

doi:10.3788/gzxb20134205.0627

# Stark 位移对两全同原子 Tavis-Cummings 模型中的原子纠缠的影响

桑明煌, 戴海浪, 王贤平, 周行

(江西师范大学 物理与通信电子学院, 南昌 330027)

**摘 要:**通过研究两全同原子初始处于最大纠缠态, 光场处于单模时的原子纠缠动力学及 Tavis-Cummings 模型(T-C 模型), 分析了在 T-C 模型全同原子系统的 Hamilton 量中加入 Stark 位移时对原子纠缠的退相干时间的影响. 结果表明: 不考虑 Stark 位移时两原子在系统演化过程中周期性地出现退纠缠现象; 考虑 Stark 位移时, 两全同原子长时间地纠缠.

**关键词:**量子光学; 两全同原子; Tavis-Cummings 模型; Stark 位移; 原子纠缠

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)05-0627-4

## Effect of the Stark Shift on Atom Entanglement in a Two Identity Atoms Tavis-Cummings Model

SANG Ming-huang, DAI Hai-lang, WANG Xian-ping, ZHOU Hang

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330022 China)

**Abstract:** Two identity atoms initially in a maximally entangled state, the fields in the single-model thermal fields, and the Tavis-Cummings (T-C) model are studied. Effects of Stark shift added in the Hamilton of the two identity atoms T-C system on the decoherence time of atomic entanglement are analyzed. The results show that the two atoms evolve periodically into a disentangled separable state when Stark shift is not considered; the two atoms keep long-lived entanglement when Stark shift is considered.

**Key words:** Quantum optics; Two identity atoms; Tavis-Cummings model; Stark shift; Atomic entanglement

### 0 引言

在任意距离间传输未知量子态是实现远距离量子通信和分布式量子网络必不可少的环节, 它可以通过远距离量子态隐形传输和纠缠分发来实现. 在大范围量子网络工作和量子中继站<sup>[1-2]</sup>中实现远距离量子通信任务时, 长时间纠缠的量子纠缠态起着重要的作用, 因此希望量子纠缠态能够有高的纠缠度和长的纠缠保持时间. 然而实际上在量子态传输的过程中不可避免地会受到周围环境的影响而与之发生相互作用, 从而在传输过程和计算过程中产生退相干效应, 导致纠缠衰减甚至突然死亡<sup>[3]</sup>, 因此这

是量子信息处理任务实现的严重障碍. 所以研究相互作用的固定系统间的纠缠动力学, 以及如何防止其中的纠缠衰减或突然死亡, 已成为当前信息处理的一个关键课题<sup>[4]</sup>.

两全同原子 Tavis-Cummings 模型描述的是两个全同的能级原子与光场相互作用的系统<sup>[5]</sup>, 同时是量子光学中被广泛研究的模型之一<sup>[6]</sup>. 因此本文通过利用 Stark 位移可以有效地防止纠缠死亡, 使得初始处于分离态或混合态的两量子比特长时间地保持纠缠<sup>[7]</sup>. 在文献[7-8]的启发下, 研究在两全同原子 Tavis-Cummings 系统中包含两个物理上完全分离的, 并且是理想的单模量子化腔场, 每个腔中有

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61265001)资助

第一作者: 桑明煌(1965-), 男, 教授, 主要研究方向为量子光学. Email: sangqdl@yahoo.com.cn

通讯作者: 戴海浪(1989-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为量子光学. Email: 15083838338@163.com

收稿日期: 2012-11-14; 录用日期: 2013-01-23

一个二能级原子,并且两个全同的能级原子初始处于纠缠态与光场初始处于真空态(均为纯态).因此,这两个原子没有任何相互作用,每个原子只能单独地与自己所在的腔发生相互作用.

本文通过研究 Stark 位移对原子纠缠的调控作用<sup>[9]</sup>,结果发现在 Stark 位移作用下,两原子出现退纠缠现象的改变,而且当 Stark 位移参量选择合适时,出现长时间、稳定的原子纠缠.

