

doi:10.3788/gzxb20134212.1430

## 带限剪切波变换与全变差结合的图像去噪

路雅宁, 郭雷, 李晖晖

(西北工业大学 自动化学院, 西安 710129)

**摘要:** 基于带限剪切波变换理论, 提出了一种带限剪切波与全变差相结合的去噪算法. 根据剪切波变换在不同分解尺度的噪音标准差设置不同的阈值对噪音图像进行重构, 以此重构图像作为全变差去噪的初始图像进行全变差最小化去噪, 经过迭代后得到最终去噪结果. 实验结果表明, 与基于多尺度几何分析的其他去噪算法(曲波变换、非下采样轮廓波变换、剪切波变换直接硬阈值去噪)相比, 视觉效果与峰值信噪比数值有明显的提高, 且保留了更多的纹理、边缘等图像细节信息.

**关键词:** 图像去噪; 多尺度几何分析; 剪切波变换; 全变差

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)12-1430-6

## Total Variation Based Band-limited Shearlets Transform for Image Denoising

LU Ya-ning, GUO Lei, LI Hui-hui

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** Noise reduction is an important image pre-processing for improving the quality of image. Shearlet transform, as a method of multiscale geometric analysis, is more suitable for image processing because of better approximation precision and sparsity description. A novel approach based on the band-limited shearlet transform and total variation for image denoising was proposed. Unlike traditional hard threshold method, different thresholdings were used at each scale to obtain good estimate. The reconstruction image was used as initial image of total variation minimum method. Numerical examples demonstrated that the approach is highly effective at denoising complex images. Compared with other methods in multiscale geometric analysis domain, such as nonsubsampling contourlet transform, curvelet transform and hard-threshold method of shearlet transform, the denoised image in this paper removed the noise while retaining as much as possible the important signal features and details such as edges and texture information.

**Key words:** Image denoising; Multiscale Geometric Analysis(MGA); Shearlet transform; Total variation

### 0 引言

图像去噪是图像处理中的一个基础性的研究课题. 目前, 在该领域最具影响的研究方法是以小波、脊波、曲波为代表的计算调和与分析(Computational Harmonic Analysis, CHA)方法和以变分法、非线性扩散、水平集为代表的偏微分方程(Partial differential Equations, PDEs)方法. 近年来, 在小波

理论的基础上, 多尺度几何分析<sup>[1]</sup> (Multiscale Geometric Analysis, MGA)方法在图像处理中得到了广泛的应用. MGA方法不但和小波一样具有局部时频分析能力, 而且具有比小波变换更强的方向选择和辨识能力, 可以非常有效地表示信号中具有方向性的奇异性特征, 对图像边缘的表达更优于小波. 目前, 出现了众多对图像的稀疏表示方法, 如 Ridgelet<sup>[2]</sup>、Curvelet<sup>[3-4]</sup>、Contourlet<sup>[5-6]</sup> 和

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60802084)和西北工业大学基础研究基金(No. JC20110266)资助

第一作者: 路雅宁(1977-), 女, 博士研究生, 主要研究方向为多尺度几何分析、图像处理. Email: luyaning816@163.com

导师: 郭雷(1956-), 男, 教授, 主要研究方向为神经计算、图像与视频处理、模式识别等. Email: lguo@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2013-04-26; 录用日期: 2013-06-14

Shearlet<sup>[7-8]</sup>等.在此基础上,出现了许多基于多尺度几何分析的去噪算法<sup>[9-10]</sup>,其中,Shearlet 变换由于其方向敏感性、平移不变性、稳定性以及最优稀疏近似性等优点脱颖而出,在图像去噪<sup>[11-12]</sup>、边缘提取<sup>[8]</sup>等方面显示了巨大的潜力.

基于全变差正则化的 PDEs 方法因具有较强的边缘保护能力,它可以在去噪的同时很好地保持边缘.然而,在保持对比度和纹理信息方面存在不足.近年来,为了弥补计算调和分析和变分法的不足,越来越多的学者致力于二者的结合<sup>[11-13]</sup>.本文正是将剪切波对高维函数的最优稀疏表示能力和全变差正则化方法的边缘保护能力有机地结合起来,在保护边缘等重要信息的前提下,减少抑噪时所产生的伪吉布斯振荡,以期得到更为理想的视觉效果.

