

doi:10.3788/gzxb20134207.0878

基于强度传输方程的多重网格算法

刘红,陶少杰,程鸿,黄江林

(安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039)

摘要:为了从直接测量得到的强度图像中恢复相位信息,研究了基于强度传输方程的多重网格算法.从最粗层开始计算,给定初值,迭代出一个解,将此解作为最细层的初值,然后在最细层计算出一个近似解.进一步计算其残差,并将残差限制到较粗网格层求解,直至最粗层,然后逐层修正细网格层的解.利用循环在粗细不同的网格层来消除不同频率的误差分量,得到相位的精确解.仿真实验和真实实验表明,多重网格算法能够较好地由强度图像恢复物体的真实相位.

关键词:相位恢复;强度传输方程;多重网格;网格层

中图分类号:O436.1

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2013)07-0878-5

Multigrid Algorithm Based on Transport of Intensity Equation

LIU Hong, TAO Shao-jie, CHENG Hong, HUANG Jiang-lin

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing (Ministry of Education), Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Multigrid algorithm based on the transport of intensity equation is researched to retrieve phase information from the intensity measurement. Given initial value and started from the coarsest grid, a solution is obtained by calculating; regarded it as the finest initial value, an approximate solution is obtained by calculating; then its residual is calculated and it is restricted to coarser grid and solving, until to the coarsest grid, followed by corrected the solution of finer grid. Finally, different frequency error components are eliminated by cycle which on different sizes grids, and the accurate solution is obtained. The simulation and real experiments show that the multigrid algorithm can well retrieve the actual phase of the object from the intensity image.

Key words: Phase retrieval; Transport of intensity equation; Multigrid; Clathrum

0 引言

由于光的频率太高,现有的设备只能探测到光场的强度信息,无法直接获得相位信息,因此需要利用已知的强度信息来间接恢复相位信息,这就是相位恢复技术,在不同的物理学分支学科和工程应用中有重要的意义^[1-4]. 相位恢复技术目前主要包括 GSF(Gerchberg-Saxton-Fienup)迭代算法^[5]和基于强度传输方程(Transport of Intensity Equation, TIE)的确定性求解方法.其中,TIE方法只需要测量与光轴垂直的二到三个平面上的强度,就可通过

求解二阶微分方程(亦即用非迭代的确定性算法)来重构波的空间相位,克服了迭代算法的迭代不确定性、抗噪性能差等缺点.对于求解 TIE,有四种经典的方法:多重网格法^[6-8]、傅里叶法^[9]、Zernike 多项式法^[10]以及 Green 函数法^[11].

本文针对多重网格方法^[12],利用最粗层的解作为最细层的初解以加速收敛,在不同粗细的网格层通过足够的 V 循环计算残差以消除不同频率的误差来修正细层的解,并且给出了相关的模拟实验和真实实验结果.

基金项目:博士点基金(No. 20113401130001)、安徽大学博士科研启动基金(No. 33190049)、安徽省教育厅自然科学基金重点(No. KJ2009A60)和安徽大学“211 工程”学术创新团队基金(No. KJTD007A)资助

第一作者:刘红(1968-),女,副教授,博士,主要研究方向为计算视觉、信号处理. Email:liuhong@ahu.edu.cn.

收稿日期:2012-12-10;录用日期:2013-03-14

1 强度传输方程

图 1 为波传播示意. 通过试片后的平面波 (plane wave), 传播方向会发生改变, 也就是相位发生了改变, 在成像平面上呈现出强度增强与减弱的分布. 在不同的成像平面图像强度变化的关系中, 包含了通过试片后平面波所改变的相位信息, 而 TIE 就是描述强度分布与相位分布之间的关系式. 因此, 可以通过测量不同成像平面的强度分布, 求解 TIE 得到其相位信息^[11,13-15].

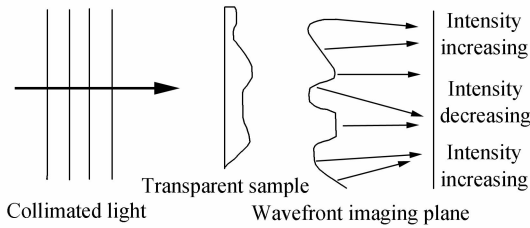


图 1 波传播示意

Fig. 1 Sketch of wave propagation

单色电磁波的复振幅表示为

$$u(x, y, z) = \sqrt{I(x, y, z)} e^{i\phi(x, y, z)} \quad (1)$$

式中 $I(x, y, z)$ 是强度, $\phi(x, y, z)$ 是相位.