## 1 系统理论模型和约化密度矩阵

考虑两个能级原子(分别是 A 和 B)与单模光场相互作用,假设原子间距离大于腔场波长,使得原子间的偶极相互作用可忽略,在这种情况下系统的哈密顿量可以写为<sup>[7]</sup>

$$H = \omega a^+ a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_i^z + \sum_{i=1}^2 g_i (a^+ \sigma_i^- + a^2 \sigma_i^+) + \Omega \sum_{i=j=1}^2 \sigma_i^- \sigma_j^+ \quad (1)$$

式中,  $\omega_1, \omega_2$  为两原子的本征跃迁频率,是腔场频率.

设原子的基态和激发态分别为  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$ , 原子 A 的赝自旋算符分别为

$$\begin{aligned} \sigma_1^z &= |e_A\rangle\langle e_A| - |g_A\rangle\langle g_A| \\ \sigma_1^- &= |g_A\rangle\langle e_A|, \sigma_1^+ = |e_A\rangle\langle g_A| \end{aligned} \quad (2)$$

原子 B 的赝自旋算符分别为

$$\begin{aligned} \sigma_2^z &= |e_B\rangle\langle e_B| - |g_B\rangle\langle g_B| \\ \sigma_2^- &= |g_B\rangle\langle e_B|, \sigma_2^+ = |e_B\rangle\langle g_B| \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $a$  和  $a^+$  分别为光子的湮没和产生算符,  $g$  为原子与 T-C 模型中光场间的耦合常量,  $\Omega$  为原子间偶极-偶极相互作用强度.

考虑  $\omega = \omega_1 = \omega_2, g_1 = g_2$  的情况,并且假设两原子之间没有相互作用,则  $\Omega = 0$ , 因此

$$H = \omega a^+ a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_i^z + \sum_{i=1}^2 g_i (a^+ \sigma_i^- + a^2 \sigma_i^+) \quad (4)$$

现在讨论对系统的  $H$  加一个 Stark 位移时,对于包含 Stark 位移的简并两全同原子 Tavis-Cummings 模型,在系统中单个原子 A 的  $H_{A,a}$  为

$$\begin{aligned} H_{A,a} &= \omega a^+ a + \frac{1}{2} \omega_0 \omega_i^z + a^+ a (\beta_1 \sigma_1^- \sigma_1^+ + \\ &\beta_2 \sigma_1^+ \sigma_1^-) + g (a^+ \sigma_1^- + a^2 \sigma_1^+) \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\omega_0$  为原子 A 的跃迁频率,而其中等号右边第三项描述了原子激发态和基态的动力学 Stark 位移,它依赖于单光子耦合常量,失谐量及场强度和统计性质.

由耦合常量  $g_1$  (相对于基态  $|e\rangle$  和中间态  $|j\rangle$  之间的跃迁),  $g_2$  (相对于激发态  $|g\rangle$  和中间态  $|j\rangle$  之间的跃迁) 和失谐量  $\Delta$  可确定两能级的 Stark 位移参量  $\beta_1$  和  $\beta_2$ , 以及原子与场之间的有效耦合常量  $g$

$$\beta_1 = g_1^2 / \Delta, \beta_2 = g_2^2 / \Delta, g = g_1 g_2 / \Delta \quad (6)$$

为了简单起见,考虑共振相互作用  $\omega_0 = 2\omega$ .

将  $H_{A,a}$  在态空间  $|e, n\rangle, |g, n+1\rangle$  对角化,可得相互作用表象中时间演化算符<sup>[10]</sup>

$$U_{A,a}(t) = \begin{bmatrix} U_{11}(n, t) & U_{12}(n, t) \\ U_{21}(n, t) & U_{22}(n, t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

