

doi: 10.3788/gzxb20134209.1091

基于现代谱估计技术的干涉光谱复原算法

付占方, 刘学斌

(中国科学院西安光学精密机械研究所 光谱成像技术实验室, 西安 710119)

摘要: 为了克服传统光谱复原算法理论上的缺点, 引入了现代谱估计技术的概念和基本算法. 利用两类现代谱估计方法(自回归模型和多重信号分类算法)进行干涉光谱复原, 比较了复原光谱与传统光谱复原算法的效果, 并对文中所用几种方法的局限性加以验证和说明. 研究结果证明了现代谱估计方法应用于光谱复原中完全可行且性能优异, 在传感器获取的数据长度有限时可以获得更高的光谱分辨率.

关键词: 干涉光谱复原; 现代谱估计; 自回归模型; 多重信号分类算法

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)09-1091-6

Spectrum Reconstruction Algorithms Based on Modern Spectrum Estimation

FU Zhan-fang, LIU Xue-bin

(Laboratory of Spectral Imaging Technique, Xi'an Institute of Optics & Precision Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, China)

Abstract: To overcome the shortcoming of the conventional spectrum recovery method, concepts and basic algorithms of a modern spectrum estimation are introduced. Two different methods (auto-regressive parametric model and multiple signal classification algorithm) are used to reconstruct light spectrum from interferogram. Compared with conventional method for spectrum reconstruction, the modern spectrum estimation methods can well be adopted in spectrum reconstruction and perform excellently, especially when it is used to get higher spectrum resolution from a short series of data recorded.

Key words: Interferogram spectrum reconstruction; Modern spectrum estimation; Auto-regressive model; Multiple signal classification algorithm

0 引言

干涉光谱技术又称傅里叶变换光谱技术, 是目前光谱学中重要的研究和应用方向. 成像干涉光谱技术的核心主要包括: 干涉图的获取, 重在以易于实现的方式, 将信息调制到空间域或者时差域, 以便传感器记录; 从已获取的干涉图中高质量地还原出探测目标的光谱. 基于干涉光谱技术的基本原理是干涉图与光谱互为对傅里叶变换对, 且随着快速傅里叶变换(Fast Fourier Transformation, FFT)及相关软硬件的发展, 目前主流光谱复原算法基本都基于快速傅里叶变换^[2]. 传统的光谱复原算法步骤繁

琐、光谱分辨率很低, 而且传统算法的原理也决定了要进一步提升光谱复原质量只能通过对前段系统的改进. 简小华等首次用参量化模型法和多重信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)完成了单色光的干涉数据处理^[3], 但由于复色光光谱复原中存在问题及一些细节处理, 仅使用了个体算法而未能使谱估计方法作为一个整体引起重视.

本文将现代谱估计技术应用于复色光光谱复原中, 引入现代谱估计中的自回归(Auto-Regressive, AR)模型和特征向量分解, 并相应仿真实现 Burg 法和加权 Music 算法的光谱复原, 验证现代谱估计算法在干涉光谱复原中的性能.

基金项目: 国家自然科学基金(No. 41005109)和西部之光人才基金(No. Y129281213)资助

第一作者: 付占方(1985-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为通信与信息系统, 数字图像处理. Email: willgoby@163.com

导师(通讯作者): 刘学斌(1965-), 男, 研究员, 主要研究方向为 CCD 成像、数字图像处理等. Email: lxb@opt.ac.cn

收稿日期: 2013-03-07; **录用日期:** 2013-05-02

1 传统光谱复原算法与经典谱估计算法原理与关系

1.1 传统光谱复原算法的流程

传统干涉光谱复原需要经过干涉图修正、滤波、切趾、相位修正及傅里叶变换等过程. 其中, 干涉图修正主要针对数据中存在的误差, 如探测器误差、光学系统误差等; 切趾主要是消除仪器线型函数的旁瓣影响^[4]; 相位修正主要是消除数据采样位置偏移等导致的相位误差, 然后对其进行傅里叶变换得到光谱曲线^[5]. 传统的光谱复原算法原理简单, 处理过程直观, 复原质量有一定的保证, 而且随着计算机硬件的发展以及 FFT 的成熟, 有较为广泛的应用.

