doi:10.3788/gzxb20134204.0491

分段线性序列的重采样

邓家先，管丽娜
（海南大学 信息科学技术学院，海口 570228）

摘　要：为了避免基于有限更新率的连续域信号采样涉及复杂的运算问题，认真研究分段线性序列特点，提出一种在离散域进行信号参量提取的方法，称之为序列重采样. 给出了有限长序列更新率定义，总结出一种适合简单分段线性序列的参量提取算法——试探法，将之推广到一般分段线性序列. 不需要事先知道更新率的数量，也不需要在连续域进行运算，从采样后的序列中直接检测信号更新点和更新参量，从而实现信号采样. 对所提出的算法进行了仿真，结果表明该算法是有效的.

关键词：有限更新率；分段线性；重采样；参量提取
中图分类号：TN911.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1004-4213(2013)04-0491-5

Resampling of Piecewise Linear Sequences

DENG Jia-xian, GUAN Li-na
(*College of Information Science & Technology, Hainan University, Haikou* 570228, *China*)

Abstract: In order to solve the problems laid on continuous signal sampling based on finite rate of innovationm, the feature of piecewise linear sequences is studied seriously, and a method called sequence resampling is proposed where the continuous signal variation parameters is extracted in discrete domain. The finite rate of innovation of sequence with finite length is defined, and a parameter extract method called test method is concluded which is suitable for the parameter extract of simple linear sequences, then this method is extended to the one of normal linear sequences. The innovation number does not need to be known in advance, and complex operations in continuous domain can be avoided; the signal's innovation time and parameters can be extracted from the sampled sequence, and the signal sampling is realized. The proposed algorithm is simulated, and the results show that the proposed algorithm is valid.

Key words: Finite rate of innovation; Piecewise linear; Re-sampling; Parameters extract

0　引言

在信号处理和通信领域，香农采样具有重要的作用. 香农采样理论要求待采样信号的带宽是有限的，而无限带宽的信号是不能利用香农采样理论进行采样的，否则无法精确重建原始信号. 针对香农采样理论面临的不足，H. Ogawa 总结了采样理论的研究成果[1]；Michael Unser 等提出了广义采样理论[2]；随着采样理论的进一步研究，M. Vetterli 等提出了有限更新率[3]，并指出带限信号之所以能够采样并精确重建，是因为带限信号的更新率是有限的. Pier Luigi Dragotti 对有限更新率进行了深入研究，对连续域分段信号的采样进行了研究，并讨论了采样时间段与更新率和矩的数量之间的关系[4].

长期以来，信号采样一直是信号分析方面研究的问题. 自从有限更新率提出以来，不断有学者对有限更新率的采样问题进行研究[5-7]，部分学者开始讨论有限更新率的实际应用问题，如在图像处理中的特征提取及更高分辨率的图像重建方面的应用等[8-9]. 目前，有限更新率的采样是在连续域内展开的，而如何利用经过均匀采样后的数据序列来提取更新参量，即序列重采样问题，还没见到相应文献.

在序列处理中，对采样得到的序列进行重采样也是十分必要的[11-13]. 目前，重采样研究主要是如何根据得到的序列重建原始连续信号. 然而如何利用有限更新率实现序列重采样，从而得到序列的函数

第一作者：邓家先(1964－)，男，教授，博士，主要研究方向为数字图像处理及自适应信号处理. Email:jxiandeng@126.com
收稿日期：2012-11-05；**录用日期**：2013-01-06

表示式，这类序列的采样问题有待研究.

由文献[4]可知，利用有限更新率对连续信号采样，需要事先知道更新率的数量，并对连续信号进行微分得到狄拉克流或者微分狄拉克流，然后多次解 Yule-Walker 方程得到描述信号的参量，如产生突变的时间、幅值或者斜率等参量.