假设光传播的方向是沿 z 轴方向, 傍轴近似条件下, $u(x, y, z)$ 满足抛物面方程, 即

$$(2ik\partial_z + \Delta)u(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

式中 $\partial_z = \partial/\partial z$ 表示强度分布沿 z 轴的变化量, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ 是梯度算子, $k = 2\pi/\lambda$ 是波数, $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 表示二维拉普拉斯算子. 通过计算化简得到

$$-k\partial_z I = \nabla I \nabla \phi + I \Delta \phi = \nabla (I \nabla \phi) \quad (3)$$

式(3)即为 TIE^[11]. 可以看到, TIE 方程把强度 $I(x, y, z)$ 及强度变化 $\partial_z I$ 与相位 $\phi(x, y, z)$ 紧密联系起来. 式(3)中, 强度变化 $\partial_z I$ 可以通过在传播轴 z 轴的 $z_0 - \Delta z$ 和 $z_0 + \Delta z$ 处的强度测量求解得到, 如图 2.

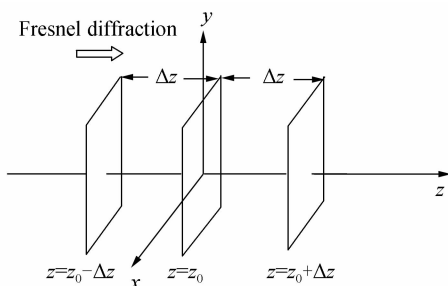


图 2 光强变化示意

Fig. 2 Schematic diagram of intensity change

$$\partial_z I = \frac{I(x, y, z_0 + \Delta z) - I(x, y, z_0 - \Delta z)}{2\Delta z} \quad (4)$$

式(4)即为求解强度变化的方程. 因此, 式(3)可以重新写成

$$\nabla [I(x, y, z_0) \nabla \phi(x, y, z_0)] =$$

$$-\frac{2\pi}{\lambda} \frac{I(x, y, z_0 + \Delta z) - I(x, y, z_0 - \Delta z)}{2\Delta z} \quad (5)$$

2 多重网格法求解 TIE

多重网格算法^[6-8]最早可追溯到 Southwell 的两层网格松弛方法, 然后由 Fedorenko 等人推广到多层, 1977 年 Brandt 将之用于实际应用^[16], 此后 Nicolaidis 和 Hackbusch 等证明了这个方法对于偏微分方程的收敛性. 从 20 世纪 80 年代开始, 多重网格算法已深入到计算流体力学、时间相关问题、波动方程、积分方程等领域, 与有限差分结合, 成为求解偏微分方程最好的方法之一. 将方程(3)右边扩展为

$$\begin{aligned} \nabla [I(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z)] &= \nabla I(x, y, z) \cdot \\ &\nabla \phi(x, y, z) + I(x, y, z) \nabla^2 \phi(x, y, z) = \\ &[\partial_x I(x, y, z) \partial_y I(x, y, z)] [\partial_x \phi(x, y, z) \cdot \\ &\partial_y \phi(x, y, z)]^T + I(x, y, z) \partial_x^2 \phi(x, y, z) + \\ &I(x, y, z) \partial_y^2 \phi(x, y, z) \end{aligned} \quad (6)$$

式(3)可写成

$$\begin{aligned} I(x, y, z) \partial_x^2 \phi(x, y, z) + I(x, y, z) \partial_y^2 \phi(x, y, z) + \\ \partial_x I(x, y, z) \partial_x \phi(x, y, z) + \partial_y I(x, y, z) \cdot \\ \partial_y \phi(x, y, z) = -k \partial_z I(x, y, z) \end{aligned} \quad (7)$$

相位的偏导数也可以通过式(8)和(9)计算

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i-1, j}}{2h} \\ \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \approx \frac{\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j-1}}{2h} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1, j} - 2\phi_{i, j} + \phi_{i-1, j}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_{i, j+1} - 2\phi_{i, j} + \phi_{i, j-1}}{h^2} \end{cases} \quad (9)$$

式中 h 为 x, y 方向上相同的离散化采样间隔, (i, j) 表示平面 $x-y$ 上离散点的坐标位置. 结合式(7)~(9), 可以得到离散后的方程为

$$\begin{aligned} A\phi_{i+1, j} + B\phi_{i-1, j} + C\phi_{i, j+1} + D\phi_{i, j-1} - 4I_{i, j}\phi_{i, j} = \\ -kh^2(\partial_z I)_{i, j} \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $A = [I_{i, j} + 0.5h(\partial_x I)_{i, j}]$, $B = [I_{i, j} - 0.5h(\partial_x I)_{i, j}]$, $C = [I_{i, j} + 0.5h(\partial_y I)_{i, j}]$, $D = [I_{i, j} - 0.5h(\partial_y I)_{i, j}]$.