本文首先介绍了一种带限 Shearlet 变换的数字实现方法,在此基础上对剪切波域的硬阈值去噪算法进行修改,引入正则化函数模型得到最终的去噪结果.与简单的硬阈值相比,不是简单地将小于阈值的系数置零,而是在不同的分解尺度下采用不同的阈值,然后对图像进行重构.在全变差最小的条件下,对重构图像进行投影操作后进行适当的迭代修正.实验结果表明,该方法能够很好地抑制和去除噪声,同时也能很好地保留图像边缘和纹理等细节特征.

## 1 剪切波理论及实现

### 1.1 连续 Shearlet 变换

对于连续 Shearlet 变换<sup>[7-8,14]</sup>,定义有一个尺度(膨胀)矩阵  $A_a$  和一个剪切矩阵  $S_s$ ,  $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , Shearlets 由函数  $\psi_{a,s,t}(\psi \in L_2(\mathbb{R}^2))$  经膨胀、剪切和平移得到

$$\psi_{a,s,t} = a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} (x-t) \right). \text{假定 } \hat{\psi} \text{ 可}$$

以写为  $\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2) = \hat{\psi}_1(\omega_1) \hat{\psi}_2(\omega_2/\omega_1)$ , 傅里叶变换后得到

$$\hat{\psi}_{a,s,t}(\omega) = a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} (\cdot - t) \right) \Lambda(\omega) = a^{-\frac{3}{4}} e^{-2\pi i(\omega, t)} \psi \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} (\cdot) \right) \Lambda(\omega) =$$

$$a^{-\frac{3}{4}} e^{-2\pi i(\omega, t)} (a^{-\frac{3}{2}})^{-1} \hat{\psi} \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ s\sqrt{a} & \sqrt{a} \end{pmatrix} \omega \right) = a^{\frac{3}{4}} e^{-2\pi i(\omega, t)} \hat{\psi}_1(a\omega_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( s + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) \quad (1)$$

则 Shearlet 变换函数定义为

$$SH_{\hat{\psi}}(f)(a, s, t) = \langle f, \psi_{a,s,t} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,s,t} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \hat{f}(\omega), \overline{\hat{\psi}_{a,s,t}(\omega)} \rangle d\omega = a^{\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \hat{f}(\omega), \hat{\psi}_1(a\omega) \cdot \hat{\psi}_2(a^{-\frac{1}{2}}(\omega_2/\omega_1 + s)) e^{2\pi i(\omega, t)} \rangle d\omega = a^{\frac{3}{4}} \cdot F^{-1}(\hat{f}(\omega) \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2(a^{-\frac{1}{2}}(\omega_2/\omega_1 + s)))(t) \quad (2)$$

### 1.2 离散 Shearlet 变换

锥形域离散剪切波<sup>[15-17]</sup>系统

$$SH(\varphi, \psi, \tilde{\psi}; \Delta, \Lambda, \tilde{\Lambda}) = \Phi(\varphi; \Delta) \cup \Psi(\psi; \Lambda) \cup \tilde{\Psi}(\tilde{\psi}; \tilde{\Lambda}) \quad (3)$$

其中,  $\Delta = \mathbb{Z}^2$  且

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} = \{(j, k, m) : j \geq 0, |k| \leq 2^j, m \in \mathbb{Z}\}$$

这里选用了尺度为  $4^j$  的整型值,比  $2^j$  更好地适用于数字设置.进一步,令  $\psi$  是一个典型的剪切波,即  $\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2(\xi_2/\xi_1)$ , 此处,  $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$  是一个小波,且  $\hat{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \hat{\psi}_1 \subseteq [-4, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, 4]$ ,  $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$  是一个冲击函数,且  $\hat{\psi}_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \hat{\psi}_2 \subseteq [-1, 1]$ .

