

doi: 10.3788/gzxb20124107.0818

# 厄米-高斯光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的传输性质

黄永平, 曾安平

(宜宾学院 物理与电子工程学院 四川省计算物理重点实验室, 四川 宜宾 644007)

**摘 要:** 基于广义惠更斯-菲涅尔原理和非 Kolmogorov(非 K)谱, 推导出了厄米-高斯光束在非 K 大气湍流中传输的束宽、角扩展以及  $M^2$  因子的解析表达式. 数值计算表明, 在传输距离比较远(如  $z \geq 3$  km)时, 厄米-高斯光束的束宽、角扩展和  $M^2$  因子随广义指数参量  $\alpha$  的增大而增加直到  $\alpha = 3.11$  时达到最大值后再随  $\alpha$  的增大而减小; 随湍流的内尺度  $l_0$  的减小而增大; 随外尺度  $L_0$  的增加而增大( $3.6 < \alpha < 4$ ). 但是当广义指数参量  $\alpha$  在  $3 < \alpha < 3.6$  区间取值时, 束宽和  $M^2$  因子几乎不随外尺度的增加而变化.

**关键词:** 激光技术; 非 Kolmogorov(非 K)大气湍流; 束宽;  $M^2$  因子; 厄米-高斯光束

**中图分类号:** O436

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2012)07-0818-6

## 0 引言

激光在自由空间光通信、遥感等方面有着重要的应用, 所以激光在大气湍流中的传输性质也得到广泛研究<sup>[1-12]</sup>. 厄米-高斯(Hermite-Gaussian, H-G)光束为直角坐标系中近轴波动方程的本征解<sup>[13]</sup>, 是一种很常见的基本光束<sup>[1,14]</sup>. 已有的研究表明, 对于任意实际光束来说, 其传输特性通常可以采用 H-G 模展开的方法进行研究<sup>[15]</sup>, 如平顶高斯光束、环状光束等<sup>[2-3,16]</sup>. 对完全相干和部分相干 H-G 在自由空间和大气湍流中传输的光束扩展和方向性、空间相干性、 $M^2$  因子以及曲率半径的变化已做了大量研究<sup>[6-12]</sup>. 然而这些研究都是针对理想大气湍流, 即常规的 Kolmogorov 湍流. 事实上, 最近有实验发现一部分大气中得到的测量结果与常规的 Kolmogorov 模型计算结果有很大的偏差<sup>[17-18]</sup>, 这说明大气并不总是遵守 Kolmogorov 模型而是非常规的 Kolmogorov 模型<sup>[18-20]</sup>. 基于非 Kolmogorov(非 K)谱湍流模型, 文献[18-19]分别对到达角起伏、闪烁、误码率等作了研究. 另外文献[20]研究了高斯-谢尔模型光束在非 K 湍流中的光束扩展和方向性. 但到目前为止, 还未见关于 H-G 光束在非 K 湍流中的光束扩展、 $M^2$  因子等传输性质的报道. 本文基于广义惠更斯-菲涅尔原理和非 K 大气湍流谱, 对 H-G 光束在非 K 湍流中的光束扩展、 $M^2$  因子进行了详细的理论和数值研究, 得到一些有意义

的结果并给出合理的物理解释.

## 1 H-G 高斯光束在非 K 大气湍流中的传输特征参量

假设一束准单色 H-G 光束沿  $z$  轴在  $z > 0$  空间的大气湍流中传播. H-G 光束在 Cartesian 坐标系中源场处  $z=0$  面上的交叉谱密度函数为<sup>[4-5]</sup>

$$W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; 0) = H_m \left( \frac{\sqrt{2} x'_1}{w_0} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2} y'_1}{w_0} \right) \cdot H_{m'} \left( \frac{\sqrt{2} x'_2}{w_0} \right) H_{n'} \left( \frac{\sqrt{2} y'_2}{w_0} \right) \cdot \exp \left( -\frac{x'^2_1 + y'^2_1 + x'^2_2 + y'^2_2}{w_0^2} \right) \quad (1)$$

式中,  $w_0$  为基模高斯光束的束腰宽度,  $H_m$  和  $H_n$  为厄米多项式, 位置矢量  $\mathbf{r}'_1 = x'_1 \hat{x} + y'_1 \hat{y}$ ,  $\mathbf{r}'_2 = x'_2 \hat{x} + y'_2 \hat{y}$ . 为讨论方便, 式中略去了归一化常量.