但是传统算法有一个理论上的缺点: 截断效应. 实际中传感器的大小总是有限, 不可能完全获取到全部的干涉图, 实际干涉图总是理想干涉图的一个截断. 切趾固然能在一定程度上抑制旁瓣泄漏对信号的影响, 但这是以整体光谱图的一定失真作为代价的^[6-7]. 故将现代谱估计的相关理论和算法引入光谱复原过程, 并与传统复原方法做比较, 后续结果证明, 在一定条件下, 现代谱估计算法优于传统算法.

1.2 经典谱估计算法与传统光谱复原算法比较

经典谱估计方法可分为两类, 一类称之为间接法, 又称布莱克曼-杜基谱估计法 (Blackman-Tukey algorithm, BT), 它先依信号序列估计其自相关函数值, 然后以适当的方式对自相关函数的估计进行加权, 最后对加权了的自相关函数做傅里叶变换获得功率谱估计; 另一种为直接法, 通过对观测到的数据样本直接进行傅里叶变换, 然后将所得的结果的幅值平方后得到功率谱估计, 这种方法又称为周期图法^[8].

传统的光谱复原方法, 其实质和 BT 法相同, 都是对信号的自相关函数做一定的加权后做傅里叶变换获取信号的功率谱, 略有不同的是, 在光谱复原中获取的是光信号电场分量的自相关函数即干涉图, 而不是时域采样的光信号. 另外, 如果将干涉图作为原始采样信号直接做谱估计, 得到的谱估计理论上应该是实际光谱的平方.

经典谱估计法原理简单, 便于用 FFT 等技术减小计算量, 得到了广泛应用, 但经典法估计方差大, 谱分辨率差 (分辨率约为数据长度的倒数)^[9], 观测数据长度较短时难以应用, 上述缺点是由于它隐含地采用了一个看来似乎很自然的假设, 即除了能得到的 N 个数据外, 信号的其它值被认为是零 (等效而言, 即干涉图除了能探测到的部分, 其它的值被

当作零), 但实际上, 序列、干涉图或者自相关函数的那些未能观测到或未估计出来的部分并不全是零.

2 现代谱估计方法介绍

现代谱估计采用参量法来改进功率谱估计的分辨能力, 如 AR 模型法、最大熵法和多重信号分类算法等^[10]. 这些方法不再认为观测到的 N 个数据以外的数据全为零, 因此克服了经典法的这个缺点, 提高了谱估计的分辨率.

2.1 AR 参量法

任何具有有理功率谱密度的随机信号 $x(n)$ 都可以看成由白噪音 $\omega(n)$ 激励的物理网络所形成.

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \omega(n) \quad (1)$$

式中, p 为 AR 模型的参量.

对式(1)进行 z 变换可得 AR 模型的传递函数为

$$H(z) = \frac{x(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2)$$

这种模型即为 p 阶自回归模型或简称 AR (Auto-Regressive) 模型, 其系统函数只有极点, 没有零点, 因此也成为全极点模型. 其输出功率谱为

$$P_x(\omega) = \frac{\sigma_\omega^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}|^2} \quad (3)$$

只要求得噪音信号 σ_ω^2 和所有 a_k 的值, 就可以得到随机信号 $x(n)$ 的功率谱.

通过正则方程来描述 AR 模型参量 a_k 与信号 $x(n)$ 的自相关函数之间的关系.

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \cdots & r_x(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

对于式(4)的求解, 由于涉及到矩阵求逆, 运算量大、速度很慢. Levenson-Durbin(L-D)递推法由于利用了方程组系数矩阵 (自相关矩阵) 的性质, 使运算量大大减少, 加快了算法的运算速度.