如果将连续域分段信号采样的方法直接推广到离散域，对分段线性序列进行重采样，同样需要事先知道更新率、矩的数量，从而确定观测信号的数量，并多次解 Yule-Walker 方程，才能得到序列突变的时间、幅值或者变化斜率等参量.

针对上述方法的不足，本文提出了一种基于有限更新率的分段线性序列重采样方法，不需要事先知道更新率的数量、观测序列数量，也不需要解 Yule-Walker 方程. 不断增加观测数据数量，确定产生更新的参量，一旦出现两次更新，则将第二次更新点作为新的观测起始点，重新检测更新参量.

1 序列的有限更新率

M. Vetterli 在讨论连续信号采样时，引入了有限更新率的概念. 给定函数 $\varphi(t)$，考虑具有下列形式的信号

$$x(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\varphi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \tag{1}$$

$x(t)$频率带限则是上述公式的一个特例. 显然，令 $\varphi(t)=\sin c(t)$，就是大家都熟悉的香农采样的精确重建信号形式. 这里已经将 $\varphi(t)$的范围扩展.

考虑一个函数序列$\{\varphi_r(t)\}_{r=0,1,\cdots R}$，且函数的移位也是任意的，并将上述公式可以进一步推广，得到信号重建公式

$$x(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{r=0}^{R}c_{nr}\varphi_r\left(\frac{t-t_n}{T}\right) \tag{2}$$

得到采样信号重建的更一般形式.

在时间间隔(t_a,t_b)，引入计数函数 $C_x(t_a,t_b)$，定义更新率 ρ 为

$$\rho=\lim_{\tau\to\infty}C_x\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)$$

在有限时间段 τ，局部有限更新率定义为

$$\rho=\frac{1}{\tau}C_x\left(t-\frac{\tau}{2},t+\frac{\tau}{2}\right)$$

现在的任务就是从连续信号中，如何提取描述信号的参量 c_{nr}、t_n，从而根据这些参量重建原始信号. 这就是有限更新率信号采样问题.

一般情况下，认为序列都是通过对连续信号等间隔采样得到的，如何使用更为简洁的形式来描述序列，即实现对序列的重采样，具有理论和实际应用意义. 所以，有关序列的重采样有待研究.

将式(1)由连续域推广到离散域，有

$$x(n)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(n-t_k) \tag{3}$$

只要能够有效检测出序列的更新参量 c_k、t_k，就可以根据这些参量重建序列本身. 这里只是讨论非周期、有限长序列的重采样问题. 由于序列没有时间的概念，对于长度为 N 的序列，给出下列定义.

定义 1 给定长度为 N 的非周期序列 $x(n)$，其参量表示如式(3)所示，引入一个计数参量 $C_x(0,N-1)$，则序列的更新率就定义为

$$\rho=C_x(0,N-1)$$

更新率 ρ 就是由式(3)描述的序列参量的数量.

本文限于讨论分段线性序列的重采样，即式(3)中的 $\varphi(n-t_k)$是分段线性序列. 从后续的分析可知，脉冲序列和阶跃序列都是其特殊形式. 为了避免确定观测序列突变参量过程中的微分运算和多次解 Yule-Walker 方程，根据序列的特点，提出相应的采样算法.

2 简单分段线性序列的采样

考虑一下简单分段函数

$$x(n)=a+b(n-t_1)\varepsilon(n-t_1') \tag{4}$$

其中 n 为整数，t_1 为实数，$t_1'=\lfloor t_1\rfloor$，$\lfloor .\rfloor$表示下取整，$x(0)=a$，$\varepsilon(n)$为单位阶跃序列，即

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

现在的任务是根据观测到的序列，检测出该分段函数的参量——变化斜率 b 和产生变化的时刻 t_1. 在研究连续信号的有限更新率时，对于狄拉克流，Luigi Dragotti 等通过计算函数的矩，得到函数的跳变时刻和变化幅值. 与之类似，也通过计算矩实现参量提取.

