

doi:10.3788/gzxb20134211.1350

大功率 LED 螺旋扁管水冷散热技术

王志斌, 张健, 刘丽君, 张骞, 刘永成

(燕山大学 电气工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要:提出了一种基于螺旋扁管的大功率发光二极管阵列水冷散热结构,并建立了机械模型.从换热设备小型化角度,以最优的换热效果和较低的水流功耗等作为换热器性能评价准则,对不同流速、管壁厚度、螺旋段长度、压扁厚度的螺旋扁管进行仿真分析.在某一换热工况下对螺旋扁管结构尺寸进行了优化,利用有限体积法求解了计算域,结果表明:优化后的螺旋扁管水冷结构具有很好的换热能力;对供电功率为 180 W 的发光二极管阵列照明系统进行散热,芯片最高温度为 57.573 9℃,可为大功率发光二极管照明系统的散热器工程设计提供一定的参考.

关键词:螺旋扁管; 大功率 LED; 水冷散热; 有限体积法

中图分类号: TN205

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2013)11-1350-5

Water Cooling Technology on High Power LED with the Twisted Tube

WANG Zhi-bin, ZHANG Jian, LIU Li-jun, ZHANG Qian, LIU Yong-cheng

(Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: A water cooling structure based on twisted tube to high power light emitted diode (LED) is proposed in this paper, and mechanical model is established. In order to get the best effect of heat dissipation in the case of heat transfer equipment minimization, low flow power consumption etc., the heat transfer performance of the twisted tube is investigated under different water velocity, wall thickness, length of the twisted section, and the thickness of the twisted tube cavity. In the operating conditions, the structural dimensions of the twisted tube are optimized, and the finite volume method is used to calculate the computation domain. The results of simulation indicate that the twisted tube system after optimizing has better properties of heat transfer; the heat exchanger is used in 180 W high power LED array luminaries, and the temperature of chips is lower than 57.573 9℃; the model and analysis results can provide a significance reference for the engineering radiator design of high power LED lighting system.

Key words: Twisted tube; High power LED; Water cooling; Finite volume method

0 引言

第四代新光源发光二极管 (Light Emitted Diode, LED) 从研制成功至今经过多年的发展,以其高集成度、高亮度、长寿命、全彩化、绿色节能等优势成为新世纪最具发展前景、最符合能源发展要求的优质光源.高集成度和高功率带来高亮度,也带来高结温.受封装技术的制约,LED 的光提取效率仅能达到 20% 左右,大量电能转化为热量导致 LED 结

温升高,且严重影响使用寿命,发光效率下降^[1],均匀性和一致性变差,波长红移^[2].控制 LED 结温使其可靠、有效散热成为 LED 当前研究的热点问题之一^[3].

Christensen 等研究了肋片散热器加功率风扇的条件下对流系数对 LED 封装热阻的影响^[4];马璐等采用侧面送风冷却的方式,得到了 40 W LED 灯具在 27℃ 条件下温升在 15℃ 左右的结论,但仅适用于小功率散热^[5].强制风冷可有效降低热阻,但风扇

基金项目:国家自然科学基金(No. 61107039)和河北省自然科学基金(No. F2012203202)资助

第一作者:王志斌(1977-),男,副教授,博士,主要研究方向为大功率 LED 及其应用技术,智能仪器仪表设计. Email: wzb_ysu@ysu.edu.cn

通讯作者:张健(1987-),男,硕士研究生,主要研究方向为大功率 LED 水冷散热技术. Email: hengshuizhangjian@163.com

收稿日期:2013-04-11;录用日期:2013-05-09

功率,噪音不可忽略.由于水在热导率、热容、性价比等方面优势, Kim、Lu 等采用热管结构^[6-7],袁柳林等设计了一种交错微通道散热结构^[8],万忠民等设计了多孔微热沉结构^[9]用于散热,但结构都比较复杂,制造工艺困难.梁雪艳等将内部具有弯曲流道结构的液冷基板用于 LED 模块散热^[10],邓阿强等研究了板式脉动热管在 LED 散热上的应用,95 W 最高温度 63.9℃,但体积、质量较大,成本较高^[11].本文提出利用螺旋扁管水冷的方法,对大功率 LED 照明系统进行主动散热,以保证灯具能够长期稳定的照明.