在锥形域,离散剪切波变换的形式为

$$f \rightarrow \langle f, \psi_\eta \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_\eta \rangle = \langle \hat{f}, 2^{-j\frac{3}{2}} \hat{\psi} \cdot (S_k^T A_{4^{-j}} \cdot) e^{2\pi i(A_{4^{-j}} S_k m \cdot)} \rangle \quad (4)$$

其中,  $\eta = (j, k, m, l)$  为尺度  $j$ , 方向  $k$ , 位置  $m$  和锥形域  $l$ . 对于连续域数据(考虑所有的锥形域在内)的剪切波变换形成了频域的梯形分片显然不是笛卡尔坐标.一个更好地适用于这种情况的数字网格即“伪极”网格.

### 1.3 离散剪切波变换的实现

现将离散剪切波变换(Fast Discrete Shear Transform, FDST)分解为:

1) 伪极傅里叶变换(Pseudo Poar Fourier Transform, PPFT):带有基本方向过采样因子的伪极傅里叶变换;

2) 加权:乘以比重补偿形式的加权;

3) 窗型化:用 2D 逆傅里叶变换将伪极网格分解为矩形子带窗.

选择权重和子带窗则此变换为等间距的.逆变换也可以通过相应步骤来计算.具体实现步骤参见文献<sup>[15-16]</sup>.

为了表述简洁,令  $P$ 、 $\omega$  和  $W$  分别表示快速

PPFT,伪极网格上的权函数,以及包括剪切波窗化应用的窗化操作.将FDST算法总结为:

1)对于一个给定的图像  $I$ ,应用快速PPFT得到函数  $PI:\Omega_R \rightarrow C$ ;

2)对  $PI$  应用已计算权函数  $w:\Omega_R \rightarrow C$  的平方根得到  $\sqrt{w}PI:\Omega_R \rightarrow C$ ;

3)将函数  $wPI$  进行剪切波窗化,对每一个数组应用2D逆傅里叶变换得到剪切波系数  $W\sqrt{w}PI$ ,标记为  $c_{n_0}^l, l_0, n_0$  和  $c_{j,k,m}^l, j, k, m, l$ .图1显示了FDST和逆FDST的主要步骤.

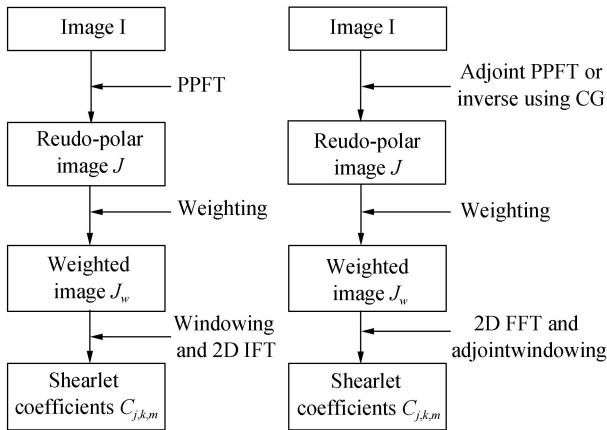


图1 FDST流程图(左)和其逆变换(右)

Fig.1 Flowcharts of the FDST(left)and its inverse(right)

#### 1.4 离散 Shearlet 参量设置

离散剪切波变换的参量设置如表1.

表1 离散剪切波变换的参量设置

Table 1 Parameters of discrete shearlet transform

Parameters	Range of parameters
$R$ :Oversampling rate	2,4,8,16...
$N$ :Positive integer	$n_0 \in N, N=2^{n_0}$
$j$ :Scale parameter	$j_L := -\lceil \log(R/2) \rceil$ $j_H := \lceil \log_4 N \rceil$ $j \in \{j_L, \dots, j_H\}$
$k$ :Shear parameter	$k \in \{-2^j, \dots, 2^j\}$

#### 1.5 两种逆变换形式

逆变换有两种可能性:共轭FDST和逆FDST.

