

doi:10.3788/gzxb20134206.0732

## 二阶总广义变分图像放大

吴玉莲<sup>1,2</sup>, 冯象初<sup>1</sup>, 姜东焕<sup>3</sup>

(1 西安电子科技大学 理学院, 西安 710071)

(2 西安医学院 公共课部, 西安 710021)

(3 山东科技大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266590)

**摘 要:** 为了在图像放大中获得更好的视觉效果, 提出了一种基于总广义变分性质的变分放大模型. 该模型将原始低分辨率图像作为被估计的高分辨率放大图像到所在空间的某个子空间的投影, 利用二阶总广义变分正则化迭代处理得到被估计放大图像. 通过分析新模型的性质, 给出了一种有效的原始对偶放大算法. 实验结果表明: 该方法能去除总变分放大方法产生的图像阶梯块效应, 恢复更多的细节边缘及纹理信息, 从而重构出高质量的图像; 相比于总变分图像放大方法和小波图像放大方法, 该方法具有更高的峰值信噪比和更小的均方误差.

**关键词:** 图像放大; 二阶总广义变分; 总变分; 原始对偶

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)06-0732-5

## Second Order Total Generalized Variation for Image Zooming

WU Yu-lian<sup>1,2</sup>, FENG Xiang-chu<sup>1</sup>, JIANG Dong-huan<sup>3</sup>

(1 School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(2 Common Course Department, Xi'an Medical College, Xi'an 710021, China)

(3 College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** To obtain higher resolution images, a new model for image zooming based on total generalized variation is proposed. Original low-resolution image is regarded as sub-space projection of zoomed image to its own space, and the final zoomed image is obtained by application of second order total generalized variation regularization. By analyzing the properties of the new model, an efficient primal-dual algorithm is introduced. Experimental results suggest that the proposed algorithm can remove block effect and keep more details, so the high quality image is reconstructed; the model is better than the total variation mode and the wavelet model in terms of both peak signal to noise ratio and root mean square error.

**Key words:** Image zooming; Second order total generalized variation; Total variation; Primal dual

## 0 引言

图像放大技术要求从一幅低分辨率的图像得到高分辨率的图像. 图像的放大和缩小在数字图像处理中担任着重要的角色. 在某些特殊的应用场合为了得到一个较好的视觉效果(如要突出某些细节), 经常需要一种有效方法来改变已有图像大小, 使图

像缩小和放大后仍有较高的质量.

实现图像放大的常用方法之一是插值技术. 现有的图像处理理论及常用的处理软件都是采用插值方法对图像进行放大和缩小, 如平移重复插值、双线性插值和样条插值等. 上述插值方法简单易实现, 用于图像插值也取得了不错的效果, 但这些方法都是用一些已知的光滑函数根据一定的光滑性要求逼近

基金项目: 国家自然科学基金(Nos. 61271294, 60872138)资助

第一作者: 吴玉莲(1978-), 女, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为小波理论、图像处理. Email: wyl\_wy711@163.com

导师: 冯象初(1962-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为偏微分方程理论、小波理论及图像处理. Email: xcfeng@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2012-12-19; 录用日期: 2013-03-05

原图像. 因为这种固定方式的局限性, 不可避免地会带来一些人工虚假信息. 因而, Belahmidi<sup>[1]</sup> 等提出了基于偏微分方程的图像放大方法. Maltouyres<sup>[2-3]</sup> 提出了一种基于总变分 (Total Variation, TV) 的图像插值方法, 其基本思想是通过给插值图像的傅里叶系数施加某种约束条件使得插值方法是可逆的. 满足这样限制条件的插值方法很多, 他们选用 TV 估计图像的正则性. 2004 年 Chambolle<sup>[4]</sup> 给出了基于 TV 的图像放大算法, 得到比较理想的放大效果, 但是该算法最后的处理图像具有阶梯块效应. 2008 年冯象初等<sup>[5]</sup> 基于 TV 模型<sup>[4]</sup> 在小波域对图像进行放大. 基本思想是先用 Besov 空间  $B_1^1(L_1(\Omega))$  近似有界变差空间  $BV(\Omega)$  的最小值, 再利用 Besov 半范数和小波系数范数之间的等价关系将所求解问题转化到小波域. 2011 年 KIM 等<sup>[6]</sup> 提出了更加复杂的曲率插值图像放大.

