

doi:10.3788/gzxb20134204.0437

# 超短脉冲径向偏振光束的解析解及时空耦合效应

陆大全

(华南师范大学 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

**摘要:**从超短脉冲光束的傍轴传输方程出发, 运用傅里叶变换和相关数学算符的对易性, 得到了超短脉冲径向偏振光束的解析表达式. 该解可适用于任意脉冲驱动的径向偏振光束. 基于该解析表达式并结合具体例子, 讨论了超短脉冲径向偏振光束在自由空间中的传输性质. 结果表明, 在传输过程中时空耦合主要体现在光束边沿的脉冲延迟. 这一效应导致了脉冲不同时间位置处横向光强分布随传输的变化, 以及脉冲前后沿关于束腰的不对称性. 本文的方法同样适用于得到超短脉冲方位角偏振光束的解析解和传输性质.

**关键词:**超短脉冲; 径向偏振; 时空耦合

中图分类号: O443

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)04-0437-4

## Analytical Solution and Spatiotemporal Coupling Effect for Ultra-short Pulsed Radially Polarized Beams

LU Da-quan

(Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

**Abstract:** Based on the propagation equation which governs the propagation of ultra-short pulsed beams, and by utilizing the Fourier transform technique as well as the commutation relation between two mathematical operators, the analytical solution for ultra-short pulsed radially polarized beams is obtained. This solution is applicable to radially polarized beams driven by any pulse. On the basis of the solution, the propagation properties of the ultra-short pulsed radially polarized beams are discussed. It shows that the pulse at the beam periphery is delayed compares to that around the beam center. This effect results in the the varying of transverse intensity distribution of the ultra-short pulsed radially polarized beam at different temporal positions during propagation, and the asymmetric intensity distribution of the vertical profile at the head and the trail of the pulse. The method used in this paper is applicable in obtaining the analytical solution and the propagation properties for the ultra-short pulsed azimuthally polarized beams.

**Key words:** Ultra-short pulse; Radially polarized beams; Spatiotemporal coupling

## 0 引言

尽管从激光器的发明到现在仅仅半个世纪, 但人们已经可以产生不同波段、不同功率、不同模式的各种各样的激光, 并广泛应用于科研、工业、国防、通信等诸多领域. 径向偏振激光是一种特殊的激光模式, 它具有环形的光束横向空间结构; 同时在光

束不同横向位置有不同的偏振方向, 并且每一点的偏振均沿环形结构的半径方向. 由于具有这样的特殊结构, 使它在光存储、粒子捕陷、粒子加速、高分辨显微术、激光加工等方面具有重要的应用价值<sup>[1]</sup>. 在一些应用如高能粒子加速中, 往往追求瞬态的高功率实现有效的加速. 在平均功率有限的条件下 (如桌面激光系统), 在现有技术条件下得到瞬态超

基金项目: 国家自然科学基金(No. 11174091)资助

第一作者: 陆大全(1978-), 男, 副研究员, 博士, 主要研究方向为激光传输理论. Email: ludq@sncu.edu.cn

收稿日期: 2012-08-31; 录用日期: 2012-11-05

高功率最经济有效的方法是产生超短脉冲光束<sup>[2-5]</sup>.

前人的研究表明,由于时空耦合效应的存在,超短脉冲光束与准单色光束的传输性质有很大的区别<sup>[6-12]</sup>.研究超短脉冲光束的传输性质,对于更深入地了解激光性能、开发更多的应用领域、以及更好地控制激光与物质相互作用有重要意义.建立数学解析解无疑是对超短脉冲光束的时空分布及传输性质进行研究最直观、方便的手段,因此对于脉冲光束的求解一直是脉冲光束传输研究的重要内容.

本文从超短脉冲光束的傍轴传输方程出发,运用傅里叶变换和相关数学算符的对易性,得到了超短脉冲径向偏振光束的解析表达式.该解可适用于任意脉冲驱动的径向偏振光束.基于此解并结合例子,本文讨论了超短脉冲径向偏振光束在自由空间中的传输性质.结果表明,在传输过程中时空耦合主要体现在光束边沿的脉冲延迟.这一效应导致了脉冲不同时间位置处横向光强分布随传输距离的变化,以及脉冲前后沿关于束腰的不对称.