##### 1.5.1 共轭FDST

$$(W\sqrt{w}P)^*W\sqrt{w}P = P^*\sqrt{w}(W^*W)\sqrt{w}P = P^*wP = Id \quad (5)$$

由  $W\sqrt{w}P$  简化的FDST逆变换为共轭FDST,计算步骤为:

1)对于给定的剪切波系数  $C$ ,即  $c_{n_0}^l, l_0, n_0$  和  $c_{j,k,m}^l, j, k, m, l$  计算计算系数  $c_{n_0}^l, l_0, n_0$  和  $c_{j,k,m}^l, j, k, m, l$  的剪切波窗化的线性联合.给出了函数  $W^*C:\Omega_R \rightarrow C$

2)对  $W^*C$  应用已算权函数  $w:\Omega_R \rightarrow C$  的平方根得到  $\sqrt{w}W^*C:\Omega_R \rightarrow C$ ;

3)通过计算快速“后向”PPFT应用快速共轭PPFT.注意到,对于向量  $c \in C^{N+1}$ ,共轭分形傅里叶变换与常量  $\alpha \in C$  相关,由  $F_{N+1}^-c$  给定.  $m > N$  时,应用于向量  $c \in C^m$  的共轭填充操作  $E_{m,N}^*$  由  $(E_{m,N}^*c)(k) = c(k), k = -N/2, \dots, N/2 - 1$  给定.共轭PPFT得到图像  $P^*\sqrt{w}W^*C$ .

##### 1.5.2 逆FDST

假如要求较高的重构准确度,可以使用诸如结合梯度的迭代方法.由于数字剪切波系统形成了Parseval框架,总有  $W^*W\sqrt{w}P = \sqrt{w}P$ .因此,迭代方法仅用于重构理解  $J := \sqrt{w}PI$  的图像  $I$ ,即对图像  $I$  解决等式  $P^*wPI = P^*wJ$ .由于  $J$  可能不在  $P$  的范围内,  $I$  通常用权重最小平方问题  $\min_I \|\sqrt{w}PI - \sqrt{w}J\|_2$  来计算.

## 2 全变差方法

令  $\Omega$  是  $R^2$  的边界区域,函数  $u \in C^1(\Omega)$  的全变差定义为<sup>[11-13]</sup>

$$TV(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\| dA \quad (6)$$

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \|\cdot\| \text{ 为标准范数.}$$

基于去噪目的的TV方法通常是最小化以下函数

$$F(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\| dA + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dA \quad (7)$$

$u$  为被估计图像,  $u_0$  为噪音图像,  $\lambda \in R_+$  是罚参量,相关的欧拉方程为

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \lambda(u - u_0) = 0 \quad (8)$$

Neumann边界条件为  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

为了提高稳定性,通常  $\|\nabla u\|$  表示为  $\|\nabla u\|_a = \sqrt{\|\nabla u\|^2 + \alpha}$ ,  $\alpha$  是一个正实数.寻找函数  $F$  最小化的方法基于求解以下方程的稳定解.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) - \lambda(u - u_0) \quad (9)$$

边界条件为  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, t$  为匹配参量.

上面描述的TV方法是下列最小化函数的一种特例.

$$\int_{\Omega} \varphi \|\nabla u\| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (10)$$

$\varphi \in C^2$  ( $R$  是偶正则化函数).

通过在 Neumann 边界条件下求解  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\varphi' \|\nabla u\|}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) - \lambda(u - u_0)$  可得解. 当  $\lambda=0$  且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x)/x=0$  时等式(10)为 PM 扩散方程的一个特例.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (\rho \|\nabla u\| \nabla u) \\ \rho(x) &= \varphi'(x)/x. \end{aligned} \quad (11)$$

在微分方法中,辅助函数  $\rho$  用来控制平滑度. 梯度  $\nabla u$  的值较小相应地为噪音或者少量边缘,微分处理作用较强,梯度  $\nabla u$  的值较大时相应地为边缘,不做微分处理或只做弱处理.

基于以上分析,剪切波变换类似于梯度.

### 3 基于 FDST 和全变差方法的图像去噪算法

#### 3.1 算法描述

利用 FDST 和全变差方法对图像进行去噪的算法描述为:1)对图像进行 FDST 变换,得到各个尺度和方向上的分解系数;2)对系数按照不同尺度噪音的标准差设置阈值重构得到估计图像;3)以估计图像为全变差方程的初始值进行全变差函数最小化计算;4)经过迭代计算后得到去噪后的估计图像.