矩阵元

$$\begin{aligned} U_{11}(n, t) &= \sin^2(\theta_n) \exp(-i\lambda_n^+ t) + \\ &\cos^2(\theta_n) \exp(-i\lambda_n^- t) \\ U_{12}(n, t) &= \frac{1}{2} \sin(2\theta_n) [\exp(-i\lambda_n^+ t) - \\ &\exp(-i\lambda_n^- t)] = U_{21}(n, t) \\ U_{22}(n, t) &= \sin^2(\theta_n) \exp(-i\lambda_n^+ t) + \cos^2(\theta_n) \cdot \\ &\exp(-i\lambda_n^- t) \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\sin(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\xi_n}{\Omega_n}\right)^{1/2} \quad (9)$$

$$\lambda_n^\pm = g \frac{n(1+r^2) + 2r^2 \pm \Omega_n}{r} \quad (10)$$

$$\Omega_n = [g^2(n+1)(n+2) + \xi_n^2]^{1/2} \quad (11)$$

$$\xi_n = \frac{g}{2r} [n(1-r^2) - 2r^2] \quad (12)$$

$$r = (\beta_1 / \beta_2)^{1/2} \quad (13)$$

如果不考虑 Stark 位移,有

$$\sin(\theta'_n) = 1/\sqrt{2} \quad (14)$$

$$\Omega'_n = g[n(n+1)(n+2)]^{1/2} \quad (15)$$

$$\lambda_n^\pm = \pm \Omega_n \quad (16)$$

对应地,原子 B 与腔场 b 相互作用的演化算符  $U_{A,a}(t)$  和  $U_{B,b}(t)$  形式类似.初始两原子处于纠缠态,光场处于粒子态,系统的状态为

$$\Psi(0) = (\cos \theta |e_A, g_B\rangle + \sin \theta |g_A, e_B\rangle) \otimes |n\rangle \quad (17)$$

在相互作用绘景中,系统在  $t > 0$  时刻的态矢可表示为

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= C_1 |e_A, e_B, n-1\rangle + C_2 |e_A, e_B, n\rangle + \\ &C_3 |g_A, g_B, n\rangle + C_4 |g_A, g_B, n-1\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)代入相互作用绘景中的薛定谔方程为

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\Psi(t)\rangle \quad (19)$$

利用初始条件,可以得到

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m [P_n P_m U_{11}(n) U_{11}^*(n) U_{12}(m) \times \\ &U_{12}^*(m) + P_{n+2} P_m U_{12}(n) U_{12}^*(n) \times \\ &U_{11}(m) U_{11}^*(m)] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m [P_n P_m U_{11}(n) U_{11}^*(n) U_{22}^*(m-2) \times \\ &U_{22}^*(m-2) + P_{n+2} P_{m-2} U_{12}(n) U_{12}^*(n) \times \\ &U_{21}(m-2) U_{21}^*(m-2)] \end{aligned} \quad (21)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m [P_{n-2} P_{m+2} U_{21}(n-2) U_{21}^*(n-2) \times U_{21}^*(m) U_{12}^*(m) + P_n P_m U_{22}(n-2) U_{22}^*(n-2) \times U_{11}(m) U_{11}^*(m)] \quad (22)$$

$$C_4 = 1 - C_1 - C_2 - C_3 \quad (23)$$

式中,  $P_n$  和  $P_m$  是权重函数<sup>[11]</sup>.

约化密度矩阵  $\rho_{A,B}(t)$  可以表示为

$$\rho_{A,B}(t) = \text{Tr}_{a,b}[\rho(t)] = \begin{pmatrix} |C_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C_2|^2 & C_2 C_3^* & 0 \\ 0 & C_2^* C_3 & |C_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C_4|^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

## 2 数值结果与讨论

一个两原子系统的纯量子态,它的纠缠度等于任意一子系统约化密度矩阵 Von Neuman 熵<sup>[12]</sup>,而对两个子系统构成的复合系统的混合态,用 Peres 提出的用部分转置矩阵的负本征值判断纠缠的方法<sup>[13]</sup>,即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两子系统中,纠缠可以用部分转置矩阵的负本征值来定义

$$E = -2 \sum_i \mu_i^- \quad (25)$$

该式是部分转置矩阵  $\rho$  的负本征值<sup>[14]</sup>.