## 1 超短脉冲径向偏振激光的解析解

在移动坐标系  $t' = t - z/c$ ,  $z' = z$  中,超短脉冲光束解析解可用  $E = A(\mathbf{r}, z', t') \exp(-i\omega_0 t')$  表示,其中  $\omega_0$  为载波频率,  $A$  为脉冲包络;通常超短脉冲的时间和空间会互相影响(这种现象有称为时空耦合),包络  $A$  不能时空分离.由麦克斯韦方程组可得脉冲光束包络所满足的方程<sup>[6]</sup>

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 + \partial_{z'} - 2i \frac{\omega_0}{c} \partial_{t'} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \partial_{t'} \right) \right] A = 0 \quad (1)$$

傍轴近似下,方程(1)可简化为傍轴方程

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 - 2i \frac{\omega_0}{c} \partial_{z'} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \partial_{t'} \right) \right] A = 0 \quad (2)$$

此方程包含了衍射、传输及时空耦合项,直接对方程求解比较困难.为简化计,将其转换到频率域去.通过傅里叶变换,可得频率域中的传输方程

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 - 2i \frac{\omega}{c} \partial_z \right] \tilde{A} = 0 \quad (3)$$

式(3)仅包含传输项和衍射项,因此可以较容易得频率域中脉冲各频谱分量的解析解<sup>[8]</sup>.对各频谱分量进行反傅里叶变换即可得到时域中的脉冲光束表达式,即方程(2)的特解.对于等价共焦腔产生的频率为  $\omega$  的径向偏振光束<sup>[1]</sup>,可得其传输解析解

$$\tilde{A}(\omega) = \left( i \frac{\omega}{c} x \hat{e}_x + i \frac{\omega}{c} y \hat{e}_y \right) \times \frac{q(0)}{[q(z)]^2} \exp \left[ \frac{i\omega r^2}{2cq(z)} \right] \quad (4)$$

式中  $q(z) = z - iz_0$ ,  $z_0$  为瑞利距离(对于等价共焦腔,  $z_0$  对于任意频谱分量都为常量),瑞利距离与

光束束腰宽度  $\omega_0$  之间有如下关系:  $\omega_0(\omega) = 2z_0 c / \omega$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ .可见对于不同频率的径向偏振光束有不同的束腰宽度.

超短脉冲光束为所有频谱分量的叠加,即

$$A(t') = \int \tilde{P}(\omega) \left( i \frac{\omega}{c} x \hat{e}_x + i \frac{\omega}{c} y \hat{e}_y \right) \frac{q(0)}{[q(z)]^2} \times \exp \left[ \frac{i\omega r^2}{2cq(z)} \right] \exp[-i(\omega - \omega_0)t'] d\omega \quad (5)$$

式中  $\tilde{P}(\omega)$  为权重,即脉冲频谱分布.理论上,从以上积分得到的结果即为超短脉冲径向偏振激光的解析解,但实际上这样的积分在数学上比较复杂,很难直接得到解析解.

本文将通过等价的方法间接地得到其积分.利用算符的对易性,对方程(5)作变换可得

$$A(t') = \int \tilde{P}(\omega) \frac{q(0)}{q(z)} (\hat{e}_x \partial_x + \hat{e}_y \partial_y) \exp \left[ \frac{i\omega r^2}{2cq(z)} \right] \cdot \exp[-i(\omega - \omega_0)t'] d\omega = (\hat{e}_x \partial_x + \hat{e}_y \partial_y) \cdot \left\{ P\left(t - \frac{r^2}{2cq(z)}\right) \frac{q(0)}{q(z)} \times \exp \left[ \frac{i\omega r^2}{2cq(z)} \right] \right\}$$

即

$$A(t') = \left( \frac{x}{cq} \hat{e}_x + \frac{y}{cq} \hat{e}_y \right) \frac{q(0)}{q(z)} \exp \left[ \frac{i\omega_0 r^2}{2cq(z)} \right] \times \left[ i\omega_0 P\left(t - \frac{r^2}{2cq(z)}\right) - P'\left(t - \frac{r^2}{2cq(z)}\right) \right] \quad (6)$$

式中  $P(t)$  为  $\tilde{P}(\omega)$  的反傅里叶变换,亦即任意的脉冲形状,  $P'$  为  $P$  的一阶导数.如上,得到了超短脉冲径向偏振光束的解析解.由式(6)知,超短脉冲径向偏振光束的时间和空间在数学上不再是可分离的,而是会互相影响,从而形成时空耦合效应.