给定长度为 N 分段线性序列. 令整数 M 满足 $M\leqslant N$，计算矩为

$$m_0(M)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n) \tag{5}$$

当 $M\leqslant t_1'+1$ 时，$m_0(M)=Ma$，而当 $M>t_1'$ 时

$$m_0(M)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n)=\sum_{n=0}^{M-1}a+\sum_{n=t_1'}^{M-1}b(n-t_1)=Ma+b\sum_{n=0}^{M-1-t_1'}n=Ma+b\,\frac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2}$$

综合起来

$$m_0(M)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n)=\begin{cases}Ma & M\leqslant t_1+1\\ Ma+b\,\dfrac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2} & M>t_1+1\end{cases} \tag{6}$$

矩 $m_1(M)$为

$$m_1(M)=\sum_{n=0}^{M-1} nx(n) \tag{7}$$

当 $M\leqslant t_1'+1$ 时,$m_1(M)=\dfrac{M(M-1)a}{2}$,而当 $M>t_1'+1$时

$$m_1(M)=\sum_{n=0}^{M-1} nx(n)=\sum_{n=0}^{M-1} an+\sum_{n=t_1'}^{M-1} bn(n-t_1)=$$
$$\frac{M(M-1)a}{2}+b\sum_{n=0}^{M-1-t_1'} n(n+t_1)=\frac{M(M-1)a}{2}+$$
$$b\sum_{n=0}^{M-1-t_1'} n^2+bt_1\sum_{n=0}^{N-1-t_1'} n=\frac{M(M-1)a}{2}+$$
$$b\sum_{n=0}^{M-1-t_1'} n^2+t_1(m_0-Ma)$$

综合起来

$$m_1(M)=\begin{cases}\dfrac{M(M-1)a}{2} & M\leqslant t_1'+1\\ \dfrac{M(M-1)a}{2}+b\sum\limits_{n=0}^{M-1-t_1'} n^2+ & \\ t_1(m_0-Ma) & M>t_1'+1\end{cases} \tag{8}$$

由于简单分段线性序列中只有两个参量(b,t_1),从式(6)、(8)可以看出,只要满足 $M>t_1'+1$,理论上就可以解出相应参量.但是由于表达式过于繁琐,直接求解上述方程并不可取.如果 $N\geqslant t_1'+3$ 时式(4)成立,当 $M\geqslant t_1'+1$ 时,有

$$x(M+1)-x(M)=a+b(M-t_1+1)-[a+b(M-t_1)]=a+b(M-t_1+1)-[a+b(M-t_1)]=b \tag{9}$$

$$m_0(M+1)-m_0(M)=(M+1)a+b\frac{(M+1-t_1)(M-t_1)}{2}-[Ma+b\frac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2}]=a+b(M-t_1) \tag{10}$$

即

$$b=x(M+1)-x(M) \tag{11a}$$

$$t_1=M-\frac{m_0(M+1)-m_0(M)-a}{b} \tag{11b}$$

这显然是合理的,从式(4)可以看出,序列就是在 $n=t_1'+1$开始线性变化,而此时序列的数据数量就是 t_1+2.

将求解出的参量 b、t_1 代入式(8),如果式(8)成立,则说明有式(11a)、式(11b)求解出的参量是合理的;否则,说明前提条件 $N\geqslant t_1'+3$ 不成立,即 $n\geqslant t_1'+1$时刻出现了序列跳变,但是不满足式(4).

这种求解更新参量解法称之为试探法.算法如下:

1) 令 $M=1$;

2) 求解 $b(M)=x(M+1)-x(M)$,如果 $b(M)=0$,则 $M=M+1$,返回 2);

否则,$M=M+1$ 跳转至 3);

3) 由式(11a)、(11b)计算出相应参量;

4) 代入式 8),如果成立,则表示求解参量有效,否则只是认为在 $n=t_1'+1$ 出现信号跳变,而更新率参量 b、t_1' 无效.