1 扁管与强化换热

1.1 螺旋扁管与直扁管

螺旋扁管与直扁管构成的大功率 LED 阵列散热器如图 1. 两管具有相同的长度、相同的 LED 阵列分布位置、相同的壁厚、相同的管截面特征长度.其中螺旋扁管螺旋段的长度与直扁管两 LED 阵列的距离相等. LED 阵列芯片经金属基印刷电路板 (Metal Core Printed Circuit Board, MCPCB)^[12]、热沉、导热材料等与散热管接触.

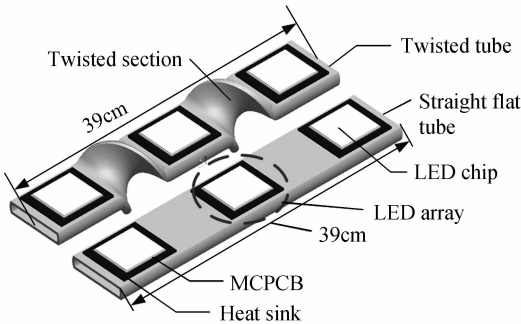


图 1 螺旋扁管与直扁管 LED 散热器

Fig. 1 Twisted tube and Straight flat tube LED radiators

1.2 强化换热理论

在三维正交笛卡尔坐标系下,管内水流动与热量传递需满足连续性方程^[9]

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

x 、 y 、 z 方向的动量方程分别为

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho g_y \quad (3)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$\mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (4)$$

能量方程

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + Q \quad (5)$$

式(1)~(5)中, t 为时间, ρ 为密度, c_p 为定压比热容, g 为重力加速度, μ 为流体粘度, p 为压力, Q 为传热量, u 、 v 、 w 分别为 x 、 y 、 z 方向上的速度, T 对 x 、 y 、 z 的偏导数分别为沿 x 、 y 、 z 方向的温度梯度, λ 为导热系数.

适合于螺旋均匀剪切流,自由流(射流和混合层),腔道流动和边界层流动的可实现 k - ϵ 模型输运方程^[13-15]为

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\gamma \epsilon}} + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b \quad (7)$$

式中 $C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right]$, $\eta = Sk/\epsilon$. 式(6)、(7)

中, G_k 表示由于平均速度梯度引起的湍动能, G_b 是浮力影响引起的湍动能, Y_M 是可压缩湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响. σ_k 、 σ_ϵ 分别是湍动能 k 及其耗散率 ϵ 的湍流普朗特数, $C_{3\epsilon}$ 是浮力对耗散率的影响, γ 为运动粘度.仿真过程中默认 $C_{1\epsilon} = 1.44$, $C_2 = 1.9$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.2$ ^[13-15].

$$S \equiv |\Omega_{ij}| + 2 \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|) \quad (8)$$

式中 $|\Omega_{ij}| \equiv \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$, $|S_{ij}| \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, 平均应变率 S_{ij} 定义为

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (9)$$

式中 u_i 为速度的雷诺平均, x_i 为坐标分量.湍流粘性系数为

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (10)$$

式中

$$C_\mu = \frac{1}{4.04 + \sqrt{6} \cos \varphi} \frac{U^* k}{\epsilon} \quad (11)$$

式(11)中, $\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{\sqrt{6} S_{ij} S_{jk} S_{kj}}{\sqrt{S_{ij} S_{ij}}} \right)$, $U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{ij}}$, $\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk} \omega_k$, $\Omega_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} - \epsilon_{ijk} \omega_k$, $\bar{\Omega}_{ij}$ 是在以角速度 ω_k 旋转的旋转坐标系中得到的平均旋转速率. C_μ 是平均应变率与旋度的函数.