通过分析可以看到, 只需测量垂直于光轴平面 z_0 处的聚焦强度以及 $z_0 - \Delta z$ 处的欠焦强度和 $z_0 + \Delta z$ 处的过焦强度, 通过求解方程(10)即可得到相位. 一般多重网格算法 (Multigrid, MG) 是从最细层开始计算的, 给定初值计算最细层的近似解, 然后计算其残差, 利用循环得到最终解. 方程(10)的唯一解可用最大值原理证明^[17]. 薛斌党等人提出的完全多重网格方法 (Full Multigrid, FMG)^[7] 是将最细层方程转化为最粗层, 由最粗层网格开始计算方程解, 并

延拓到较细层作为初值利用循环计算较细层的解,依次直到最细层.在此基础上,薛斌党等人此后提出将完全多重网格与共轭梯度结合(FMG-CG)^[6]来改善对于求解 TIE 的速度和准确度.

与完全多重网格法的初值选择和总体计算方式不同,本文多重网格方法的基本思想是:给定初值,在最粗层网格上求解,并将此解作为最细层平滑迭代的初值,然后计算残差,将残差传递到较粗层的网格上求解,计算此网格层的残差解的残差,直至最粗层用直接法求解,认为最粗层的残差解为精确解;然后将这个精确解插值到较细一层修正较细层的残差解,直至得到最细层的残差精确解,并修正先前得到的相位解,通过一定的循环,得到最终的相位解.平滑迭代方法可以用高斯赛德尔迭代法或者雅可比迭代法.一般 V 循环^[12]和本文 V 循环如图 3.

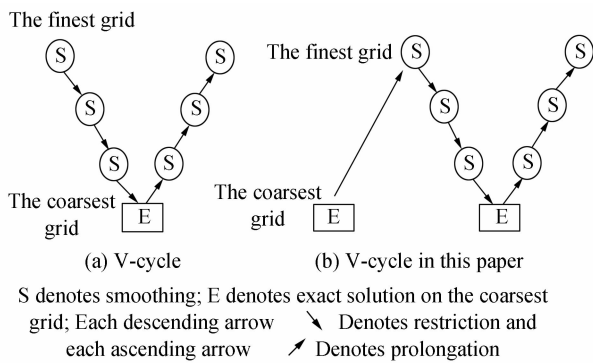


图 3 多重网格方法循环示意

Fig. 3 Structure of multigrid cycles

本文采用的插值算子 \mathbf{P} , 限制因子 \mathbf{R} 分别为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \quad (11)$$

3 实验

根据上面的理论分析,将本文算法步骤总结为:

1) 模拟试验中给定聚焦平面强度图像和相位图像,利用菲涅耳衍射得到与聚焦平面距离相同的两幅散焦图像,在真实试验中给定三幅强度图像,并根据式(4)计算强度微分;

2) 在最粗网格层求解方程(10)得到最粗网格层的解;

3) 将最粗层的解作为最细层的初解,利用 V 循环得到最细网格层的精确解.

3.1 模拟实验

在实验中,分别将“Baboon”图像和细节丰富的 Lena 图像作为输入平面 $z=z_0$ 的原始强度图像和

相位图像,像素为 256×256 ,像素尺寸 $dx \times dy = 4 \times 4 \mu\text{m}^2$,波长为 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$,强度在 $[0, 1]$ 之间变化,相位在 $[-\pi, \pi]$ 之间变化,如图 4.

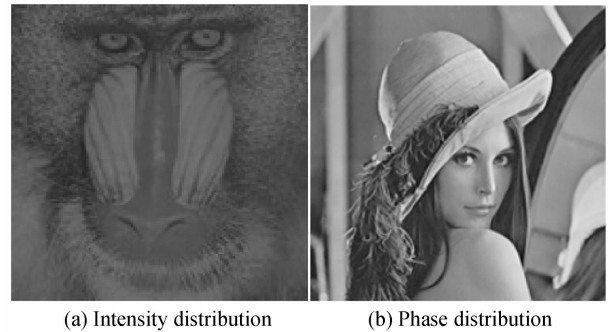


图 4 输入平面的强度和相位分布

Fig. 4 Simulated intensity and phase distribution in the input plane $z=z_0$

根据菲涅耳衍射传播公式^[18]计算输出平面 $\Delta z = 100 \mu\text{m}$ 上的欠焦图像和过焦图像的强度分布,如图 5.