3 分段线性序列的采样

前面讨论了简单分段线性序列的采样问题,简单分段线性序列是指更新率为 1 的线性函数,即式(4)表示的分段线性函数,这类序列的重采样相对比较简单,只要采用提出的试探法就能够提取到更新参量.一般分段线性序列是指更新率大于 1 的分段线性函数,除了使用上述试探法来提取更新参量之外,更主要的是如何识别某一分段函数的截止时间,从而为后续参量提取提供起始时刻,即函数的分段问题.下面讨论一般分段线性序列的采样问题.

长度有限的分段线性序列可以表示为

$$x(n)=a+\sum_{i=1}^{K} b_k(n-t_k)[\varepsilon(n-t_{k+1}'+1)-\varepsilon(n-t_k')] \tag{12}$$

使用有限更新率对上述信号进行重采样,即提取参量(b_k、t_k)$k=1,2\cdots K$,其中 K 就是该序列的更新率数量.

如果信号是分段线性的连续函数,则可以通过对信号进行微分,从而将之变换为狄拉克流或者微分狄拉克流,在通过参量矩计算出参量 t_k,然后计算出参量 b_k.但是,该算法的重要前提是需要知道更新率的数量,并两次解 Yule-Walker 方程.

从上文可知,分段线性序列更新参量的求解并不需要像连续信号那么复杂,无需求解 Yule-Walker 方程.即使更新率的数量未知,也可以通过逐次试探方法求解出更新率的数量和相应参量.

下面讨论如何将试探解法进一步拓展,使其用于解决分段线性序列中的问题.

对上文的分段线性函数加以扩展,有

$$x_1(n)=a+b_1(n-t_1)[\varepsilon(n-t_2'+1)-\varepsilon(n-t_1')]+b_2(n-t_2)[\varepsilon(n-t_3'+1)-\varepsilon(n-t_2')] \tag{13}$$

将 M 的取值范围扩大到 $M\in[0,t_2+1]$,则式(6)、式(8)修正为

$$m_0(M)=\sum_{n=0}^{M-1} f(n)=$$
$$\begin{cases}Ma & M\leqslant t_1'+1\\ Ma+b_1\dfrac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2} & t_1'+1<M\leqslant t_2'+1\\ Ma+b_1\dfrac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2}+ & \\ b_2\sum\limits_{n=0}^{M-1-t_2'} n(n+t_2) & M>t_2'+1\end{cases} \tag{14}$$

由上文讨论的试探法解出参量 b_1、t_1，在 $M\in[t_1'+1,t_2']$范围内应该满足

$$m_0(M)=Ma+b_1\frac{(M-1-t_1)(M-t_1)}{2}$$

和

$$\frac{M(M-1)a}{2}+b_1\sum_{n=0}^{M-1-t_1'}n^2+t_1(m_0-Ma)$$

一旦 $M>t_2$，则上述关系不成立，利用这一特性可以识别出第一线性段的结束 t_2'，设 M_1 为上述公式不成立的最小 M，则有

$$M_1-1=t_2'+1$$

即

$$t_2'=M_1+2 \tag{15}$$

参量 t_2 确定后，直接讨论 $n\in[t_2,t_3+1]$的采样问题，令 $a_1=f(t_2)$，式(13)等价为

$$x_2(n)=a_1+b_2(n-t_2)[\varepsilon(n-t_3'+1)-\varepsilon(n-t_2')] \tag{16}$$

这与前文讨论的问题完全相同，同样方法，可以确定出参量 b_2、t_2 和 t_3. 以此类推就可以得到序列所有的更新率参量，完成序列重采样.

如果得到的参量满足 $t_{i+1}'=t_i'+1$，且 $b_{i+1}=0$，则表示在 t_{i+1}' 时刻出现了阶跃，阶跃信号的幅值为 $x(t_i)-x(t_i)=1/b_i$.