2 仿真分析

2.1 螺旋管内压力

螺旋扁管的截面特征长度如图 2. 以椭圆轮廓为基础绘制的螺旋扁管模型截面初始值为 $R_x = 40$ mm, $R_y = 60$ mm, $d_1 = 22.12$ mm, $d_2 = 50$ mm, 其中厚度 $\delta = 3.2$ mm. 螺旋扁管直扁管换热器初始长度均为 39 cm, 如图 1, 其中螺旋管螺旋段长度为 90 mm, 直段长度为 70 mm.

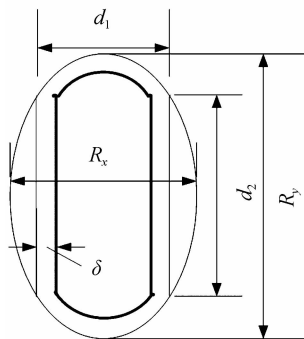


图 2 螺旋扁管绘图截面

Fig. 2 Twisted tube drawing cross-section

两散热器与 LED 阵列热沉均选用金属铝材料, 散热器与热沉之间的导热材料选用导热硅脂, 与散热器的间隙为 0.25 mm. 以共晶互联技术集成的 LED 阵列模型单块供电功率 60 W, 按照电光转换效率为 20% 计算, 有 80% 的功率转换为热量, 则单块产热 48 W. 图 1 中三块总供电功率 180 W, 总产热 144 W. 单块阵列芯片尺寸 48×38 mm², 厚度 1 mm. GaN 芯片材料热导率为 $140 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{k}^{-1}$. MCPCB 尺寸 42×40 mm², 厚度为 1 mm. 热沉尺寸 56×50 mm², 厚度为 2 mm. 印制电路板密度为 $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 热导率为 $1.5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{k}^{-1}$, 熔化温度为 600k. 定义入口为质量速度边界, 出口为压力出口边界, 给定静压与环境温度 27℃, 划分网格, 据式(1)~(11)、边界条件、初始条件, 忽略辐射换热并用有限体积法求解计算域, 可得热分析结果. 螺旋管

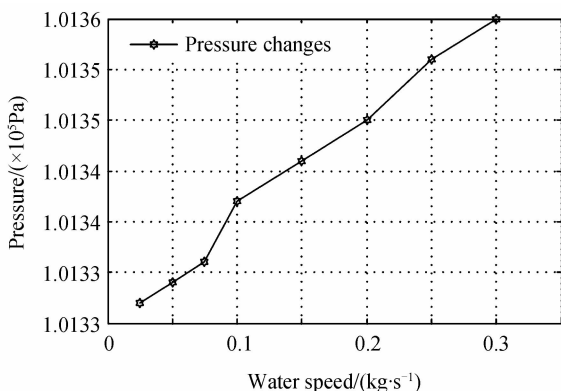


图 3 螺旋管内压力-水速曲线

Fig. 3 Helical pipe pressure-Water speed curve

内压力随水流速度变化的曲线如图 3, 管壳承受的压力在水速变化较大的情况下, 变化不大, 对材料的承受压力要求不高, 因此换热器材料可选取散热效果好, 材质轻的金属, 如金属铝等.

2.2 螺旋扁管与直扁管的比较

在相同的截面积, 相同的当量直径, 管壁厚度的条件下, 仅改变水流速度, 得到螺旋扁管与直扁管的水速-温度对比变化曲线如图 4.