## 2 超短脉冲径向偏振激光的时空耦合效应

结合具体例子讨论超短脉冲径向偏振激光的传输性质.假设脉冲形状为高斯分布,即  $P(t) = \exp(-t^2/\Delta t^2)$  ( $\Delta t$  为脉冲长度,例子中取  $\Delta t$  为载波频率的一个振荡周期),由式(6)有

$$A(t') = \left( \frac{x}{cq} \hat{e}_x + \frac{y}{cq} \hat{e}_y \right) \frac{q(0)}{q(z)} \left[ i\omega_0 + \frac{2(t - r^2/2cq(z))}{\Delta t^2} \right] \cdot \exp \left[ i \frac{\omega_0 r^2}{2cq(z)} - \frac{(t - r^2/2cq(z))^2}{\Delta t^2} \right] \quad (7)$$

基于式(7)作图并讨论超短脉冲径向偏振激光的传输性质,特别是时空耦合特性.

图1比较了不同传输距离及不同横向位置处的脉冲光强分布情况.从图中可以看到,在脉冲光束束腰处,各个不同横向位置处的脉冲尖峰均处于同一时间位置( $t'=0$ )处;而在非束腰位置,则会出现光束脉冲的延迟,越往边沿延迟越厉害.并且这一

现象随着传输距离的增加而变的越来越明显. 在传输过程中, 脉冲的移动速度代表了脉冲的群速度. 因此, 超短脉冲径向偏振激光的群速度分布在不同

横向位置是不同的; 并且越靠近脉冲边沿, 群速度就越小.

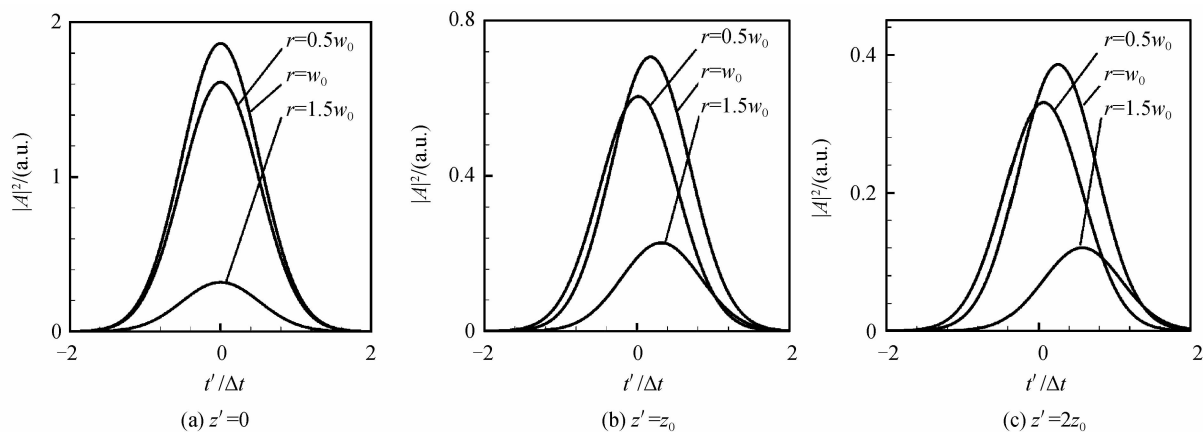


图 1 超短脉冲径向偏振光束在不同传输距离及不同横向位置处的脉冲光强分布

Fig. 1 The temporal intensity distribution of the ultra-short pulsed radially polarized beam at different propagation distances and transverse positions

图 2 比较了不同传输距离及脉冲不同位置处横向脉冲光强分布情况. 从图中可以看到, 不在脉冲光束束腰处, 脉冲头部、中部和尾部的横向光强分布宽度均相同, 而随着传输距离的增大, 三者横向分布的宽度发生了变化(脉冲头部的光束宽度要明

显小于脉冲尾部的宽度); 并且传输距离越远, 这种差别越显著. 实际上, 这种现象同样是由脉冲延迟效应引起: 由于传输过程中光束边沿的脉冲发生了延迟, 导致光束边沿的强度分布主要是在脉冲的尾部, 而光束中心的强度分布主要是在脉冲的头部.