最近, Bredie 等<sup>[7-8]</sup> 提出了一种新的数学理论, 称之为总广义变分 (Total Generalized Variation, TGV). 与 TV 不同之处在于: TV 假设图像是分片常量, 因此 TV 正则化处理的图像会产生阶梯块效应; 而 TGV 能有效地逼近任意阶多项式, 例如分片常量、分片放射函数等. 同时 TGV 还具有旋转不变性、凸性、下半连续性等优点. 理论分析和实验结果表明二阶以上 (包括二阶) TGV 能够去除阶梯效应<sup>[7]</sup>, 处理后的图像视觉效果更好.

本文利用 TGV 的性质, 提出了一种新的变分放大模型, 同时给出一种有效的数值算法. 新的模型不仅能够克服传统 TV 模型在放大图像时容易产生阶梯效应的缺点, 而且能恢复出丰富的细节边缘及纹理信息, 因而能够重构出高质量的图像.

## 1 理论基础

### 1.1 二阶总广义变分

文献[7]提出的 TGV 是一个能够度量图像的某阶微分特性的函数. 为了更好地理解 TGV, 先给出 TV 的定义

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \vartheta \, dx \mid \vartheta \in C_c^1(\Omega, C^d), \|\vartheta\|_{\infty} \leq 1 \right\} \quad (1)$$

式中  $u \in \Omega \subset R^d$ . 式(1)的等价定义为

$$\text{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx \quad (2)$$

设  $\Omega \subset R^d$  是一个开区域,  $m \geq 1$  且  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) > 0$ , 则对任意的  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ,  $m$  阶 TGV<sup>[7]</sup> 定义为

$$\text{TGV}_{\alpha}^m(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}^m \vartheta \, dx \mid \vartheta \in C_c^m(\Omega, \text{Sym}^m(R^d)), \|\operatorname{div}^l \vartheta\|_{\infty} \leq \alpha_l, l=0, \dots, m-1 \right\} \quad (3)$$

式中  $\text{Sym}^m(R^d)$  表示  $m$  阶对称张量空间. 从 TGV

的定义可以看出, 当  $m = \alpha_0 = 1$ , 式(3)就变成了 TV 的对偶定义式(1). 因此 TGV 实际上是 TV 的推广, 通过运用 Legendre-Fenchel 对偶, 式(3)与式(4)等价, 即

$$\text{TGV}_{\alpha}^m(u) = \inf_{\substack{u_l \in C_c^{m-l}(\Omega, \text{Sym}^l(R^d)) \\ l=1, \dots, m-1, u_0 = u, u_m = 0}} \sum_{l=1}^m \alpha_{m-l} \int_{\Omega} |\Psi(u_{l-1}) - u_l| \, dx \quad (4)$$

式中  $\Psi(u_{l-1}) = (\nabla u_{l-1} + (\nabla u_{l-1})^T) / 2$  是对称梯度算子. 特别地, 当  $m = 2$  时, 式(4)对应的二阶 TGV 为

$$\text{TGV}_{\alpha}^2(u) = \min_{\vartheta} \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla u - \vartheta| \, dx + \alpha_0 \int_{\Omega} |\Psi(\vartheta)| \, dx \quad (5)$$

式中  $\Psi(\vartheta) = (\nabla \vartheta + \nabla \vartheta^T) / 2$  是一个对称导数,

关于 TGV 的详细分析本文不再赘述, 见文献[7, 10].