当  $E=0$ ,两个子系统是分离的<sup>[15]</sup>;

当  $E=1$ ,两子系统处于最大纠缠;

当  $0 < E < 1$ ,两子系统是纠缠的.

根据式(24)已经得出了原子 A 和原子 B 在 Tavis-Cummings 模型中的约化密度矩阵,因此利用式(25)可以计算出两原子纠缠量  $E_{A,a}$  的表达式为

$$E_{A,a} = -(|C_2|^2 + |C_4|^2 - \sqrt{|C_1|^2 + 4C_2 C_3^* C_3 C_2^* - 2|C_1|^2 |C_4|^2 + |C_4|^4}) \quad (26)$$

用此方法数值计算了自发参量下转换产生的双原子纠缠度,并且借助数值计算方法可以直观地展示两原子的纠缠演化规律.

两全同原子 Tavis-Cummings 模型中原子受 Stark 位移影响时纠缠演化规律如图 1,曲线 b 是有

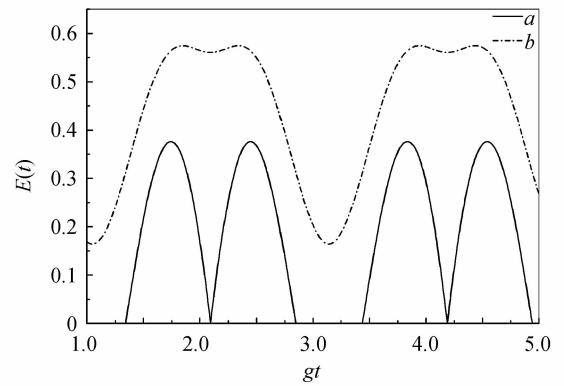


图 1 两全同原子纠缠量随时间演化的模拟

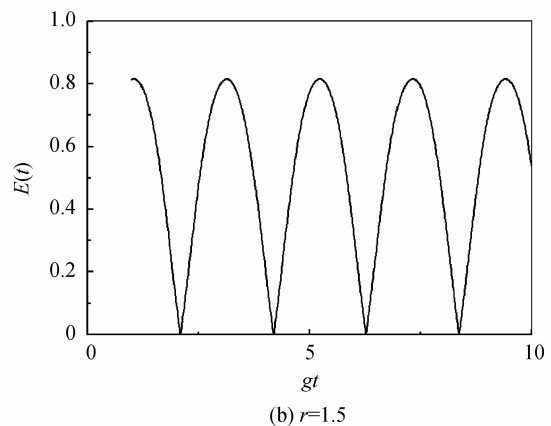
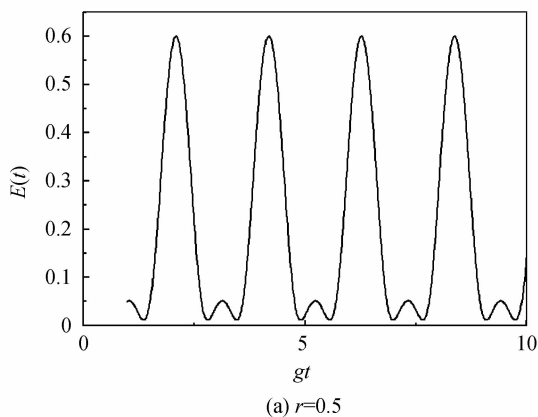
Fig. 1 The simulation of two identity atoms entanglement as follow the evolution over time

Stark 位移影响下量子纠缠量随时间演化的图像,曲线 a 是没有 Stark 位移影响下量子纠缠量随时间演化的图像.

1)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , 即不考虑 Stark 位移的情况,此时原子纠缠随  $gt$  的变化是周期性的,并且如图 1 中 a 曲线可以得出它的周期为  $gt=2.1$ ,最大值  $E_{A,a}=0.38$ ,而在  $T=0.8$  时,  $E_{A,a}(2.1)=0$  因此两原子退相干.