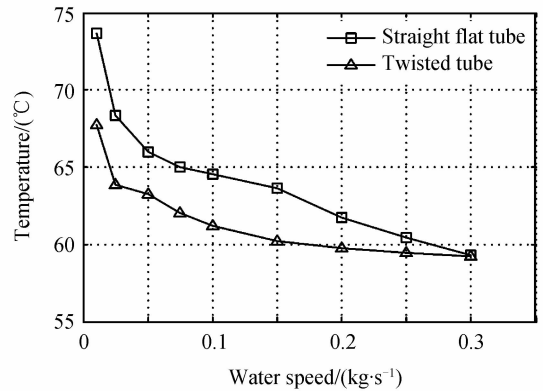


图 4 水速-温度曲线

Fig. 4 Water speed-Temperature curve

在较低的水流速度下, 螺旋扁管有较好的换热效果, 随着水速的增加, 两种换热器的换热效果会变得更好, LED 阵列温度逐渐降低, 而螺旋扁管在水速为 $0.1 \sim 0.3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 的区间内温度变化较缓慢, 相差 1°C 左右, 说明螺旋管可在一定情况下以较低水速实现较好的换热. 螺旋扁管换热器与直扁管换热器相比, 两条曲线的整体趋势基本相同, 只是螺旋扁管水冷散热器使 LED 阵列温度更低, 说明了螺旋扁管既有直扁管强化换热又有螺旋强化换热. 在水速为 $0.025 \sim 0.15 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 范围内, 螺旋扁管换热器的 LED 阵列芯片温度要低 $3 \sim 6^\circ\text{C}$. 但是随着水流速度增大, 螺旋强化换热在整个换热过程中所占比重逐渐减小, 主要换热效应为扁管强化换热, 以至于在水速为 $0.3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 两曲线交于一点, 此时螺旋结构的强化换热可以忽略.

2.3 螺旋管壁厚度对散热能力的影响

保持参量 $R_x = 40$ mm, $R_y = 60$ mm, $d_1 = 22.12$ mm, $d_2 = 50$ mm 不变, 改变螺旋扁管管壁厚度 δ , 调整入口水流速度, 在机械模型绘制软件允许的管壁厚度范围内得到水速、管壁厚度与温度的三维折线如图 5.

在相同的管壁厚度下, 随着水流速度的增大, 螺旋扁管出水口处 LED 阵列芯片的最高温度逐渐降低, 水流阻力较小; 在同一水流速度下, 改变管壁厚度, 螺旋扁管出水口处 LED 阵列芯片的最高温度随管壁厚度的增大, 温度先降低, 后增大. 管壁厚度值太小, 容易造成 LED 阵列热量积聚, 不利于热量传

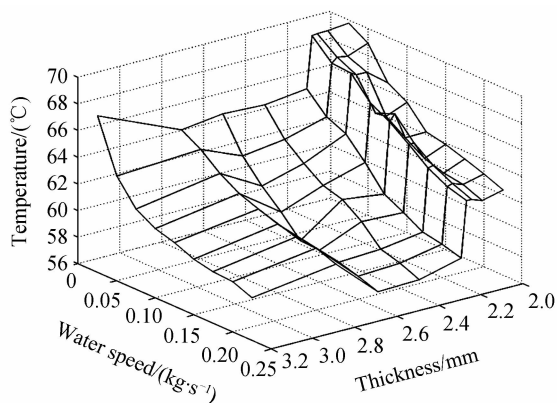


图 5 水速、管壁厚度与温度

Fig. 5 Water speed, thickness and temperature

递;管壁太厚,热源与液态传热介质间的距离增大,导热阻力增大,且螺旋管换热器(固体金属)与传热介质(液体水)接触面的温差变小,也不利于导热、传热与热交换的进行.由系统仿真可知,在管壁厚度为 2.6 mm,水流速度为 0.05 kg · s⁻¹时,LED 阵列芯片的最高温度为 62.930 6℃,即在 δ 约为 2.6 mm 左右时,螺旋扁管结构实现了最优散热效果.

2.4 压扁厚度对散热能力的影响

保持管壁厚度为 δ = 2.6 mm,水流速度为 0.05 kg · s⁻¹,改变特征值 d₁,可得到压扁厚度对散热能力的影响的曲线如图 6.