### 1.2 Chambolle 图像放大模型

假设讨论的图像是  $M \times N$  的二维矩阵,  $X$  表示空间  $C^{M \times N}$ ,  $Z$  是  $X$  的一个子空间,  $g \in Z$  表示一幅粗糙的图像. 当放大倍数为 2 时,  $Z$  表示为

$$Z = \{g \in X \mid g_{2k, 2l} = g_{2k-1, 2l} = g_{2k, 2l-1} = g_{2k-1, 2l-1}, k \leq M/2, l \leq N/2\}$$

Chambolle<sup>[4]</sup> 的图像放大模型为

$$\min_{u \in X} \|Au - g\|^2 + 2\lambda \cdot \text{TV}(u) \quad (6)$$

式中,  $u$  是放大后的图像,  $A$  是在空间  $Z$  上的正交投影. 显然有  $Ag = g$  且

$$\|Au - g\| = \|A(u - g)\| = \min_{w \in Z^{\perp}} \|u - g - w\| \quad (7)$$

因此, Chambolle 图像放大模型变为

$$\min_{u \in X, w \in Z^{\perp}} \|u - (g + w)\|^2 + 2\lambda \cdot \text{TV}(u) \quad (8)$$

Chambolle 给出了求解上述最小值问题的一种迭代算法. 虽然该方法能得到比较好的图像放大效果, 但是由于此方法是基于 TV 的方法, 所以最后处理结果有阶梯块效应, 并且不能保持更多的细节信息. 为了克服这些缺点本文提出了基于二阶 TGV 的图像放大模型.

## 2 二阶 TGV 放大模型及算法

本文针对 TV<sup>[4]</sup> 模型存在的不足, 结合二阶 TGV, 提出了一种新的变分放大模型

$$\min_u \frac{1}{2\lambda} \|Au - g\|_{L_2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u - \vartheta| \, dx + \beta \int_{\Omega} |\Psi(\vartheta)| \, dx \quad (9)$$

类似于式(6), 该问题等价于最小化泛函式(10).

$$\min_{u \in X, w \in Z^{\perp}} \frac{1}{2\lambda} \|u - (g + w)\|_{L_2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u -$$

$$\vartheta |dx + \beta \int_{\Omega} |\Psi(\vartheta)| dx \quad (10)$$

对于式(10)本文采用 Chambolle 原始对偶交替迭代算法<sup>[9]</sup>进行求解. 由于该算法避免了时间步长, 并且有效使用交替迭代, 所以能够加速算法的收敛. 根据 Legendre-Fenchel 对偶原理, 式(10)的对偶形式为

$$\min_{u, \vartheta, w, p \in P, q \in Q} \frac{1}{2\lambda} \|u - (g + w)\|_{L_2}^2 + \langle \nabla u - \vartheta, p \rangle + \langle \Psi(\vartheta), q \rangle \quad (11)$$

式中  $p, q$  是对偶变量, 凸集  $P, Q$  分别为

$$P = \{p = (p_1, p_2) \mid \|p\|_{\infty} \leq \alpha_1\}$$

$$Q = \left\{q = \begin{pmatrix} q_{11}, q_{12} \\ q_{21}, q_{22} \end{pmatrix} \mid \|q\|_{\infty} \leq \alpha_0\right\}$$

$$\|p\|_{\infty} = \max_{i,j} |p_{i,j}|$$

$$|p_{i,j}| = \sqrt{(p_{i,j}^1)^2 + (p_{i,j}^2)^2}$$

由式(11)可得到求解模型式(10)的原始对偶放大算法为

1) 初始化

$$u^0 = g, \bar{u}^0 = g, \vartheta^0 = 0, \bar{\vartheta}^0 = 0, \sigma > 0, \tau > 0.$$

2) 迭代

a) 求解对偶变量  $p$

$$p^{n+1} = \text{Proj}_P(p^n + \sigma(\nabla \bar{u}^n - \bar{\vartheta}^n))$$

b) 求解对偶变量  $q$

$$q^{n+1} = \text{Proj}_Q(q^n + \sigma(\Psi(\bar{\vartheta}^n)))$$

c) 求解原变量  $u$

$$u^{n+1} = \frac{\lambda(u^n + \tau(\text{div}(p^{n+1}))) + \tau(g + w^n)}{\lambda + \tau}$$

$$\bar{u}^{n+1} = 2u^{n+1} - u^n$$

d) 求解原变量  $w$

$$w^{n+1} = \text{Proj}_{Z^{\perp}}(u^{n+1} - g), \bar{w}^{n+1} = 2w^{n+1} - w^n$$

集合  $Z$  见 1.2 节定义.

e) 求解原变量  $\vartheta$

$$\vartheta^{n+1} = \vartheta^n + \tau(p^{n+1} + \text{div}^h(q^{n+1})),$$

$$\bar{\vartheta}^{n+1} = 2\vartheta^{n+1} - \vartheta^n$$

3) 停止条件为假设  $\gamma$  是一个事先给定的小的正数, 若满足条件:  $\max |u^{n+1} - u^n| < \gamma$ , 就停止迭代.

