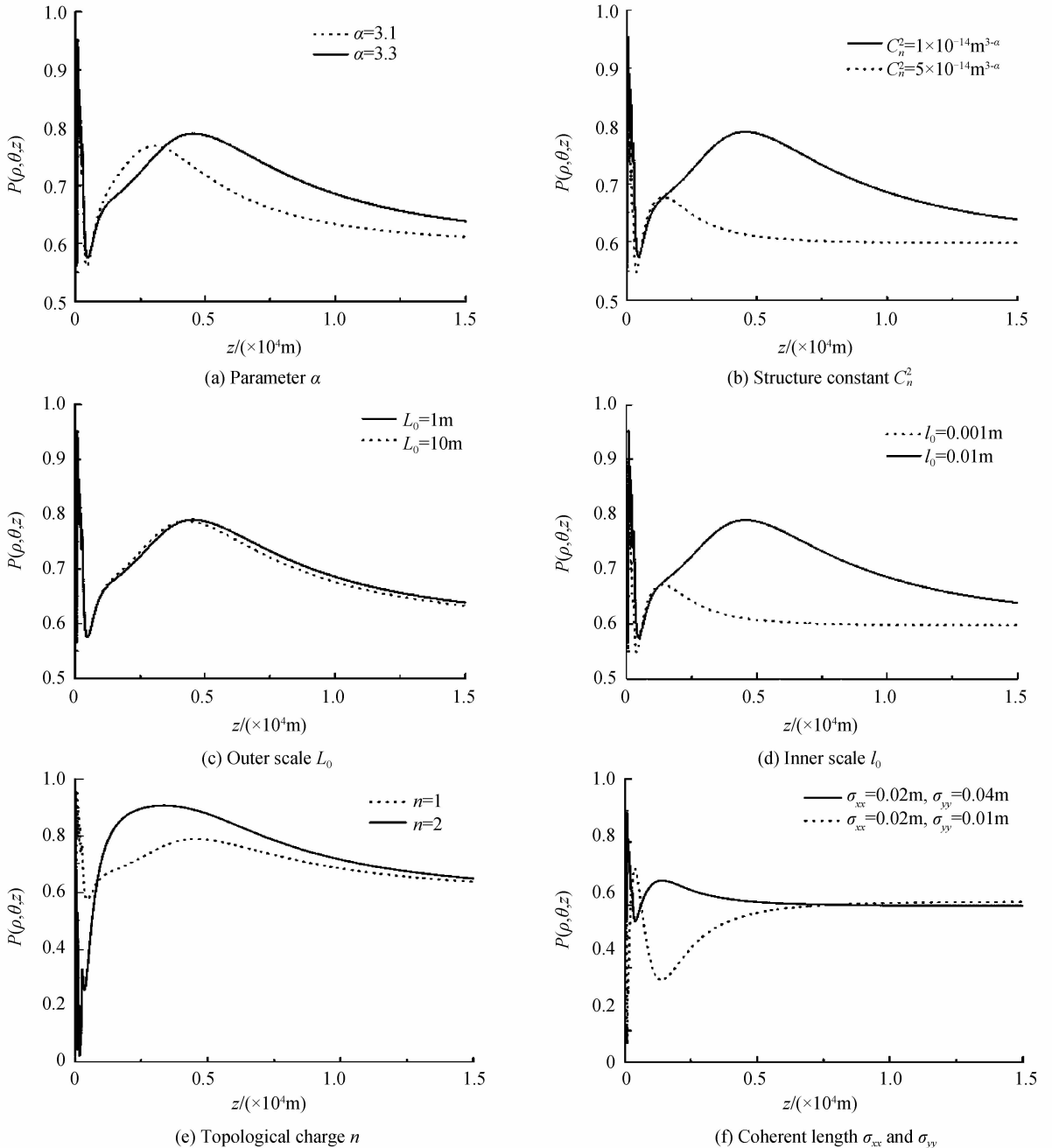


图 4 偏振度与不同参量的变化关系

Fig. 4 The degree of the polarization changes with different parameters

图 4(e)和(f)分别给出了拓扑荷和光源相干性对偏振度变化的影响.由图 4(e)可知,拓扑荷越小,偏振

度趋于稳定值的速度越快.然而,从图 4(f)可以看出,光源相干性对偏振度的影响较为复杂,当  $\sigma_{xx}=0.02\text{ m}$ ,

$\sigma_{yy}=0.04\text{ m}$  和  $\sigma_{xx}=0.02\text{ m}$ ,  $\sigma_{yy}=0.01\text{ m}$  时, 两者偏振度的变化曲线有一个交叉, 不再遵循相干长度越小, 进入稳定状态越快的规律. 出现该现象的原因在于: 由式(14)可知, 相干长度  $\sigma_{xx}$  和  $\sigma_{yy}$  分别决定着  $W_{xx}$  和  $W_{yy}$  的大小; 同时式(10)表明, 偏振度的大小与  $W_{xx}$  和  $W_{yy}$  之差的绝对值密切相关. 因此偏振度的变化不仅与  $\sigma_{xx}$  和  $\sigma_{yy}$  的大小有关, 而且与二者之间的相对大小有关.