图 5 散焦图像的强度分布

Fig. 5 Defocused image intensity distribution

实验中,多重网格设为三层,V 循环设为 10 次,迭代次数设为 500 次.通过求解 TIE,恢复输入平面上的相位信息,如图 6.



图 6 恢复的相位分布

Fig. 6 Phase distribution retrieval in object plane

采用相对均方根误差 (Root-Mean-Square, RMS) 来估计相位恢复的准确度,如式(12)所示,其中 ϕ 表示实验恢复的相位, ϕ_{true} 表示原始相位.本文算法和文献[6]中算法的误差结果如表 1.

表 1 本文算法与文献[6]算法的误差结果
Table 1 Error of the results between the proposed algorithm and Ref. [6]

Method	Proposed	MG ^[6]	FMG ^[6]	FMG-CG ^[6]
RMS/(%)	21.08	25.82	25.81	25.67

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum |\phi - \phi_{true}|^2}{\sum |\phi_{true}|^2}} \quad (12)$$

从图 6 和表 1 可以看出,对于复杂的光场和相位,本文所研究的多重网格法能较好地恢复相位,同时细节的恢复良好。

在图 4(a)和图 5 中的强度图像上分别叠加随机产生的噪音图像($\sigma \sim 0.1$),对每个噪音进行 50 次实验,结果取均值,并用 RMS 对恢复结果进行评估,结果如图 7. 横坐标为随机产生的标准差为 $\sigma = 0 \sim 0.1$ 的高斯噪音,纵坐标为恢复结果的 RMS. 可以看出, σ 在 0.06 以下,本文算法具有良好的抗噪性。

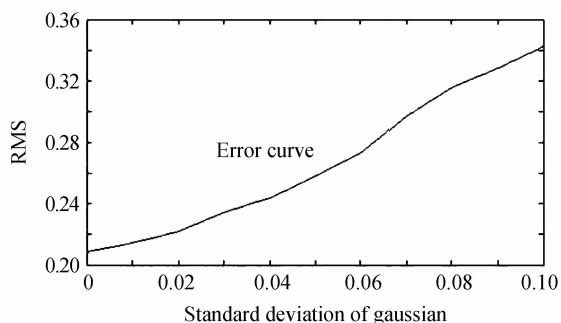


图 7 相对均方根误差曲线

Fig. 7 RMS curve

3.2 真实实验

本文搭建了真实实验平台,如图 8. 该实验装置由相机镜头、遮光管、CCD 和高准确度平移台组成. 将物体放置于相机镜头的前方(图 8 左侧),通过调节平移台的移动控制 CCD 的前后移动,从而拍摄不同距离的强度图像,并从平移台的控制面板上读出移动的距离 Δz .

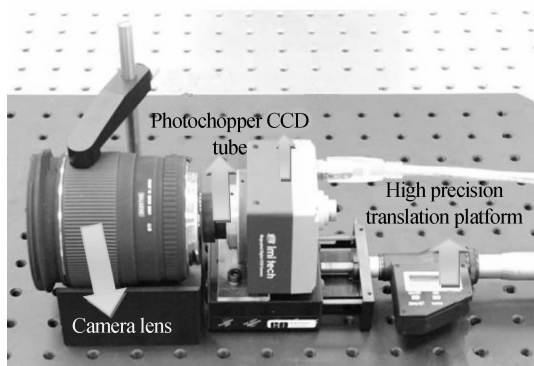
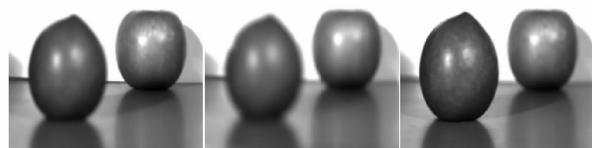


图 8 实验平台装置

Fig. 8 Experimental set up

用该实验平台装置拍摄了三幅强度图像, $\Delta z = 0.4 \text{ mm}$,波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$,如图 9.



(a) Focused intensity (b) Under focus intensity (c) Over focus intensity

图 9 利用试验平台获取的三幅强度图

Fig. 9 The three intensity images obtained by experimental platform

通过求解 TIE 得到相位,恢复结果如图 10. 相位图中颜色越深表示物体和 CCD 之间的距离越近,颜色越浅表示距离 CCD 越远(颜色的深浅是相对的).