根据广义惠更斯-菲涅尔衍射积分公式的近轴形式, H-G 光束通过大气湍流传输其交叉谱密度函数表示为<sup>[5]</sup>

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d; z) = \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint W(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_d; 0) \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{z} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}'_d)] - H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z) \right\} d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'_d \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ,  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)/2$ ,

基金项目: 四川省教育厅自然科学基金(No. 10ZC032)资助

第一作者: 黄永平(1974-), 女, 硕士, 副教授, 主要研究方向为激光物理及光束传输与控制. Email: yongph@163.com

收稿日期: 2012-01-04; 修回日期: 2012-03-08

$\mathbf{r}'_d = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ ; 波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长;  $z$  为传播距离;  $\exp[-H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z)]$  为湍流介质扰动而引起的相位起伏,其表达式为<sup>[5]</sup>

$$H(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}'_d; z) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa |\mathbf{r}'_d \xi + (1-\xi)\mathbf{r}_d|)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa \quad (3)$$

式中,  $J_0$  是零阶贝塞尔函数,  $\Phi_n(\kappa)$  为大气湍流的折射率起伏谱密度函数. 对于非 Kolmogorov 谱来说,  $\Phi_n(\kappa)$  可表示为<sup>[20]</sup>

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}} \quad (4)$$

$(0 \leq \kappa \leq \infty, 3 < \alpha < 4)$

式中,  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ , ( $L_0$  为湍流的外尺度),  $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$ , ( $l_0$  为湍流的内尺度),  $c(\alpha) = \left[\frac{2}{3\pi} \Gamma(5-\alpha/2) A(\alpha)\right]^{1/\alpha-5}$ , ( $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数),  $A(\alpha) = \Gamma(\alpha-1) \cos(\alpha\pi/2)/4\pi^2$ .  $\alpha$  为广义指数参量,  $\tilde{C}_n^2$  是广义的湍流折射率起伏结构常量, 单位是  $m^{3-\alpha}$ . 当  $\alpha = 11/3$  时,  $A(11/3) = 0.033$ ,  $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$ , 即为常规的 Kolmogorov 谱.

引入大气湍流量

$$T = \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa \quad (5)$$

其大小由大气湍流的折射率起伏谱密度函数  $\Phi_n(\kappa)$  决定.

将式(4)代入式(5)可以得到

$$T(\alpha, l_0, L_0) = \frac{A(\alpha) \tilde{C}_n^2}{2(\alpha-2)} \times \left\{ [c(\alpha)/l_0]^{2-\alpha} \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2) \frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right) \Gamma\left[2 - \frac{\alpha}{2}\right], \right.$$

$$\omega_x(z, \alpha, l_0, L_0) = \langle x^2 \rangle^{1/2} = \left\{ \frac{(2m+1)\omega_0^2}{4} + \frac{(2m+1)\lambda^2 z^2}{4\pi^2 \omega_0^2} + \pi^2 A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \left( \left[ \frac{c(\alpha)}{l_0} \right]^{2-\alpha} \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2) \frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right) - 2 \left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \frac{z^3}{3(\alpha-2)} \right\}^{1/2} \quad (12)$$

角扩展也可以表示为

$$\theta_x(z, \alpha, l_0, L_0) = \langle \theta_x^2 \rangle^{1/2} = \left\{ \frac{(2m+1)\lambda^2}{4\pi^2 \omega_0^2} + 2\pi^2 A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \left( \left[ \frac{c(\alpha)}{l_0} \right]^{2-\alpha} \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2) \frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right) - 2 \left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \frac{z}{3(\alpha-2)} \right\}^{1/2} \quad (13)$$

由式(12)和(13)可知, 在非 K 大气湍流中 H-G 光束的束宽和角扩展与光束的阶数  $m$ 、束腰宽度  $\omega_0$ 、波长  $\lambda$  和湍流的外尺度  $L_0$ 、内尺度  $l_0$ 、广义指数参量  $\alpha$  以及传输距离  $z$  有关. 在式(12)中, 等式右边前面两项代表光束在自由空间衍射引起的光束扩展, 而第三项表明非 K 大气湍流引起的光束扩展. 从式(12)明显可看出, 光束的阶数  $m$ 、束腰宽度  $\omega_0$ 、

$$\left. \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2} \right] - 2 \left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \right\} \quad (6)$$

式(6)表明大气湍流量  $T(\alpha, l_0, L_0)$  与指数  $\alpha$ , 内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  有关.  $T(\alpha, l_0, L_0)$  值越大表明湍流越强.