注:

$$\text{Proj}_P(\tilde{p}^n) = \frac{\tilde{p}^n}{\max(1, |\tilde{p}^n|/\alpha_1)}$$

$$\text{Proj}_Q(\tilde{q}^n) = \frac{\tilde{q}^n}{\max(1, |\tilde{q}^n|/\alpha_0)}$$

$\text{div}^h = -\Psi^*$  是对称梯度算子  $\Psi$  的负共轭, 即

$$\text{div}^h(q) = \begin{pmatrix} \partial_x q_{11} + \partial_y q_{12} \\ \partial_x q_{21} + \partial_y q_{22} \end{pmatrix}$$

由于 Chambolle 原始对偶交替迭代算法有收敛

定理<sup>[9]</sup>作保证, 故新算法在满足收敛定理<sup>[9]</sup>的条件下 ( $\sigma\tau < 1/12$ ) 也是收敛的.

### 3 仿真实验

将文中新算法与 TV<sup>[4]</sup>放大模型和文献[5]小波放大进行比较, 新算法参量选取: 所有实验中  $\alpha_0 = c\alpha_1, \sigma = 0.1, \tau = 0.4, \alpha_1 = 2$ ; 实验图像 2 倍放大时,  $c = 0.04, \lambda = 0.001$ ; 实验图像 4 倍放大时,  $c = 0.2, \lambda = 1$ . TV<sup>[4]</sup>放大模型时间步长  $\Delta t = 0.25$ , 正则性参量  $\lambda$  针对不同图像不同放大率进行调整, 使实验结果达到最好. 文献[5]中的模型则根据文献中提供的源代码得出最好的实验结果. 先将原图下采样缩小一定的倍数作为实际获取的图像, 然后再放大. 实验结果见图 1~图 3.

图 1 是三种算法对 Plane (256 × 256) 图像进行放大两倍的结果. 可以看出, TV 模型得到的放大图像的机身及尾翼上的字迹和云层都比较模糊, 本文方法得到图像比文献[5]得到的放大图像更加自然清晰.

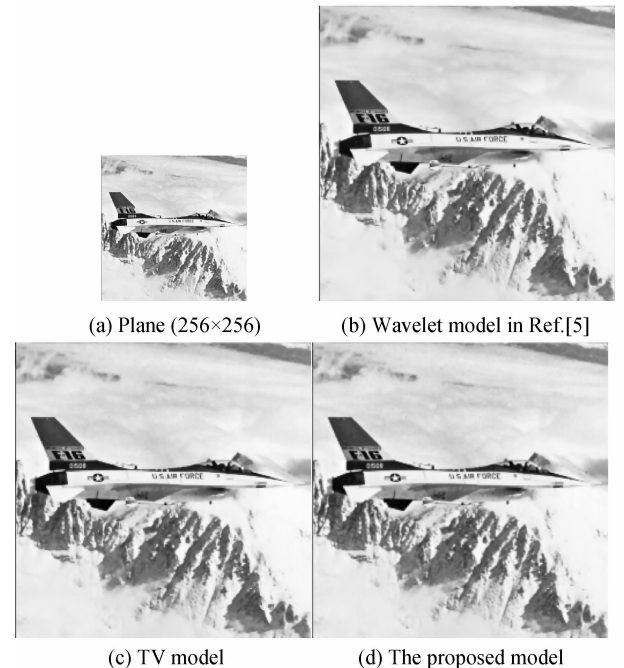


图 1 Plane 图像放大两倍的结果  
Fig. 1 Results of Plane image magnified by factor of 2

图 2 是三种算法对 Lena (256 × 256) 图像放大两倍的结果. 可以看出, TV 放大模型得到的图像平滑地区有块效应, 采用本文方法则有效地避免了阶梯效应, 这一点从图 3 两种方法得到的结果中分别取相同的部分图像 (帽子部分) 很容易看出, 并且新方法得到的图像细节丰富, 如图像中帽子上的褶皱及头发比较清晰.