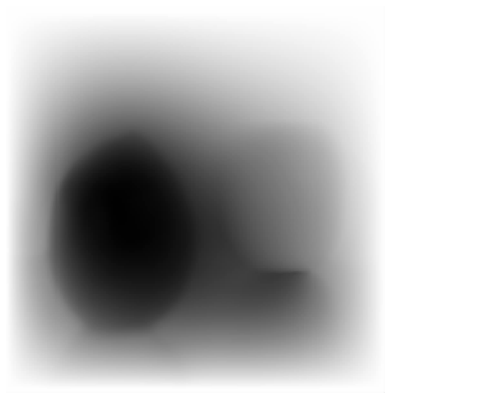


图 10 恢复的物平面相位分布

Fig. 10 Phase distribution retrieval in object plane

4 结论

本文主要研究了求解强度传输方程(TIE)来恢复相位的多重网格方法,以网格层本身的最粗层解作为最细层初值,减少了部分计算量. 通过模拟实验和真实实验,测试了该方法的有效性、稳定性,以及噪音情况下的恢复能力。

参考文献

- [1] PAGANIN D, BARTY A, NUGENT K A, *et al.* Quantitative phase- amplitude microscopy III: the effects of noise[J]. *Journal of Microscopy*, 2004, **214**(1): 51 - 61.
- [2] NUGENT K A. X-ray image reconstruction using the transport of intensity equation [C]. The 8th International Conference on X-ray Microscopy, 2005, **7**: 399-402.
- [3] TONOMURA A. Direct observation of vortex motion in high-TC superconductors by Lorentz microscopy[J]. *Physica B*, 2000, **280**(1-4): 227-228.
- [4] CHEN Xiu-shan, LI En-pu, ZHAO Jian-lin, *et al.* Measurement and reconstruction of 3D acoustic standing wave filed using digital holographic interferometry [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(1): 95-99.
陈秀山, 李恩普, 赵建林, 等. 三维超声驻波场的数字全息测量与重建研究[J]. *光子学报*, 2010, **39**(1): 95-99.
- [5] ELSER V. Phase retrieval by iterated projections[J]. *Journal Optical Society of America A*, 2003, **20**(1): 40-55.
- [6] XUE Bin-dang, ZHENG Shi-ling. Phase retrieval using the transport of intensity equation solved by the FMG-CG method [J]. *Optik-International Light and Electron Optics*, 2011, **122**(23): 2101- 2106.

- [7] XUE Bin-dang, ZHENG Shil-ing, JIANG Zhi-guo. Phase retrieval using the transport of intensity equation solved by full multigrid method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(6): 1514-1518.
薛斌党, 郑世玲, 姜志国. 完全多重网格法求解强度传输方程的相位恢复方法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(6): 1514-1518.
- [8] WANG Xiao, MAO Heng, ZHAO Da-zun. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2117-2122.
王潇, 毛珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12): 2117-2122.
- [9] DORRER C, ZUEGEL J D. Optical testing using the transport-of-intensity equation[J]. *Optics Express*, 2007, **15**(12): 7165-7175.
- [10] MATRIN A V, ALLEN L J. Measuring the phase of a Bose-Einstein condensate[J]. *Physical Review A*, 2007, **76**(5): 053606.
- [11] FRANK J, ALTMAYER S, WERNICKE G. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions[J]. *Journal Optical Society of America A*, 2010, **27**(10): 2244-2251.
- [12] WESSELING P. An introduction to multigrid methods[M]. John Wiley & Sons, 1992: 168-192.
- [13] MCVITIE S, NGO D T. Quantitative measurements of phase using the transport of intensity equation [C]. Electron Microscopy and Analysis Group Conference, 2008, **126**: 1742-1746.
- [14] CHENG Hong, ZHANG Quan-bing, WEI Sui, *et al.* Phase retrieval based on transport-of-intensity equation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(10): 1565-1570.
程鸿, 章权兵, 韦穗, 等. 基于强度传输方程的相位检索[J]. *光子学报*, 2011, **40**(10): 1565-1570.
- [15] GUREYEV T E, POGANY A, PAGANIN D M, *et al.* Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region [J]. *Optics Communications*, 2004, **231**(1-6): 53-70.
- [16] BRANT A. Multilevel adaptive solutions to boundary value problems[J]. *Mathematics of Computation*, 1977, **31**(138): 333-390.
- [17] SCHMALZ J A, GUREYEV T E, PAGANIN D M, *et al.* Phase retrieval using radiation and matter-wave fields: Validity of Teague's method for solution of the transport-of-intensity equation [J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(2): 023808.
- [18] MEZOUARI S, HARVEY A R. Validity of Fresnel and Fraunhofer approximations in scalar diffraction[J]. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2003, **5**(4): 86-91.