Burg 算法是 AR 模型的一种谱估计算法, 其基本思想是直接从观测的数据利用线性预测器的前向和后向预测的总均方误差之和为最小的准则来估计

反射系数,进而通过 L-D 算法的递推公式求出 AR 模型优化参量. 设观察到的 N 个数据为 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, 则具体算法为:

1) 取 $k=1$, 初始化: $e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n), 0 \leq n \leq N-1, N$ 为数据长度

$$\sigma_{w0}^2 = R(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \quad (5)$$

2) 计算反射系数 ρ_k

$$\rho_k = \frac{-2 \sum_{n=k}^{N-1} e_{k-1}^f(n) e_{k-1}^b(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1} \{ [e_{k-1}^f(n)]^2 + [e_{k-1}^b(n)]^2 \}} \quad (6)$$

3) 计算滤波器系数 $a_k(k) = \rho_k$

$$a_k(m) = a_{k-1}(m) + \rho_k a_{k-1}(k-m) \quad (7)$$

$$(m=1, 2, \dots, k-1)$$

$$\sigma_{wk}^2 = (1 - \rho_k^2) \sigma_{w, k-1}^2 \quad (8)$$

4) 递推高一阶前后向预测误差计算

$$e_k^f(n) = e_{k-1}^f(n) + \rho_k e_{k-1}^b(n-1) \quad (9)$$

$$e_k^b(n) = e_{k-1}^b(n-1) + \rho_k e_{k-1}^f(n) \quad (10)$$

5) 令 $k \leftarrow k+1$, 重复 2)~4), 直到 σ_p 满足要求.

AR 模型算法参量推导过程计算简便, 且只要模型的阶数较高, 能够比较好地逼近被建模的随机过程. Burg 递推算法避免了先计算自相关函数从而提高了计算速度, 对于较短的观察序列仍能得到比较正的估计, 因此得到了普遍的应用, 本文也将在仿真实验中验证其对于较短长度的干涉曲线的反演效果.

2.2 MUSIC 算法

MUSIC 算法^[11]是一种基于矩阵特征分解的功率谱估计技术, 它将信号的自相关矩阵 Φ_x 进行特征分解, 得到与信号分量相对应的信号子空间 Φ_s 和与信号分量相正交的噪音子空间 Φ_w , 并利用这两个子空间的正交性来估计信号的参量, 即

$$\Phi_x = \Phi_s + \Phi_w \quad (11)$$

式中, $\Phi_x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i v_i^H, \Phi_w = \sigma_w^2 I$.

该算法的基本思想是对真实相关矩阵 Φ_x 进行特征分解, 然后按照式(12)寻找谱峰估计正弦波频率.

$$P_{\text{music}}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=p+1}^N |e^H v_i|^2}, \quad p > N-p \quad (12)$$

$$P_{\text{music}}(\omega) = \sum_{i=1}^p |e^H v_i|^2, \quad p \leq N-p \quad (13)$$

式中 ω 表示频率, e 表示信号矢量. 理论上, 当 $\omega = \omega_i$ 时, $e = e_i, P_{\text{music}}(\omega) \rightarrow \infty$, 由于存在估计误差, 其值不可能无穷大, 但在正弦波频率上或在其附近将有一个峰, 极为对应信号的谱估计.

MUSIC 算法是一种噪音子空间谱估计算法,

而在小信噪比的情形下, 噪音子空间很难得到准确估计. 为了避免噪音子空间不准确带来的影响, 本文引入了加权 MUSIC 算法, 利用信号协方差矩阵的全部特征向量, 同时对特征向量进行加权, 以使不同特征向量对 MUSIC 谱的作用不同^[12]. 使用噪音子空间特征值作为对应权重, 计算谱估计为

$$P_{\text{music}}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=p+1}^N \left(\frac{|e^H v_i|^2}{\lambda_i} \right)} \quad (14)$$

式中 λ_i 对应噪音子空间的特征值. 利用此加权 MUSIC 算法, 可将传统 MUSIC 算法看作加权 MUSIC 算法权重全为 1 的一个特例, 当然实际中也可有其他的加权策略. 研究表明, 在低信噪比下, 加权 MUSIC 算法性能更优.