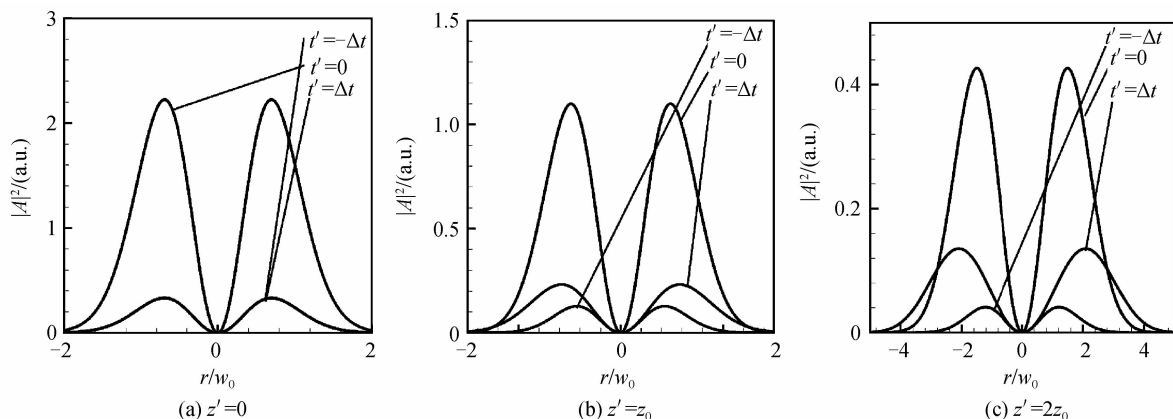


图 2 超短脉冲径向偏振光束在不同传输距离及不同时间位置处的横向光强分布

Fig. 2 The transverse intensity distribution of the ultra-short pulsed radially polarized beam at different propagation distances and temporal positions

脉冲延迟还导致了另一现象: 如果将脉冲头部、中部及尾部分开来看, 会发现脉冲尾部的衍射作用(即光束的发散)较大, 中部的衍射作用次之, 尾部的衍射作用则较小(图 3). 这实际上只是一个表象, 如果从频谱域来看, 各个频谱分量表征衍射程度的瑞利距离是相等的, 因此各频谱分量随传输的发散程度是一样的. 但是在时间域来看, 由于有前述脉冲延迟现象的存在, 导致脉冲尾部在传输过程中逐渐以边沿的光强分布为主, 所以看起来脉冲尾部的发散程度要大, 而脉冲头部则反之. 另外, 由于脉

冲的延迟, 能量向尾部转移, 直接导致了脉冲尾部的光强比脉冲头部的光强要大.

另外, 对于单色连续光而言, 光束关于束腰是完全左右对称的. 但对于超短脉冲径向偏振激光, 脉冲的头部和尾部在传输过程中光束的对称性会被破坏. 以脉冲头部为例(图 4), 在束腰的左侧光束较宽, 传输到右侧后光束相对左边对称位置要窄, 从而形成图 4 所示的蝴蝶状传输图像. 这也是因为传输过程中光束边沿的能量向尾部移动所导致的.

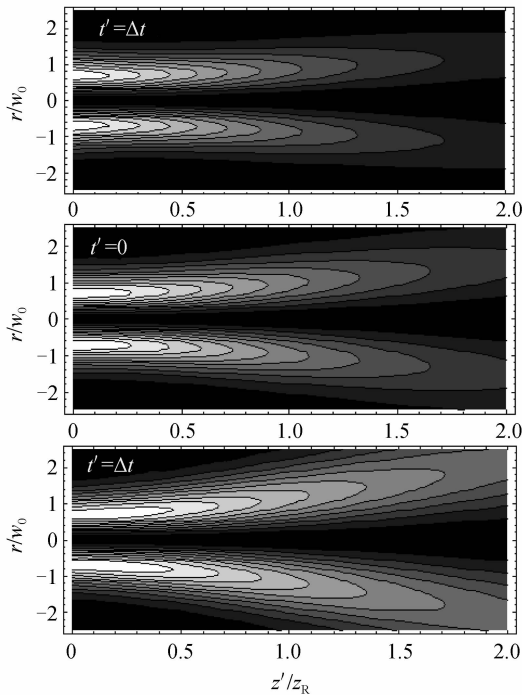


图3 脉冲头部( $t' < 0$ )、中部( $t' = 0$ )、及尾部( $t' > 0$ )的空间纵剖面光强分布

Fig. 3 The vertical profile for the intensity distribution at the head ( $t' < 0$ ), the middle ( $t' = 0$ ), and the trail ( $t' > 0$ ) of the pulse

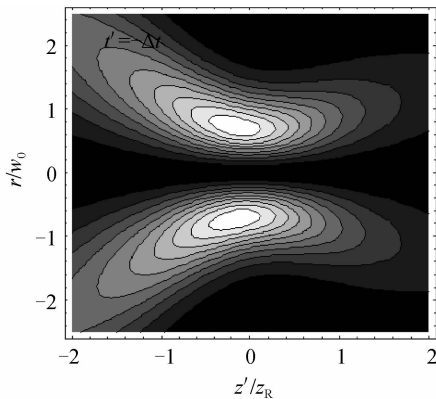


图4 脉冲头部( $t' < 0$ )的空间纵剖面光强分布

Fig. 4 The vertical profile for the intensity distribution at the head ( $t' < 0$ ) of the pulse