其中,步骤 2)中对不同尺度和不同方向的剪切波系数,根据相应分解层的噪音标准差乘以尺度参

量来进行阈值估计的详细计算步骤为:①对纯噪音图像进行剪切波分解;②计算每一分解尺度系数的标准差  $\sigma_{j,l}$ ;③计算对应尺度的噪音阈值  $\tau_{j,l}$ ;④按照式(12)对噪音图像系数进行估计;

$$T_{\tau}(x) = \begin{cases} x & \text{if } |x| \geq \tau_{j,l} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

$\tau_{j,l} = c_j \sigma_{j,l}$ ,  $\sigma_{j,l}$  是尺度  $j$ 、方向  $l$  时的噪音标准差,  $c_j$  是尺度参量;⑤对处理后的系数进行逆变换.

#### 3.2 实验与分析

为了验证本文算法,与直接全变差(TV)去噪算法、基于曲波(FDCT)的阈值去噪算法、非下采样 Contourlet(NSCT)方法、剪切波硬阈值(Shearlet+HT)去噪算法、本文基于噪音尺度阈值的去噪算法(Shearlet+DeltaT)以及与全变差相结合的去噪算法(Shearlet+TV)在添加高斯噪音后的去噪效果进行了对比,噪音标准差为 30 时的实验结果如图 2 所示. 图 3、图 4 分别是图 2 各种算法右上角纹理部分与右膝部分的放大结果.

在实验中,TV 方法的迭代次数均为 10,由实验结果可以看出,TV 方法较好地保留了图像中的纹理信息,但是去噪效果不明显,而基于 FDCT 和 NSCT 的方法由于不具备平移不变性,去噪结果产生了大量划痕,尤其是基于曲波的去噪这种现象更明显. 而 Shearlet 变换能够对图像进行稀疏表示且产生最优逼近,具有平移不变性,所以即使采用硬阈