图 2 Lena 图像放大两倍的结果

Fig. 2 Results of Lena image magnified by factor of 2

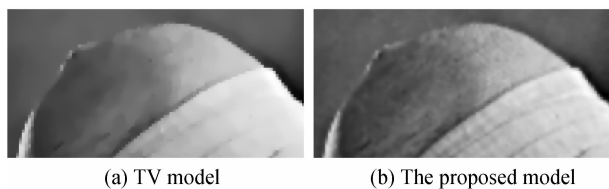


图 3 TGV 和 TV 模型局部放大的结果

Fig. 3 Results of local magnification of TV and TGV models

为了更好地比较三种算法的图像放大效果,采用峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)和均方误差(Root-Mean-Square Error, RMSE)为指标进行定量分析. 三幅图像实验后的数据见表 1 和表 2,可以看出,本文方法比 TV 模型和文献[5]的小波方法 RSNR 更高、RMSE 更小.

表 1 三种方法在不同放大率下的 PSNR 比较

Table 1 Comparison of the PSNR (dB) results of zoomed images by three methods at different magnification

Sample	PSNR/dB			
	Rate	TV <sup>[4]</sup>	Wavelet <sup>[5]</sup>	Proposed
Plane (256×256)	2	26.98	27.02	27.36
Plane (128×128)	4	22.04	22.16	22.42
Lena (256×256)	2	30.78	30.87	31.20
Lena (128×128)	4	25.38	25.44	25.86
Pepper (256×256)	2	27.57	27.73	28.30
Pepper (128×128)	4	22.78	23.08	23.33

表 2 三种方法在不同放大率下的 RMSE 比较

Table 2 Comparison of the RMSE results of zoomed images by three methods at different magnification

Sample	RMSE			
	Rate	TV <sup>[4]</sup>	Wavelet <sup>[5]</sup>	Proposed
Plane (256×256)	2	11.42	11.36	10.91
Plane (128×128)	4	20.15	19.85	19.29
Lena (256×256)	2	7.37	7.29	7.02
Lena (128×128)	4	13.72	13.62	12.99
Pepper (256×256)	2	10.66	10.47	9.81
Pepper (128×128)	4	18.52	17.89	17.38

图 4 给出了 Plane (128×128)图像放大 4 倍时,TV 放大模型和本文模型的 PSNR 和 RMSR 随迭代次数的变化曲线. 由图可见,本文模型优于 TV 放大模型,并且新算法具有比较快的收敛速度.