由于 MUSIC 算法需要进行特征分解和谱峰搜索, 算法的运算量比较大, 算法的运算速度相对于 FFT 算法要慢上一些. 要提高 MUSIC 算法的运算速度, 可以通过减小算法的本身计算量和并行处理两个方面进行. 文献[13]提出了一种改进的 TLS-ESPRIT 算法, 降低了算法的计算量. 文献[14]该出了一种 root-Music 算法来提高算法的运算速度. 文献[15]通过硬件的合理配置来提高算法的运算速度. 在文献[16]中提出了一种适合于并行运算的特征分解方法——Jacobi 迭代法, 为 MUSIC 算法的高效化实现提供了一个的重要方向.

3 仿真流程及结果

分别取实际激光干涉图、理想干涉曲线、理想光谱曲线(斜长岩)计算得到的干涉曲线, 三种情形下以不同的信噪比和采样长度检测三种算法的性能差异和优缺点. 此外, 需要注意在采用传统复原算法时, 一般都要对数据进行切趾处理, 但在现代谱估计中, 预处理时无需进行切趾处理, 因为现代谱估计的一条重要假设就是不再默认观测不到或是估计不到的数据全为零.

3.1 激光干涉曲线光谱复原

取某卫星搭载光谱仪地面定标时采集的激光干涉数据(图 1), 做简单预处理后采用三种复原算法进行光谱复原, 如图 2.

由图 2 可以看到, 加权 MUSIC 算法和 Burg 法都有很好的性能, 光谱分辨率高, 半高宽度仅为传统算法的 1/5, 而且收敛特性理想, 几乎无过渡带, 特别是加权 MUSIC 算法, 已经很接近理想激光信号的谱特性; 而且由于较高的光谱分辨率, 其频率点的位置更加准确, 传统复原算法需要进行曲线拟合才能得到准确的频率点. 由于此干涉数据未经过严格

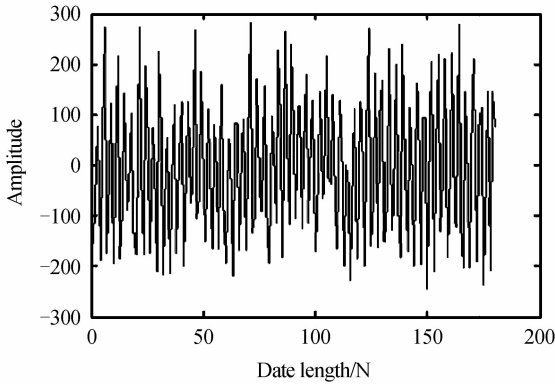


图1 实际激光干涉数据
Fig. 1 Real interferogram of laser

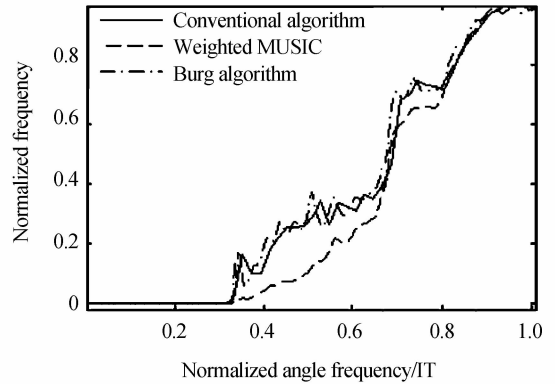


图4 干涉曲线复原光谱
Fig. 4 Reconstructed spectrum from interferogram

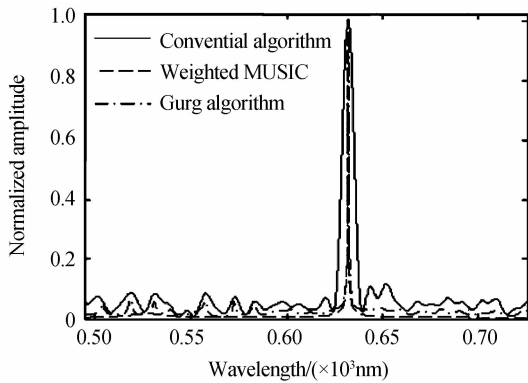


图2 复原激光光谱
Fig. 2 Reconstructed laser spectrum

3.3 对确定光谱求干涉曲线后再做复原仿真

对波长为 400~1 000 nm 的斜长岩光谱曲线做逆傅里叶变换得到干涉图,截取零光程差附近的 100 个数据点,在不同信噪比下用三种算法对其进行光谱复原,如图 5~7.