### 3 讨论

从能量分布角度来看,径向偏振超短脉冲激光的重要特征是具有环形的光束横向空间结构.实际上,还有另外一类光束的横向光强分布也是环形的,那就是方位角偏振的超短脉冲光束.它与本文研究的径向偏振超短脉冲激光的区别只在于偏振方向的不同,而横向光强分布是一样的.在频域中,方位角偏振的超短脉冲光束的表达式为<sup>[1]</sup>

$$\tilde{A}'(\omega) = \left( i \frac{\omega}{c} x \hat{e}_y - i \frac{\omega}{c} y \hat{e}_x \right) \times \frac{q(0)}{[q(z)]^2} \cdot \exp \left[ \frac{i\omega r^2}{2cq(z)} \right] \quad (8)$$

对比式(4)与式(8)可知,本文的方法同样适用于得到其时域中的脉冲光束解析表达式,并且该脉冲光束也具有与超短脉冲径向偏振光束相类似的传输性质和时空耦合特性.二者区别主要体现在偏振特性上.在此不再论述.

### 4 结论

本文从超短脉冲光束的傍轴传输方程出发,运用傅里叶变换和相关数学算符的对易性,得到了超短脉冲径向偏振光束的解析表达式.基于这个解析表达式,讨论了超短脉冲径向偏振光束在自由空间中的传输性质.结果表明,在传输过程中时空耦合主要体现在光束边沿的脉冲延迟.这一效应导致了脉冲不同时间位置处横向光强分布随传输的变化,以及脉冲前后沿关于束腰的不对称性.这些研究结果对于深入地了解超短脉冲径向偏振激光特性、更好地控制对脉冲光束结构敏感的物理过程(如电子加速)具有理论参考价值.本文的方法同样适用于得到超短脉冲方位角偏振光束的解析解和传输性质.

#### 参考文献

- [1] ORON R, BLIT S, DAVIDSON N, *et al.* The formation of laser beams with pure azimuthal or radial polarization[J]. *Applied Physics Letters*, 2000, **77**(21): 3322-3324.
- [2] MORGNER U, KARTNER F X, CHO S H, *et al.* Sub-two-cycle pulses from a Kerr-lens mode-locked Ti: sapphire laser[J]. *Optics Letters*, 1999, **24**(6): 411-413.
- [3] PSHENICHNIKOV M S, de BOEIJ W P, WIERSMA D A. Generation of 13-fs, 5-MW pulses from a cavity-dumped Ti: sapphire laser[J]. *Optics Letters*, 1994, **19**(8): 572-574.
- [4] YAMANE K, ZHANG Z, OKA K, *et al.* Optical pulse compression to 3.4 fs in the monocycle region by feedback phase compensation[J]. *Optics Letters*, 2003, **28**(22): 2258-2260.
- [5] SHVERDIN M Y, WALKER D R, YAVUZ D D, *et al.* Generation of a single-cycle optical pulse[J]. *Physical Review Letters*, 2005, **94**(1): 033904.
- [6] PORRAS M A. Ultrashort pulsed Gaussian light beams[J]. *Physical Review E*, 1998, **58**(1): 1086-1093.
- [7] BRABEC T, KRAUSZ F. Nonlinear optics pulse propagation in the single-cycle regime[J]. *Physical Review Letters*, 1997, **78**(17): 3282-3285.
- [8] KAPLAN A E. Diffraction-induced transformation of near-cycle and subcycle pulses[J]. *JOSA B*, 1998, **15**(3): 951-955.
- [9] LÜ B, LIU Z. Propagation properties of ultrashort pulsed Bessel beams in dispersive media[J]. *JOSA A*, 2003, **20**(3): 582-587.
- [10] PORRAS M A. Propagation of single-cycle pulsed light beams in dispersive media[J]. *Physical Review A*, 1999, **60**(6): 5069-5073.
- [11] LIDNER F, PAULUS G G, WALTHER H, *et al.* Gouy phase shift for few-cycle laser pulses[J]. *Physical Review Letters*, 2004, **92**(11): 113001.
- [12] WANG Z, ZHANG Z, XU Z, *et al.* Space-time profiles of an ultrashort pulsed Gaussian beam [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1997, **33**(4): 566-573.