大气湍流中激光光束传播到  $z$  平面处交叉谱密度的 Wigner 分布函数(WDF)可表示为<sup>[5]</sup>

$$h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d; z) \cdot \exp(-ik\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r}_d) d^2 \mathbf{r}_d \quad (7)$$

式中: 矢量  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$ . WDF 的  $m_1 + m_2 + n_1 + n_2$  阶矩可表示为<sup>[5]</sup>

$$\langle x^{m_1} y^{m_2} \theta_x^{n_1} \theta_y^{n_2} \rangle = \frac{1}{P} \iint h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) d^2 \mathbf{r} d^2 \boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

式中:  $P = \iint h(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}; z) d^2 \mathbf{r} d^2 \boldsymbol{\theta}$  为光束总功率.

若  $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2$ , 并将式(1)、(2)和(7)代入式(8), 经过繁冗的计算后, 可以推导出湍流中 H-G 光束在  $z = \text{const}$  平面上的所有二阶矩. 为了数学上简单起见, 只考虑二维即  $(x, z)$  这种情况. 沿  $x$  方向二阶矩分别为

$$\langle x^2 \rangle = (2m+1)\omega_0^2/4 + (2m+1)\lambda^2 z^2/4\pi^2 \omega_0^2 + \frac{2}{3} \pi^2 T(\alpha, l_0, L_0) z^3 \quad (9)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = (2m+1)\lambda^2/4\pi^2 \omega_0^2 + 2\pi^2 T(\alpha, l_0, L_0) z \quad (10)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = (2m+1)\lambda^2 z/4\pi^2 \omega_0^2 + \pi^2 T(\alpha, l_0, L_0) z^2 \quad (11)$$

在非 K 大气湍流中的 H-G 光束的方均根束宽可表示为

波长  $\lambda$  会影响光束在自由空间的束宽, 但是由于湍流引起的光束扩展与它们无关. 当光束传播距离很短时, 光束在传输过程中由于自身的衍射以及湍流的作用对光束扩展的影响都很小, 此时起主要作用的是第一项, 光束扩展不明显. 但随着传输距离逐渐增加, 第二、三项的值明显大于第一项的值, 此时光束的扩展主要是光束自身的衍射和非 K 大气湍流

引起的. 当传输距离足够远时, 第三项起主要作用, 此时光束扩展主要由湍流的外尺度  $L_0$ 、内尺度  $l_0$ 、广义指数参量  $\alpha$  的改变而影响.

再根据  $M^2$  因子的定义<sup>[5,11]</sup>, H-G 光束在非 K 湍流中的  $M^2$  因子为

$$M_x^2(z, \alpha, l_0, L_0) = 2k[\langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2]^{1/2} = \left\{ (2m+1)^2 + \frac{(2m+1)A(\alpha)\tilde{C}_n^2 k^2 \pi^4 \omega_0^2 z}{\alpha-2} \left[ \frac{c(\alpha)}{l_0} \right]^{2-\alpha} \cdot \right. \\ \left. \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2)\frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) - 2\left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \right\} + \frac{4(2m+1)\pi^4 A(\alpha)\tilde{C}_n^2 z^3}{3\omega_0^2(\alpha-2)} \cdot \\ \left\{ \left[ \frac{c(\alpha)}{l_0} \right]^{2-\alpha} \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2)\frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) - 2\left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \right\} + \frac{\pi^6 A^2(\alpha)(\tilde{C}_n^2)^2 k^2}{3(\alpha-2)^2} \cdot \\ \left\{ \left[ \frac{c(\alpha)}{l_0} \right]^{2-\alpha} \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha-2)\frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \exp\left(\frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha)L_0^2}\right) - 2\left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \right\}^2 z^4 \Bigg\}^{1/2} \quad (14)$$

由式(14)可知, H-G 光束的  $M^2$  因子除了与光束的参量(如光束阶数  $m$ , 波长  $\lambda$ , 束腰宽度  $\omega_0$ )和传输距离  $z$  有关外, 还与湍流的广义指数参量  $\alpha$ , 外尺度  $L_0$ 、内尺度  $l_0$  有关. 分析式(14)发现它的右边第一项描述了 H-G 光束在自由空间(无湍流)中的  $M^2$  因子, 除此以外的其余三项都与非 K 湍流有关. 也就是说, 当传输距离  $z$  比较远时,  $M^2$  因子会受湍流的广义指数参量  $\alpha$ , 外尺度  $L_0$ 、内尺度  $l_0$  的影响.