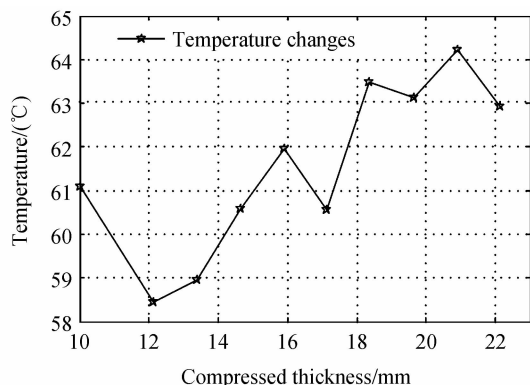


图 6 压扁厚度-温度曲线

Fig. 6 Compressed thickness-Temperature curve

螺旋扁管的散热能力并不随压扁厚度减小而线性增强,LED 阵列芯片温度震荡减小,而后又有上升.该扁管结构在 12.12 mm 的邻域内存在最佳的压扁厚度值,若压扁厚度低于此值,管内压力将急剧增大,如图 7.

2.5 变螺旋段长度对散热能力的影响

保持管壁厚度 δ = 2.6 mm,水流速度为 0.05 kg · s⁻¹,保持特征值 d₁ = 12.12 mm, R_x、R_y 不变,改变螺旋段长度,可得到螺旋段长度对散热能力的影响曲线如图 8.

由图 8 可知,温度并不随螺旋段长度的减小而成比例下降,螺旋段长度与温度的关系是一条具有

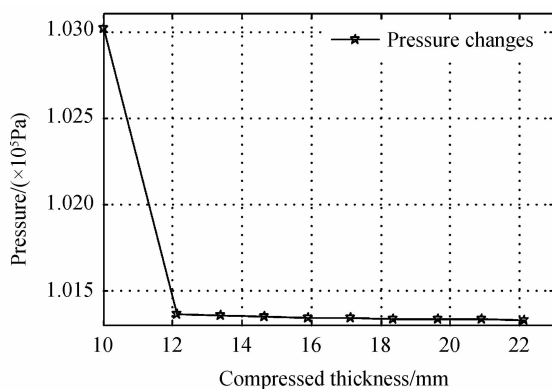


图 7 压扁厚度-压力曲线

Fig. 7 Compressed thickness-Pressure curve

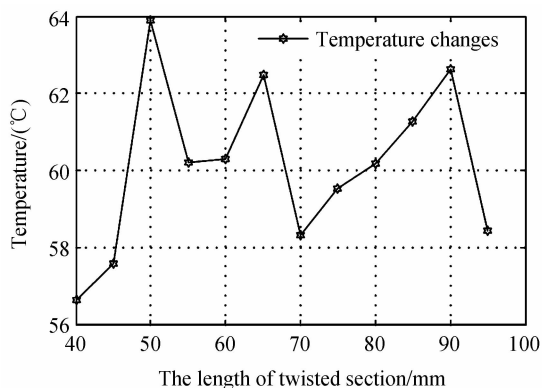


图 8 螺旋段长度-温度曲线

Fig. 8 Twisted length-temperature curve

极值的曲线,螺旋段长度初始值 90 mm 在极值点或其附近而具有较好的散热效果.由于螺旋段长度为 40 mm 的基础上再次减小长度,制造工艺已不允许,因此可取螺旋段为 45 mm.此时螺旋管的最优参量为管壁厚度 δ = 2.6 mm, R_x = 40 mm, R_y = 60 mm, d₁ = 12.12 mm, d₂ = 57.18 mm,螺旋段长度 45 mm,直段 70 mm,总长 30 cm.在水速为 0.05 kg · s⁻¹时,LED 阵列芯片的最高温度为 57.573 9℃,与优化前的最高温度 69.811℃(图 5)相比,散热能力有较大的提高.

图 9 是螺旋管内压力随螺旋段长度的变化而变化的曲线,40 mm 处螺旋管承受最大压力为 101 382 Pa.螺旋管既作支撑结构又作散热器,为了提高螺旋管耐压值可考虑高导热、高耐压合金材料.