2)  $\beta_1 = \beta_2 \neq 0$ , 即考虑 Stark 位移的情况,当 Stark 位移参量  $r=1$ ,即而能级原子上下两能级的 Stark 位移相等时,原子纠缠如图 1 中 b 曲线周期性的演化,但周期延长为原来的  $3T$ ,即  $T'=2.4$  此时  $E_{A,a}(t) \neq 0$  值在  $(0,1)$  原子纠缠最小值增大,两原子保持纠缠状态,而不会出现退纠缠.减小  $r$  值,即较基态能级而言,激发态能级与中间能级的耦合更强烈  $E_{A,a}(t) \in (0.18, 0.58)$ .

当 Stark 位移参量  $r \neq 1$ ,即在能级原子上两能级的 Stark 位移不相等时,且  $r$  取不同值时可以演化为图 2 所示的结果.图中曲线是随着  $r$  的增大腔中两原子纠缠随时间的演化规律,随着偶极-偶极相互作用的增大,纠缠演化的周期明显地变短,初始分离的两原子演化的幅度变大,有时可以接近最大纠缠(如图 2(b)).从 4 幅小图中可以比较出随着  $r$  的不断增大演化周期慢慢地变长,但是当  $r=5$  时纠缠



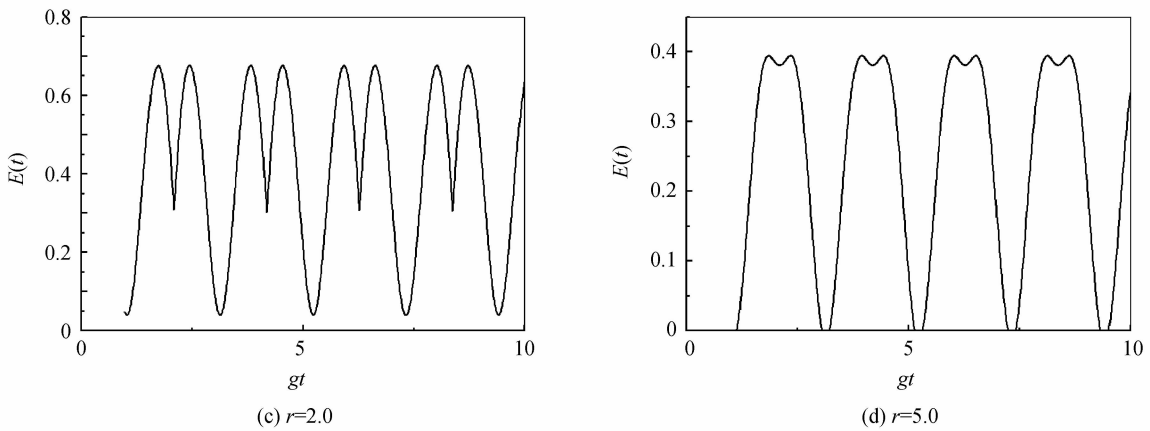


图2 不同的  $r$  值所对应的纠缠量随时间的演化模拟

Fig. 2 Different values of  $r$  entanglement measure corresponding to the time evolution of the simulation

量出现了为零的现象,因此也可以得出,取  $r$  的不同值不是都会出现保持纠缠的作用. 因此得到当 Stark 位移参量选择合适时,出现长时间、稳定的原子纠缠.

因此在两全同原子 Tavis-Cummings 模型中,适当的调节 Stark 位移参量值,可以对两全同原子 Tavis-Cummings 模型中原子纠缠进行调控.

### 3 结论

在 Tavis-Cummings 模型的全同原子系统的 Hamilton 量中加入 Stark 位移时对原子纠缠的影响是在系统中加入 Stark 位移之后对系统的密度矩阵产生的影响的理论推导,可知矩阵元的变化. 然而计算纠缠度跟密度矩阵有密切的关系,因此在纠缠态的分析中可以将系统的能量关系表示成密度矩阵来分析纠缠态的问题. 对加入 Stark 位移的系统的纠缠态的模拟和分析结果表明不考虑 Stark 两原子在系统演化过程中周期性地出现退纠缠现象,而考虑 Stark 位移时,两全同原子长时间保持纠缠态. 因此对系统的 Hamilton 量进行改变,可以使得原子纠缠态的抗干扰性得到提高,增加两原子纠缠的寿命.