如果 $t_{i+1}'=t_i'+1$，且

$$\begin{cases} b_{i+1}=-b_i \\ x(n)=x(t_i') \quad t_i'<n\leqslant t_i' \end{cases}$$

则表示在 $t_{i+1}=t_i+1$ 时刻出现了脉冲信号，脉冲信号幅值为 $x(t_i')-x(t_i')=1/b_i$.

4 实验结果与分析

对所提出算法进行仿真，原始序列如图 1 所示. 可以看出，该序列是分段线性序列. 根据所提出算法，第 1 次序列分段处理的结果如图 2 所示.

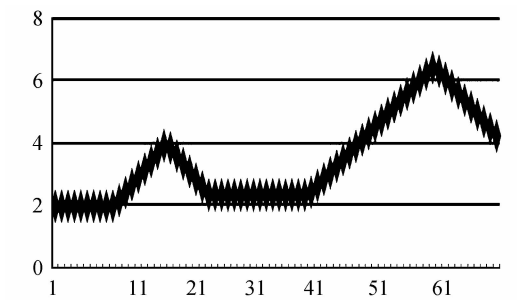

图 1 原始数据

Fig. 1 Origin data

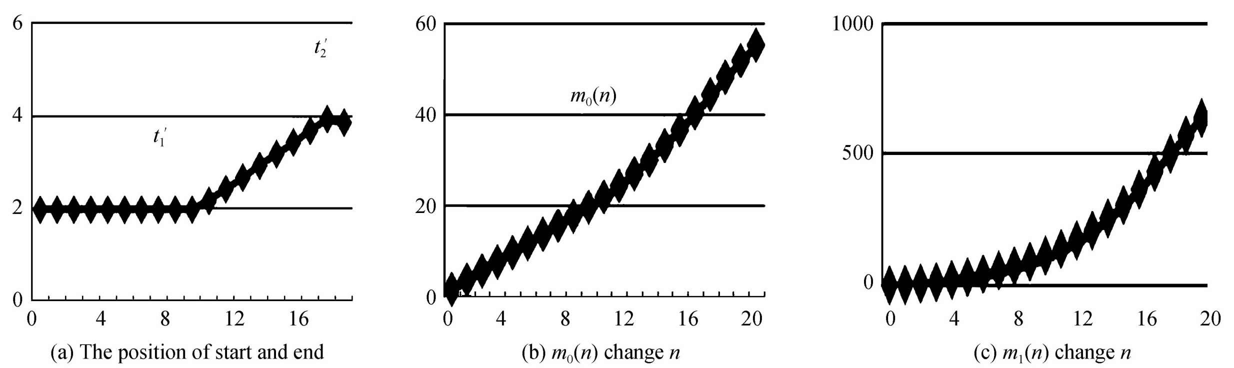

图 2 第 1 次检测结果及参量

Fig. 2 First detected result and parameters

从中可以看出，所提出算法能够准确检测到序列发生突变的起始位置 $t_1'=9$ 和终止位置 $t_2'=17$. 检测到的参量如下 $b_1=0.25$，$t_1=9.25$，检测结果与给定仿真数据吻合.

将第 1 次检测到的 t_2' 作为第 2 次检测的起始点，然后可以计算出第 2 组序列的斜率和变化起始位置，如图 3 所示，同样，检测出的参量与给定仿真数据相符.

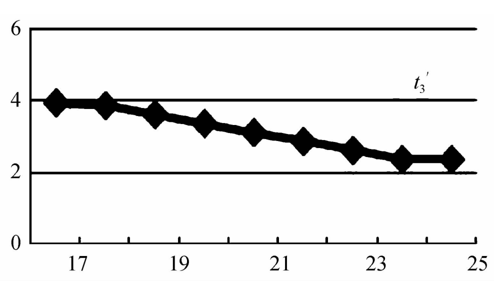

图 3 第 2 次检测结果

Fig. 3 Second detected result

剩余分段检测结果不再赘述. 由此可见，所提出算法能够准确实现数据分段，并能够精确检测出相应的更新参量.