2.6 变旋度对散热能力的影响

将一个完整的螺旋旋度归化为 1,前文分析所用螺旋扁管螺旋段旋度均为 1.利用 2.5 节中得到的优化后的各个参量,旋度为 0.5~1 的范围保持螺旋段长度为 45 mm 不变,由于此值在旋度为 1 时已接近工艺极限,旋度为 1~3 范围内按比例增大螺旋段长度.改变螺旋段旋度,可得到旋度对螺旋扁管散热器散热能力的影响如图 10 所示,图中旋度 2 表示两个完整的螺旋串联结构,螺旋段长度为

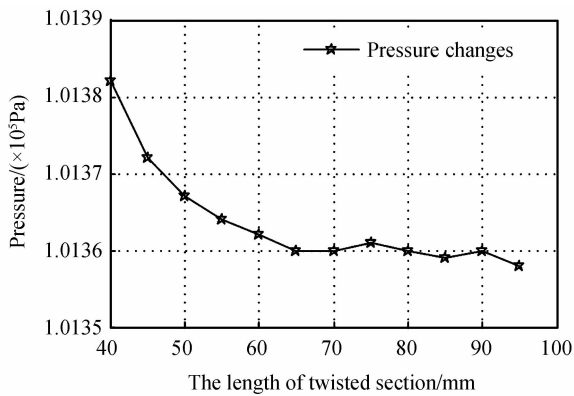


图9 螺旋段长度-压力曲线

Fig. 9 Twisted length-pressure curve

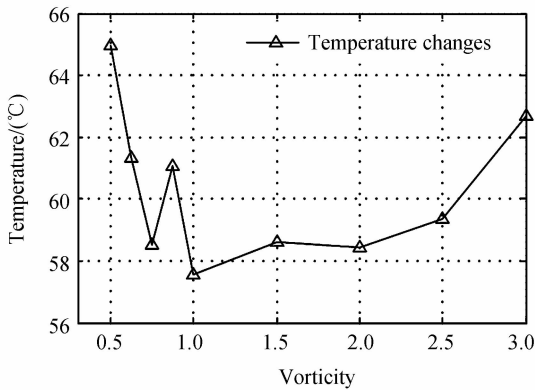


图10 旋度-温度曲线

Fig. 10 Vorticity-temperature curve

90 mm,其它依次类推。

由旋度温度曲线可知,减小旋度,LED阵列温度振荡上升,但一直增加螺旋个数只能增大散热器体积,无法提高螺旋扁管散热器的散热能力,最低温度落在单位旋度的附近。考虑到散热器工程设计的小型、简易、高效等原则,可选螺旋扁管换热器的旋度为1,即一个完整的螺旋结构,使同一散热器上的LED阵列处在同一平面内,便于光学设计。

3 结论

本文将螺旋扁管换热技术引入到大功率LED阵列水冷散热中,对螺旋扁管结构参量及水流速度等进行了优化,得到180 W LED照明系统芯片最高温度为57.573 9℃。与优化前相比,散热能力有较大幅度的提高。应用本文建立的机械模型及其参量,可根据LED阵列的具体工程应用条件与相应约束进一步优化,以便以最低的功耗达到最好散热效果。

参考文献

[1] WANG Jian, HUANG Xian, LIU Li, *et al.* Effect of temperature and current on LED luminous efficiency [J]. *Chinese Journal of Luminescence*, 2008, **29**(2): 358-362.
王健,黄先,刘立,等.温度和电流对白光LED发光效率的影响[J].*发光学报*,2008,**29**(2):358-362.

[2] DING Tian-ping, GUO Wei-ling, CUI Bi-feng, *et al.* The effect of temperature on the PL spectra of high power LED [J]. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2011, **31**(6):

1450-1453.
丁天平,郭伟玲,崔碧峰,等.温度对功率LED光谱特性的影响[J].*光谱学与光谱分析*,2011,**31**(6):1450-1453.

[3] CHHAJED S, XI Y, LI Y L, *et al.* Influence of junction temperature on chromaticity and color-rendering properties of trichromatic white-light sources based on light-emitting diodes [J]. *Journal of Applied Physics*, 2005, **97**(5): 054506-054508.