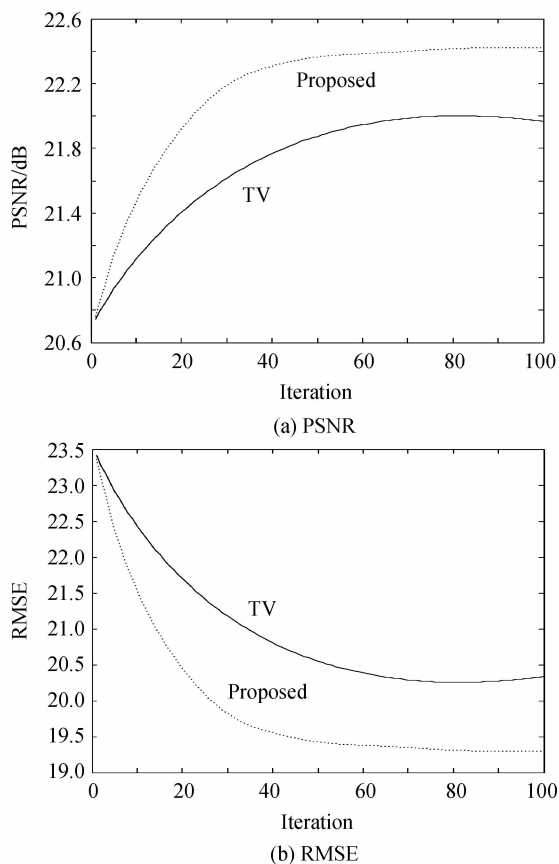


图 4 PSNR 和 RMSE 随着迭代次数的变化曲线  
Fig. 4 Curves of PSNR and RMSE with the iterations

### 4 结论

与传统的插值放大图像不同,本文从广义总变分的角度提出一种新的图像放大模型,通过分析新

模型的性质,给出了一种有效的原始对偶放大算法.新模型实验结果表明:二阶广义总变分模型能避免TV放大模型产生的图像块效应,更好地恢复了图像的细节边缘及纹理信息,处理后的图像视觉效果更好.

#### 参考文献

- [1] BELAHMIDI A, GUICHARD F. A partial differential equation approach to image zoom [C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2004, **1**: 649-652.
- [2] MALGOUYRES F. Total variation based oversampling of noisy images [C]. Scale-Space and Morphology in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, 2006, **2106**: 111-122.
- [3] GUICHARD F, MALGOUYRES F. Edge direction preserving image zooming: a mathematical and numerical analysis [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 2001, **39** (1): 1-37.
- [4] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, **20**(1-2): 89-97.
- [5] FENG Xiang-chu, JANG Dong-huan, XU Guang-bao. Variation and wavelet transform for image zooming [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2008, **31**(2): 340-345. 冯象初, 姜东焕, 徐光宝. 基于变分和小波变换的图像放大算法 [J]. *计算机学报*, 2008, **31**(2): 340-345.
- [6] KIM H, CHA Y, KIM S. Curvature interpolation method for image zooming [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(7): 1895-1903.
- [7] BREDIES K, KUNISCH K, POCK T. Total generalized variation [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2010, **3** (3): 492-526.
- [8] KNOLL F, BREDIES K, POCK T. Second order total generalized variation (tgv) for MRI [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2011, **65**(2): 480-491.
- [9] CHAMBOLLE A, POCK T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, **40** (1): 120-145.
- [10] POCK T, ZEBEDIN L. TGV-fusion [C]. Rainbow of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, 2011, **6570**: 245-258.

\*\*\*\*\*

• 下期预告 •

## 水氨或/和六甲基二硅氮烷表面处理碱催化 二氧化硅增透膜结果的对比研究

霍艳芳, 罗荣辉, 苏永钢

(郑州大学 物理工程学院, 郑州 450001)

**摘要:**针对溶胶-凝胶法制备的1/4波长二氧化硅增透膜耐环境性差的缺点,对其进行了水氨或/和六甲基二硅氮烷的表面处理,并对单一气氛处理和两种气氛联合处理后的膜层性质进行了对比研究.展现了膜层经各项表面处理后物理性质和微观结构的变化,以及两种气氛联合处理时因处理顺序不同而引起的最终结果的差异.研究表明:水氨蒸汽处理促进了膜层粒子间表面羟基的交联,膜层较处理前厚度降低,但耐摩擦性增强,光学透过率基本保持不变;硅氮烷蒸汽处理向膜层引入了甲基,膜层极性较低,粒子间作用力因此降低,耐摩擦性下降,但疏水性得到良好的改善;先水氨后硅氮烷蒸汽处理时,水氨蒸汽的前处理在提高膜层耐摩擦的同时降低了表面羟基的数量,使后续硅氮烷处理时强度降低,故两步处理后膜层保持了较好的耐摩擦性和一定的疏水性;而先硅氮烷后水氨蒸汽处理时,硅氮烷蒸汽的前处理明显改善膜层的疏水性,却因膜层表面羟基减少、间距增大而降低了水氨蒸汽的处理强度,耐摩擦性虽有较大提高,但稍弱于单一水氨蒸汽处理时的耐摩擦性.

**关键词:**薄膜光学; 溶胶-凝胶法; 二氧化硅增透膜; 表面处理; 水氨; 六甲基二硅氮烷