## 2 数值计算与分析

在大气湍流中 H-G 光束的束宽和  $M^2$  因子随光束参量的变化规律在文献[10]已研究过, 在此, 根据式(12)~(14)主要对束宽和  $M^2$  因子随湍流的广义指数参量  $\alpha$ , 内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  的变化进行数值模拟计算, 其典型结果如图 1~3.

图 1 描述了 H-G 光束在非 K 湍流中具不同传输距离( $z=1$  km, 3 km, 6 km)的束宽随广义指数参量  $\alpha$  的变化情况. 计算参量分别为  $\tilde{C}_n^2=3 \times 10^{-14} m^{3-\alpha}$ ,

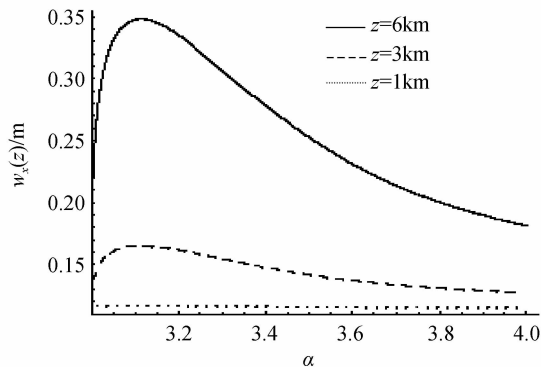


图 1 H-G 光束的束宽随  $\alpha$  的变化  
Fig. 1 Beam width of H-G beams in Kolmogorov turbulence as a function of  $\alpha$  for different values of the propagation distance  $z$

$\omega_0=0.05$  m,  $\lambda=850$  nm,  $L_0=20$  m,  $l_0=0.01$  m,  $m=10$ . 由图 1 可知, 在  $z=1$  km 时, H-G 光束的束宽  $w_x(z)$  基本上与  $\alpha$  无关. 其物理原因是当传输距离  $z=1$  km 时, 光束扩展主要是由于自由空间衍射引起的, 湍流的影响几乎可以忽略. 然而, 当传输距离  $z$  足够远, 比如  $z \geq 3$  km 时,  $w_x(z)$  随广义指数参量  $\alpha$  的增大而增加直到  $\alpha=3.11$  时(这由  $\partial w_x(\alpha, l_0, L_0, z)/\partial \alpha=0$  来决定)达到最大值, 然后再随  $\alpha$  的增大而减小, 表明当传输距离足够远时非 K 湍流对束宽的影响是主要的因素, 束宽  $w_x(z)$  会随非 K 湍流的广义指数参量  $\alpha$  的改变而变化.

光束在非 K 湍流中的束宽与在自由空间的束宽之比定义为相对束宽, 即:  $w_{rx}(z) = w_x(z)/w_x(z, T=0)$ . 一般情况, 如果相对束宽值越大, 表明在湍流中传输光束的束宽越偏离在自由空间中相应的束宽值, 即光束的扩展受到湍流的影响程度越大. 图 2(a) 和 (b), 图 3(a) 和 (b) 分别描述了非 K 湍流中 H-G 光束的束宽  $w_x(z)$  和相对束宽  $w_{rx}(z)$  对不同的内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  随传输距离的变化, 计算参量为 (a)  $\alpha=3.4$ ,  $L_0=20$  m 和 (b)  $\alpha=3.85$ ,  $l_0=0.01$  m, 其他参量与图 1 所用参量相同. 从图 2(a) 和 (b) 可以看出在非 K 湍流中 H-G 光束的束宽随内尺度的减小而增大, 随外尺度的增加而增大. 即湍流内尺度越大或外尺度越小, 束宽  $w_x(z)$  就越小. 其实湍流的内尺度减小或者外尺度增加都会使湍流强度增强, 湍流越强必然导致比较大的光束扩展. 从图 3(a) 和 (b) 看出在非 K 湍流中 H-G 光束的相对束宽也随内尺度的减小而增大, 随外尺度的增加而增大. 表明当湍流的内尺度越小或外尺度越大时, 湍流中传输光束扩展受湍流的影响程度就越大.