在大信噪比时,特征向量算法和 Burg 法都有很好地复原质量,特别是光谱曲线的细微起伏都能很好的反映出来,且谱峰分辨率高于传统算法,而传统算法此时已经丢失了较多的细节信息;但在分辨率降低时,Burg 法复原的光谱曲线中出现了较多的假峰,这是由于在信噪比较低时,AR 谱估计中所假设的全极点模型,在观察噪音较大时已不再合适,此

的预处理,Burg 法复原的光谱曲线中,仍然存在与传统复原算法较为一致但数量与幅度均大为减小的扰动.

3.2 理想干涉曲线的复原仿真

取一组已经经过严格预处理,去除噪音影响的干涉数据,认为其为一条理想的干涉曲线,前后各截去 100 个长度的数据位(图 3),再分别用三种算法进行光谱复原,如图 4.

显然,Burg 法和特征向量算法都获得了更高的光谱分辨率,良好地反映了光谱曲线更为细节的起伏特性,在探测器获取的数据长度有限时,有着格外重要的意义.

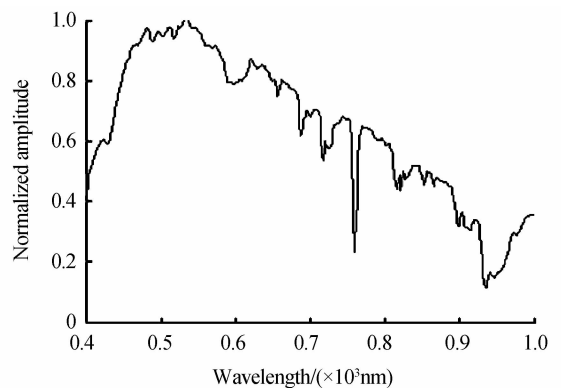


图5 斜长岩原始光谱曲线
Fig. 5 Spectrum of anorthosite

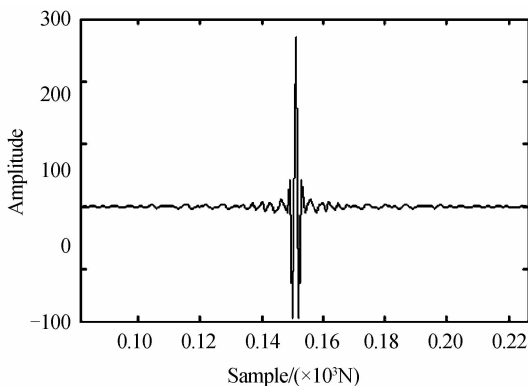


图3 理想干涉曲线
Fig. 3 Ideal interferogram

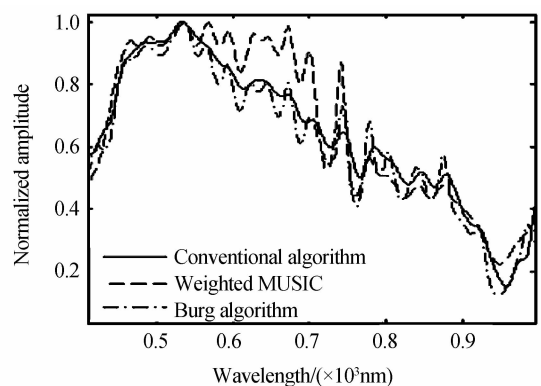


图6 15 dB 信噪比下斜长岩复原光谱
Fig. 6 Reconstructed anorthosite spectrum at 15 dB SNR

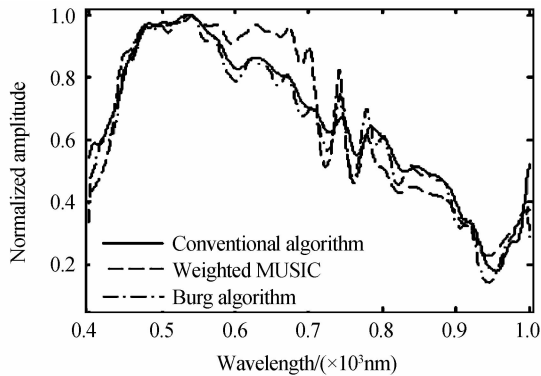


图 7 30 dB 信噪比下斜长岩复原光谱

Fig. 7 Reconstructed anorthosite spectrum at 30 dB SNR 时的 AR(p)模型已经变成了一个既有极点,也有零点的 ARMA(p, p)模型. 故在低信噪比时,认为基于 AR 模型的算法已经不再优于传统复原算法.