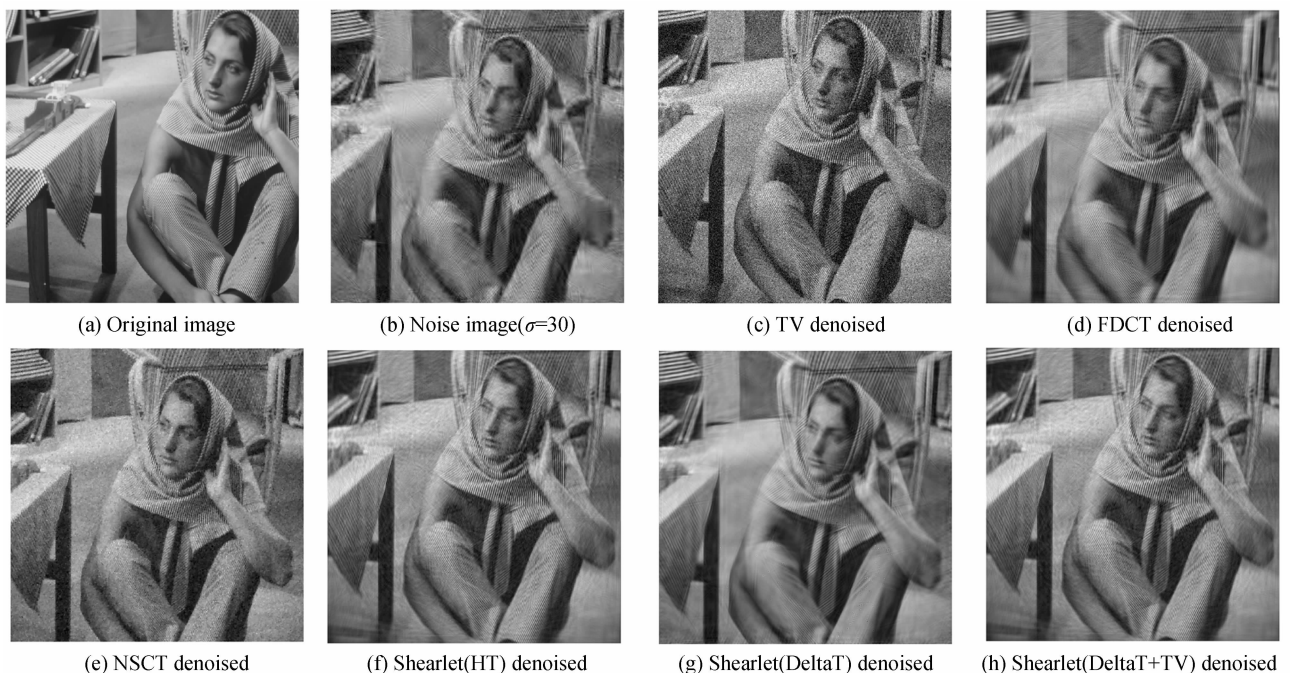


图 2 噪音标准差为 30 时各种去噪方法比较  
Fig. 2 Denoised image of different methods at  $\sigma=30$