### 3 结论

本文运用广义惠更斯-菲涅耳原理, 研究了部分相干贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫湍流模型下的传输特性. 重点分析了非柯尔莫哥诺夫湍流模型中的指数项、折射率结构常量、湍流内外尺度以及光源的拓扑荷、相干长度对光强分布和偏振度变化的影响. 研究结果表明, 部分相干贝塞尔高斯光束由于受到湍流干扰的影响, 经过一定传输距离后, 光强会由空心分布逐渐演变为高斯分布, 同时光束会有一定程度的展宽, 演变过程与指数项、折射率结构常量、湍流内外尺度、拓扑荷和相干长度等密切相关. 在近距离处, 偏振度会经历一段振荡及升降变化过程, 当传输距离足够远时, 它会趋于一个稳定值, 且该值等于光源平面上的初始偏振度. 指数项值越接近于 3.1, 折射率结构常量越大, 湍流外尺度越大或者内尺度越小, 即湍流越强时, 偏振度变化越快. 拓扑荷越小, 偏振度变化越快; 光源相干性对偏振度变化的影响较为复杂, 不再遵循统一的变化规律.

#### 参考文献

- [1] ZHU Y B, ZHAO D M, DU X Y. Propagation of stochastic Gaussian-Schell model array beams in turbulent atmosphere [J]. *Optics Express*, 2008, **16**(22): 18437-18442.
- [2] JI X L, LI X Q. Directionality of Gaussian array beams propagating in atmospheric turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2009, **26**(2): 236-243.
- [3] WANG T, PU J X, CHEN Z Y. Propagation of partially coherent vortex beams in a turbulent atmosphere [J]. *Optical Engineering*, 2008, **47**(3): 036002.
- [4] WANG Hai-yan, CHEN Chuan-lin, DU Jia-lei, et al. Propagation of Bessel-Gaussian beam with optical vortices in turbulent atmosphere [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, **42**(5): 505-510.  
王海燕, 陈川琳, 杜家磊, 等. 贝塞尔高斯涡旋光束在大气湍流中的传输特性 [J]. *光子学报*, 2013, **42**(5): 505-510.
- [5] HUANG Yong-ping, ZENG An-ping. Propagation properties of Hermite-Gaussian beams in Non-Kolmogorov turbulence [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(7): 818-823.  
黄永平, 曾安平. 厄米-高斯光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的传输性质 [J]. *光子学报*, 2012, **41**(7): 818-823.
- [6] FU Wen-yu, LI Gao-qing, LIU Xiao-jun. Propagation of partially coherent vortex beams in the turbulence atmosphere [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 2958-2962.  
付文羽, 李高清, 刘小军. 部分相干涡旋光束在大气湍流中的远场传输特性 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 2958-2962.
- [7] LIU X H, PU J X. Investigation on the scintillation reduction of elliptical vortex beams propagating in atmospheric turbulence [J]. *Optics Express*, 2011, **19**(27): 26444-26450.
- [8] WEN C, JOSEPH W H, QIWEN Z. Propagation of vector vortex beams through a turbulent atmosphere [J]. *Optics Express*, 2009, **17**(20): 17829-17836.
- [9] JI X L, CHEN X W, LÜ B D. Spreading and directionality of partially coherent Hermite-Gaussian beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2008, **25**(1): 21-28.
- [10] DOGARIU A, AMARANDE S. Propagation of partially coherent beams: turbulence-induced degradation [J]. *Optics Letters*, 2003, **28**(1): 10-12.
- [11] GBUR G, WOLF E. Spreading of partially coherent beams in random media [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, **19**(8): 1592-1598.
- [12] LING D, LI J, CHEN J. Analysis of eigenfields in the axicon-based Bessel-Gauss resonator by the transfer-matrix method [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2006, **23**(4): 912-918.
- [13] HRICHA Z, BELAFHAL A. Focal shift in the axisymmetric Bessel-modulated Gaussian beam [J]. *Optics Communications*, 2005, **255**: 235-240.
- [14] EYYUBOGLU H T. Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence [J]. *Applied Physics B*, 2007, **88**: 259-265.
- [15] RAO C, JIANG W, LING N. Atmospheric characterization with Shack-Hartmann wavefront sensors for non-Kolmogorov turbulence [J]. *Optical Engineering*, 2002, **41**(2): 534-541.
- [16] ZILBERMAN A, GOLBRAIKH E, KOPEIKA N S. Propagation of electromagnetic waves in Kolmogorov and non-Kolmogorov atmospheric turbulence: three-layer altitude model [J]. *Applied Optics*, 2008, **47**(34): 6385-6391.
- [17] TOSELLI I, AGRAWAL B, RESTAINO S. Light propagation through anisotropic turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2011, **28**(3): 483-488.
- [18] RAO C, JIANG W, LING N. Spatial and temporal characterization of phase fluctuations in non-Kolmogorov atmospheric turbulence [J]. *Journal of Modern Optics*, 2000, **47**(6): 1111-26.
- [19] DU W H, TAN L Y, MA J. Theory study on beam wander for laser beam propagation through non-Kolmogorov turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(s2): 1856-1860.  
都文和, 谭立英, 马晶. 非柯尔莫哥诺夫湍流光束漂移理论的研究 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(s2): 1856-1860.
- [20] WOLF E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams [J]. *Physics Letters A*, 2003, **312**: 263-267.
- [21] SALEM M, KOROTKOV A O, DOGARIU A. Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Waves Random Media*, 2004, **14**(4): 513-523.
- [22] WU G, ZHAO T, REN J, et al. Beam propagation factor of partially coherent Hermite-Gaussian beams through non-Kolmogorov turbulence [J]. *Optics and Laser Technology*, 2011, **43**(7): 1225-1228.
- [23] JEFFREY A, ZWILLINGER D. Table of integrals, series, and products [M]. New York: Academic Press, 2007.