虽然将 Stark 位移加入其它的系统到 Hamilton 量中的分析有待研究,但是将 Stark 位移加入两全同原子 Tavis-Cummings 模型系统中的 Hamilton 量的结果具有保持两原子纠缠态的作用,因此将 Stark 位移加入其它的系统中 Hamilton 量中的分析值得研究,这种操作有助于提供一种保持原子纠缠态的方法和抗干扰的思路.

#### 参考文献

- [1] SHABANI A, LIDAR D A. Vanishing quantum discord is necessary and sufficient for completely positive maps[J]. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(3): 100402-100408.
- [2] CLARK S G, PARKINS A S. Entanglement and entropy engineering of atomic two-qubit states[J]. *Physical Review Letters*, 2003, **90**(4): 047905-047910.
- [3] ADESSO G, DATTA A. Quantum versus classical correlation in Gaussian state[J]. *Physical Review Letters*, 2010, **105**(3): 030501-030505.
- [4] HU Yao-hua. Effect of the Stark shift on entanglement in a double Jaynes-Cummings model in thermal environment[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(16): 160204-160210. 胡要花, Stark 位移对热环境下双 Jaynes-Cummings 模型中原子纠缠的影响[J]. *物理学报*, 2012, **61**(16): 160204-160210.
- [5] SHAN Chuan-jia, XIA Yun-jie. The entanglement character of two entangled atoms in Tavis-Cummings model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(4): 1583-1589. 单传家, 夏云杰. Tavis-Cummings 模型中两纠缠原子纠缠的演化特性[J]. *物理学报*, 2006, **55**(4): 1583-1589.
- [6] PU Zhong-sheng, Guan Qiuyun, YAN Dong. Evolution of entanglement in two-photon Tavis-Cummings model [J]. *Journal of Guansu Sciences*, 2008, **02**(12): 2304-2306. 蒲忠胜, 关秋云, 严冬. 双光子 Tavis-Cummings 模型中原子纠缠演化特性[J]. *甘肃科学学报*, 2008, **02**(12): 2304-2306.
- [7] PLATZMAN P M, DYKMAN M I. Quantum computing with electrons floating on liquid helium[J]. *Science*, 1999, **284**(16): 1967-1969.
- [8] PLENIO M B, VEDRAK V. Entanglement measures and purification procedures[J]. *Physical Review A*, 1998, **57**(3): 1619-1633.
- [9] GUO G C, YANG C P. Spontaneous emission from two two-level entangled atoms[J]. *Physica*, 1998, **A260**(2): 173-179.
- [10] GENERALIZED GORDON, GUSTAVO R IGOLIN. Generalized teleportation protocol[J]. *Physical Review A*, 2006, **73**(4): 042309-042309.
- [11] 盛聚, 谢式子, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 56.
- [12] LU Dao-ming. Entanglement properties of two-atom inside cavities controlled by manipulating the atom outside the cavity[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(12): 8359-8365. 卢道明. 腔外原子操作控制腔内原子的纠缠特性[J]. *物理学报*, 2010, **59**(12): 8359-8365.
- [13] LU Dao-ming. Remote control entanglement properties of two-atom inside cavities[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(11): 2088-2092. 卢道明. 远程控制原子的纠缠特性[J]. *光子学报*, 2010, **39**(11): 2088-2092.
- [14] SHI M, YANG, W, JIANG F, et al. Quantum discord of two-qubit rank-2 states[J]. *Physical Review A*, 2011, **44**(41): 415304-415309.
- [15] MIRANOWICZ A, GRUDKA A. Ordering two-qubit states with concurrence and negativity[J]. *Physical Review A*, 2004, **70**(3): 032326-032330.