3.4 结果分析

引入峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为高光谱成像质量评价函数,以此来量化比较三种复原算法的性能,用 $P(x)$ 表示理想光谱曲线, $\tilde{P}(x)$ 表示相应的复原曲线,则

$$\text{PSNR(dB)} = 10 \log \left[\frac{(2^n - 1)^2}{\frac{1}{n} \sum_x (P(x) - \tilde{P}(x))^2} \right]$$

对于有理想数据做对比的后两组仿真实验,计算其 PSNR,结果如表 1.

表 1 三种算法的 PSNR 比较

Table 1 The PSNR of the three algorithms

| Algorithm | Ideal interferogram | Anorthosite spectrum at 15dB SNR | Anorthosite spectrum at 30dB SNR |
|------------------------|---------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Conventional algorithm | 25.42 | 26.47 | 26.94 |
| Burg algorithm | 27.65 | 26.53 | 30.21 |
| Weighted MUSIC | 24.79 | 24.35 | 26.28 |

结合前文的复原图谱可知:在大信噪比时, Burg 算法的性能优异,复原出的光谱曲线有更高的光谱分辨率;而噪音较大且数据长度较长时,其性能已不再优于传统复原算法或其他谱估计方法,需要寻找性能更优的算法,如可调高分辨率估计算法、高分辨率小波功率谱估计法等.

MUSIC 算法的设计初衷是用于检测白噪音背景下的有限个正弦信号,故在估计单频信号时性能优异,但对于复色光谱的复原时在幅值上有一定的误差.

表 2 结合三种算法的分辨率以及运行时间对算法进行粗略比较.

表 2 三种算法的运行时间比较

Table 2 Theruntime of the three algorithms

| Algorithm | Runtime/s | Restoration effect |
|------------------------|-----------|------------------------------|
| Conventional algorithm | 8.7 | Limite-resolution&high speed |
| Burg algorithm | 19.4 | High-resolution&low speed |
| Weighted MUSIC | 19.1 | High-resolution&low speed |

现代谱估计算法涉及了大量的矩阵运算,AR 参量法和加权 MUSIC 算法都针对矩阵运算做了相应的改进,但速度上仍要慢于可直接利用 FFT 的传统算法.

4 结论

理论上,现代谱估计方法得到的额外谱分辨率是其自相关函数的外推,特别是探测器获取的数据长度较短时,现代谱估计方法可以得到更高的光谱分辨率.

对于噪音背景下的单频信号,加权 MUSIC 算法有更好的性能,这一点可以用来进行单色光干涉图反演,在定标之类的应用场合有重要意义.分析和比较表明,现代谱估计的算法用于干涉图反演算法中性能优异,有助于得到分辨率更高、质量更好的复原光谱.