[4] CHRISTENSENA, GRAHAM S. Thermal effects in packaging high power light emitting diode arrays[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2009, **29**(2/3): 364-371.

[5] MA Lu, LIU Jing. Side air cooling heat LED package and its three-dimensional numerical simulation study[J]. *Journal of Illuminating Engineering*, 2011, **22**(3): 30-36.
马路,刘静.侧面送风冷却LED的热封装及其三维数值仿真研究[J].*照明工程学报*,2011,**22**(3):30-36.

[6] KIM L, CHOI J H, JANG S H, *et al.* Thermal analysis of LED array system with heat pipe[J]. *Thermochimica Acta*, 2007, **455**(1/2): 21-25.

[7] LU Xiang-you, HUA Tse-chao, LIU Mei-jing, *et al.* Thermal analysis of loop heat pipe used for high-power LED [J]. *Thermochimica Acta*, 2009, **493**(1/2): 25-29.

[8] YUAN Liu-lin, LIU Sheng, CHEN Ming-xiang, *et al.* The high-power LED array packaging thermal analysis based on the micro channel cooling technology [J]. *Semiconductor Optoelectronic*, 2006, **27**(6): 712-715.
袁柳林,刘胜,陈明祥,等.基于微通道致冷的大功率LED阵列封装热分析[J].*半导体光电*,2006,**27**(6):712-715.

[9] WAN Zhong-min, CHEN min, LIU Wei, *et al.* Research on porous micro heat sink for thermal management of high power LED[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, **46**(8): 109-113.
万忠民,陈敏,刘伟,等.基于多孔微热沉的大功率LED冷却技术研究[J].*机械工程学报*,2010,**46**(8):109-113.

[10] LIANG Xue-yan, SUN Zhi-jian, HUANG Qiu-yue. Study on the channel and heat transfer performance of liquid cold plat used for LED module[J]. *China Light&Lighting*, 2012, **1**(1): 6-10.
梁雪艳,孙志坚,黄秋月.LED模块用液冷基板的流道和换热性能研究[J].*中国照明电器*,2012,**1**(1):6-10.

[11] DENG A-qiang, JIA Li, XU Wen-yun. Plate pulsating heat pipe for LED heat[J]. *Engineering Thermophysics*, 2012, **33**(9): 1567-1570.
邓阿强,贾力,许文云.板式脉动热管用于LED散热研究[J].*工程热物理学报*,2012,**33**(9):1567-1570.

[12] LI Bing-gan. A new type high power lighting emitting diodes based on MCPCB and its opto-electrical characteristics[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(3): 372-374.
李炳乾.基于金属线路板的新型大功率LED及其光电特性研究[J].*光子学报*,2005,**34**(3):372-374.

[13] ZHANG Xiao-dong, ZHANG Pei-lin, FU Jian-ping, *et al.* Applicability analysis of k- ϵ turbulence model simulation of internal flow field of recoil brake [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2011, **31**(5): 516-520.
张晓东,张培林,傅建平,等.k- ϵ 双方程湍流模型对制退机内流场计算的适用性分析[J].*爆炸与冲击*,2011,**31**(5):516-520.

[14] LIU You-hong, LI Li-guo. Numerical study of turbulent models for flow within a straightly lobed nozzle[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2002, **20**(3): 343-350.
刘友宏,李立国.直排波瓣喷管引射器流场计算K- ϵ 模型的选择[J].*空气动力学学报*,2002,**20**(3):343-350.

[15] WEI Jin-jia, HU Chun-bo, JIANG Pei-zheng. K- ϵ -T Model of dense liquid-solid two-phase turbulent flow and its application to the pipe flow[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, **21**(5): 468-476.
魏进家,胡春波,姜培正.密相液固两相湍流K- ϵ -T模型及其在管道两相流中的应用[J].*应用数学和力学*,2000,**21**(5):468-476.