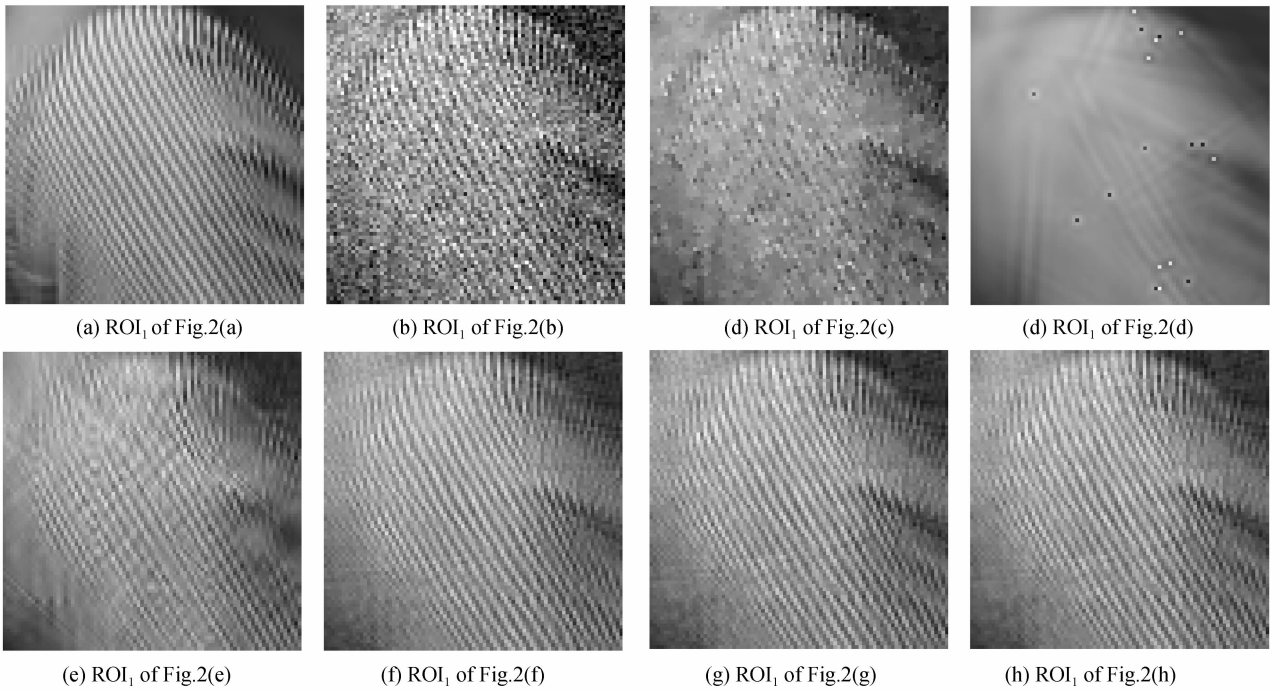


图 3 图 2 中部分区域放大图 1  
 Fig. 3 Zoom on region 1 of Fig. 2

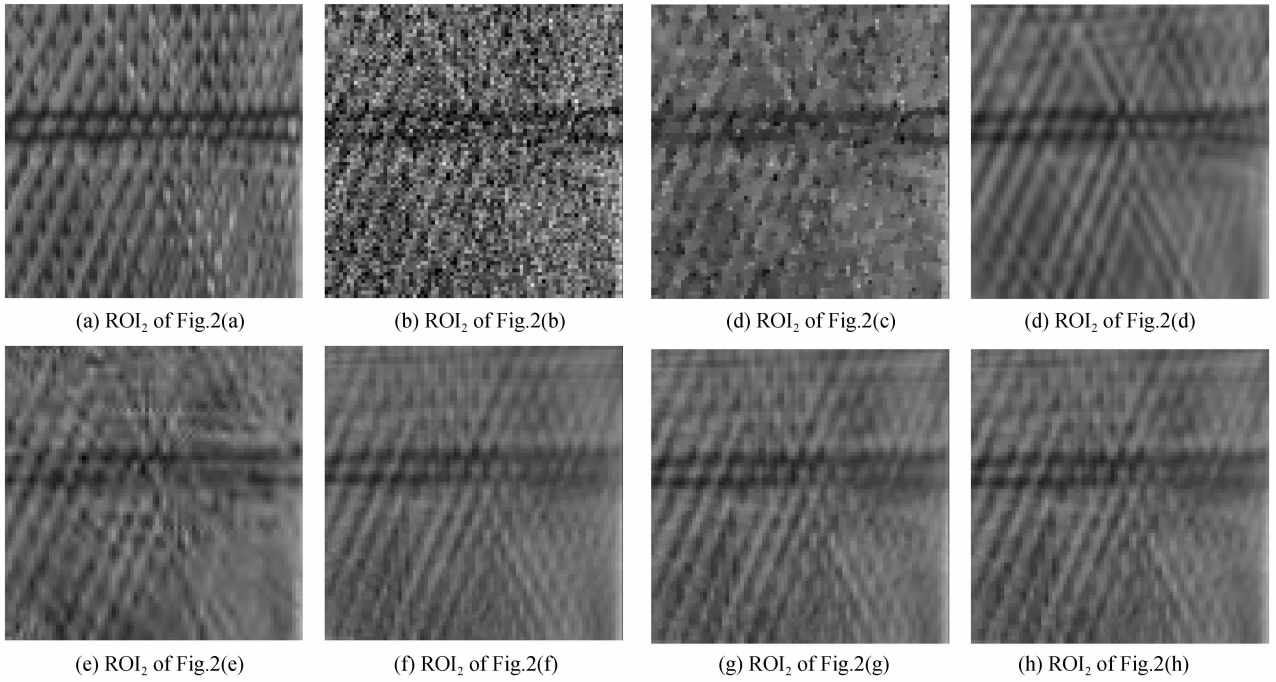


图 4 图 2 中部分区域放大图 2  
 Fig. 4 Zoom on region 2 of Fig. 2

值方法的去噪效果也好于前面所述的方法. 由放大后的细节图像更能明显看出. 本文基于尺度噪音标准差阈值和全变差的去噪算法较好地保留了图像的边缘和纹理信息, 去噪后的图像失真度最小.

图 5 给出了剪切波域硬阈值算法与本文算法在噪音标准差不同时的 PSNR 曲线图. 从图中可以看出, 当噪音增大时, 本文算法的去噪效果有较大的提高.

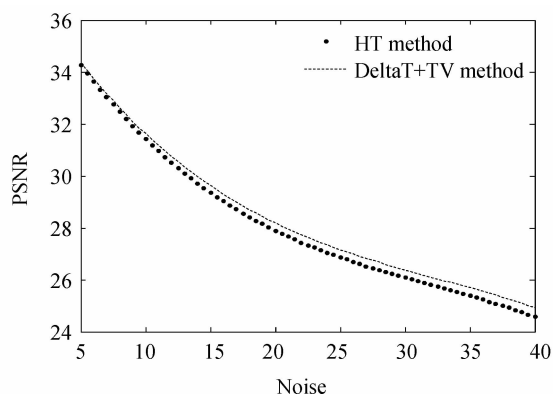


图5 剪切波域硬阈值去噪方法与本文去噪方法的 PSNR 值  
Fig. 5 PSNR between shearlet hard thresh and method in this paper