参考文献

- [1] LÜ Qun-bo, YAO Tao, XIANG-LI Bin, *et al.* Spectrum recovery method for interferometric data[J]. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2010, **30**(1): 114-117.
吕群波,姚涛,相里斌,等.干涉数据光谱反演方法研究[J]. *光谱学与光谱分析*, 2010, **30**(1): 114-117.
- [2] JING Juan-juan, XIANG-LI Bin, LÜ Qun-bo, *et al.* Advance in interferogram data processing technique[J]. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2011, **31**(4): 865-870.
景娟娟,相里斌,吕群波,等.干涉光谱数据处理技术研究进展[J]. *光谱学与光谱分析*, 2011, **31**(4): 865-870.
- [3] JIAN Xiao-hua, ZHAN Chun-min, ZHAO Bao-chang, *et al.* A new method for spectrum reproduction and interferogram processing[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(2): 824-829.
简小华,张淳民,赵葆常,等.研究干涉图处理与光谱复原的一种新方法[J]. *物理学报*, 2007, **56**(2): 824-829.
- [4] GAO Jing, JI Zhong-ying, CUI Yan, *et al.* Wavelength calibration of spatially modulated imaging fourier transform spectrometer[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(11): 2853-2856.
高静,计忠瑛,崔燕,等.空间调制干涉光谱成像仪光谱定标技术研究[J]. *光子学报*, 2009, **38**(11): 2853-2856.
- [5] XIANG-LI Bin, YUAN Yan. Some aspects of the data processing of the single sided interferogram [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(12): 1869-1874.
相里斌,袁艳.单边干涉图的数据处理方法研究[J]. *光子学报*, 2006, **35**(12): 1869-1874.
- [6] ZHANG Wen-juan, ZHANG Bing, ZHANG Xia, *et al.* Effects of apodization functions of imaging Fourier Transform spectrometer on reconstructed spectrum [J]. *Journal of*

- Infrared and Millimeter Waves*, 2008, **27**(3): 227-232.
- 张文娟,张兵,张霞,等.干涉成像光谱仪切趾函数对复原光谱的影响分析[J].红外与毫米波学报,2008,**27**(3):227-232.
- [7] CUI Yan, JI Zhong-ying, GAO Jing, *et al.* Study on the spectral radiometric calibration method of the spatially modulated imaging fourier transform spectrometer[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(12): 1718-1721.
- 崔燕,计忠瑛,高静,等.空间调制干涉光谱成像仪光谱辐射度定标方法研究[J].光学学报,2005,**25**(12):1718-1721.
- [8] 陆光华,毛永才.随机信号处理[M].西安:西安电子科技大学出版社,2002.
- [9] GAO Xiao-feng, XIANG-LI Bin. The new study of quality factor in resolution enhancement method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(6): 1133-1137.
- 高晓峰,相里斌.光谱分辨率增强方法品质因子研究[J].光子学报,2007,**36**(6):1133-1137.
- [10] ZHI Dong-dong, WEI Hong-kai, DU Bin, *et al.* Comparison of several different model parameter methods in modern spectral estimation [J]. *Shipboard Electronic Countermeasure*, 2009, **32**(1): 100-102.
- 支冬栋,卫红凯,杜斌,等.现代谱估计法中几种不同模型参量估计法的比较[J].舰船电子对抗,2009,**32**(1):100-102.
- [11] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. *IEEE Transactions Antennas Propagation*, 1986, **34**(3): 276-280.
- [12] ZEN Yao-Ping. A MUSIC algorithm based on uniform circular array in the colored noise fields[J]. *Journal of Xi'an University of Posts and Telecommunications*, 2011, **16**(1): 26-28.
- 曾耀平.色噪声下圆阵的全加权 MUSIC 算法[J].西安邮电学院学报,2011,**16**(1):26-28.
- [13] TRIPATHY P, SRIVASTAVA S, SINGH S N, *et al.* A modified TLS-ESPRIT-Based method for low-frequency mode identification in power systems utilizing synchrophasor measurements[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011, **26**(2): 719-727.
- [14] AZARBAR A, DADASHZADEH G. A new DOA estimation based on direct data domain algorithm[C]. 2011 IEEE GCC Conference and Exhibition, 2011, **19**(22): 205-208.
- [15] MINSEOK K, KOICHI I, HIROYUKI A, *et al.* Mplementation of FPGA based fast DOA estimator using unitary MUSIC algorithm [C]. 2009 IEEE Rader Conference, 2009, **20**(22): 4-8.
- [16] WANG Fei, WANG Jian-Ye, ZHANG An-Tang, *et al.* The implementation of high-speed parallel algorithm of real-valued symmetric matrix eigenvalue decomposition through FPGA [J]. *Journal of Air Force Engineering university(Natural Science Edition)*, 2008, **9**(6): 67-70.
- 王飞,王建业,张安堂,等.实对称矩阵特征值分解告诉并行算法的FPGA实现[J].空军工程大学学报(自然科学版),2008,**9**(6):67-70.