5 结论

以分段线性信号为研究对象，利用均匀采样得到的样点值进行分析计算，得到原始连续信号更新参量，实现了数字信号处理方法实现数据重采样. 所提出算法不需要解 Yule-Walker 方程，从而避免了复杂的矩阵运算. 对理论分析的结果进行仿真，结果表明所提出算法能够准确检测出重建连续信号所需

要的更新参量.

基于有限更新率的数据采样十分重要，对其研究有待进一步深入. 今后希望在利用均匀采样序列对更多类型数据的重采样进行研究，并进一步探讨其在实际工程中的应用.

参考文献

[1] OGAWA H. A unified approach to generalized sampling theorems[C]. ICASSP, 1986, **11**: 1657-1660.

[2] DRAGOTTI P L, VETTERLI M, BLU T. Exact sampling results for signals with finite rate of innovation using Strang-Fix conditions and local kernels[C]. ICASSP, 2005, **4**: 233-236.

[3] HAO Y, MARZILIANO P, VETTERLI M, *et al*. Compression of ECG as a signal with finite rate of innovtion [C]. IEEE-EMBS, 27th, 2005: 7564-7567.

[4] DRAGOTTI P L, VETTERLI M, BLU T. Sampling moments and reconstructing signals of finite rate of innovation: shannon meets strang-fix[J]. *IEEE Trans on Signal Process*, 2007, **55**(5): 1741-1757.

[5] DRAGOTTI P L, VETTERLI M, BLU T. Exact sampling results for signals with finite rate of innovation using Strang-Fix conditions and local kernels[C]. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005, 4, IEEE International Conference on: 233- 236.

[6] BERENT J, DRAGOTTI P L, BLU T. Sampling piecewise sinusidal signals with finite rate of innovation methods[J]. *IEEE Trans on Signal Process*, 2010, **58**(2): 613-625.

[7] HAO Y, MARZILIANO P, VETTERLI M, *et al*. Compression of ECG as a signal with finite rate of innovation [C]. Engineering in Medicine and Biology Society, 2006, Annual International Conference of the IEEE-EMBS: 7564-7567.

[8] CHEN C, MARZILIANO P, KOT A C. 2D finite rate of innovation reconstruction method for step edge and polygon signals in the presence of noise[J]. *IEEE Trans on Signal Process*, 2012, **60**(6): 2851-2859.

[9] BABOULAZ L, DRAGOTTI P L. Exact feature extraction using finite rate of innovation principles with an application to image super-resolution[J]. *IEEE trans on Signal Process*, 2009, **18**(2): 281-298.

[10] UNSER M, BLU T. Cardinal exponential splines: part i-theory and filtering algorithms[J]. *IEEE Trans on Image Process*, 2004, **53**(4): 1425-1438.

[11] WANG A-ni, MA Cai-wen, MA Dong-mei. Moving object auto-extraction in image sequences [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(3): 565-570.
王阿妮，马彩文，马冬梅. 序列图像中运动目标的自动提取方法[J]. 光子学报，2010，**39**(3)：565-570.

[12] YU Chun-yan, WU Li-qiao, LI Jian-ming. A background reconstruction algorithm based on pixel sequence pattern classification[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(7): 1036-1045.
余春艳，吴立峤，李建明. 基于像素序列形态的适应性背景重构算法.[J] 光子学报，2011，**40**(7)：1036-1045.

[13] LIU Zhe, ZHANG He-ni, ZHANG Yong-liang, *et al*. Image reconstruction based on weak selected regularized orthogonal match pursuit algorithm[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(10): 1217-1221.
刘哲，张鹤妮，张永亮，等. 基于弱选择正则化正交匹配追踪的图像重构算法[J]. 光子学报. 2012，**41**(10)：1217-1221.