## 4 结论

本文在实现带限剪切波变换的基础上,提出了一种带限剪切波与全变差形结合的去噪算法。根据剪切波变换的不同尺度选取不同的阈值对噪音图像进行重构,以此重构图像作为新的噪音图像的估计结合全变差方法进行去噪。这种方法在抑制噪音的同时可以保护边缘,很好地保留图像中的纹理信息,与曲波域去噪算法、非下采样 NSCT 方法以及剪切波直接硬阈值去噪算法相比视觉效果与 PSNR 值都有较大的提高。

### 参考文献

- [1] JIAO Li-cheng, TAN Shan. Development and prospect of image multiscale geometric analysis [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, **31**(12A): 1975-1981.  
焦李成,谭山.图像的多尺度几何分析:回顾和展望[J].*电子学报*,2003,**31**(12A):1975-1981.
- [2] CANDLES E J, Ridgelets: Theory and applications[D]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1998.
- [3] CANDLES E J, DEMANET L, DONOHO D L, et al. Fast Discrete Curvelet Transforms, Applied and computational mathematics [M]. California: California Institute of Technology, 2005.
- [4] STARCK J L, EMMANUEL J, CANDLES E J, et al. The curvelet transform for image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2002, **11**(6): 670-684.
- [5] DO M N, VETTERLI M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation[J]. *IEEE Trans. Image processing*, 2005, **14**(12): 2091-2106.
- [6] WANG Xiang-hail, WEI Ting-ting, ZHOU Zh-guang. Remote sensing image fusion method based on the contourlet coefficients' correlativity of directional region[J]. *Journal of Remote Sensing*, 2010, **14**(5): 905-916
- [7] GUO Kang-hu, LABATE Demetrio. Analysis and identification of multidimensional singularities using the continuous shearlet transform [C]. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, 2012: 69-103.
- [8] GUO Kanghu, LABATE Demetrio. Characterization and analysis of edge using the continuous shearlet transform[J]. *SIAM Journal on Imaging Science*, 2009, **2**(3): 959-986.
- [9] YIN Ming, LIU Wei. Image denoising using mixed statistical model in nonsubsamped contourlet transform domain [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, **41**(6): 751-756.  
殷明,刘卫.非下采样 Contourlet 变换域混合统计模型图像去噪[J].*光子学报*,2012,**41**(6): 751-756.
- [10] WAND Yong-sheng, FU Yong-qing. Construction of complex contourlet packet transform and its application to image denoising[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1697-1701.  
王咏胜,付永庆,复轮廓波包的构造及其图像去噪应用[J].*光子学报*,2010, **39**(9):1697-1701.
- [11] EASLEY Glenn R, LABATE Demetrio, COLONNA Flavia. Shearlet based total variation for denoising[J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2009, **18**(2): 260-268.
- [12] HU Hai-zhi, SUN Hui, DENG Cheng-zhi, et al. Shearlet shrinkage de-noising based total variation regulariization[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2011, **16**(2): 168-173.  
胡海智,孙辉,邓承志,等.全变差正则化的 shearlet 收缩去噪[J].*中国图象图形学报*,2011,**16**(2):168-173.
- [13] ZHAO Jie, YANU Jian-lei. Remote sensing image denoising algorithm based on fusion theory using cycle spinning contourlet transform and total variation minimization [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1658-1665.  
赵杰,杨建雷.基于 Cycle Spinning Contourlet 变换和总变分最小化的遥感图像去噪算法[J].*光子学报*,2010, **39**(9): 1658-1665.
- [14] GUO Kanghu, LABATE Demetrio, LIM Wang-Q. Edge analysis and identification using the continuous shearlet transform[J]. *Computational Harmon. Analysis*, 2009, **27**(1): 24-46.
- [15] KUTYNIOK Gitta, SHAHRAM Morteza, DONOHO D L. Development of a digital shearlet transform based on Pseudo-Polar FFT. Proc. SPIE446, waveletsX III, 74460B, (September 04, 2009).
- [16] KUTYNIOK Gitta, LIM Wang-Q, ZHUANG X. Digital shearlet transforms[M]. *Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Springer, 2011.
- [17] KUTYNIOK Gitta, SHAHRAM M, ZHUANG X. ShearLab: A Rational design of a digital parabolic scaling algorithm. to appear in *SIAM on Imaging Sciences*, 2012.