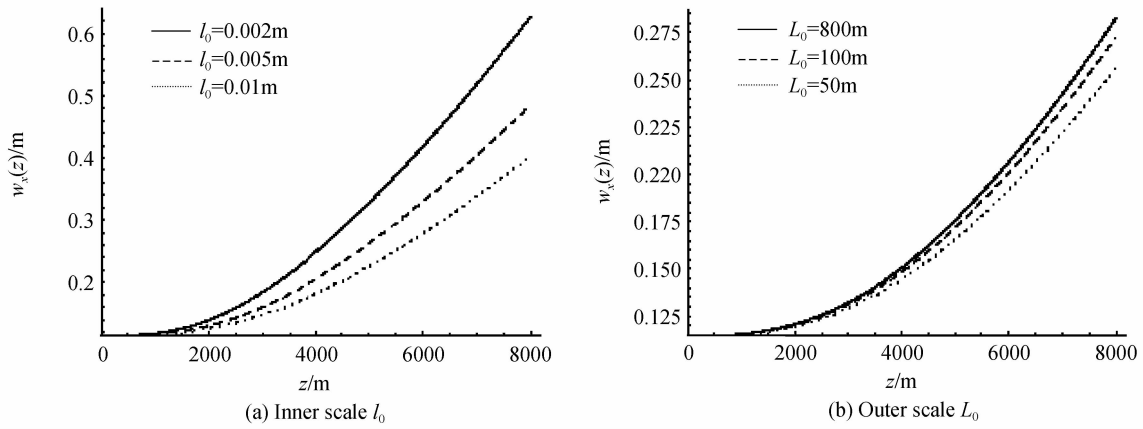


图 2 H-G 光束的束宽随传输距离 z 的变化

Fig. 2 Beam width of H-G beams versus propagation distance z

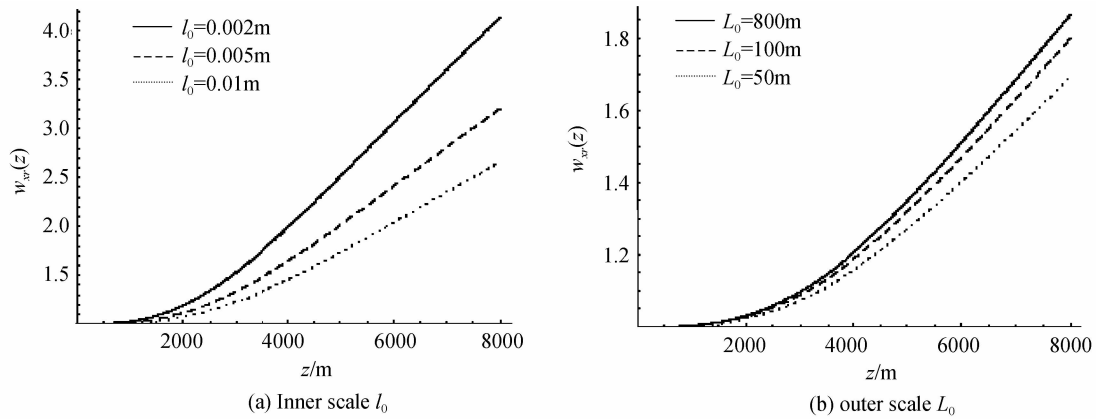


图 3 H-G 光束的相对束宽随传输距离 z 的变化

Fig. 3 Relative beam width of H-G beams versus propagation distance z

非 K 湍流中 H-G 光束的  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子 ( $M_{rx}^2(z) = M_x^2(z) / M_x^2(z, T=0)$ ) 对不同的内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  随参量  $\alpha$  的变化曲线分别如图 4 和图 5. 计算参量分别为  $z = 5 \text{ km}$ , (a)  $L_0 = 20 \text{ m}$ , (b)  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ , 其他参量与图 1 中所用参量一致. 由图 4 和图 5 可知,  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子随参量  $\alpha$  的增加也不是单调变化的, 即当  $\alpha < 3.11$  时,  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子随参量  $\alpha$  的增加而增大直到  $\alpha = 3.11$  (如:  $\partial M_x^2(\alpha, l_0, L_0, z) / \partial \alpha = 0$  得到) 达

到最大值后再随参量  $\alpha$  ( $3.11 < \alpha < 4$ ) 的增加而减小. 另外, 图 4(a) 和图 5(a) 还说明了在非 K 湍流中的 H-G 光束的  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子随湍流的内尺度的减小而增加, 湍流的内尺度越小,  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子越大, 表明光束传输受湍流影响越大, 光束质量变得越差. 同样, 图 4(b) 和图 5(b) 表明当  $3 < \alpha < 3.6$  时, 湍流的外尺度增大对 H-G 光束的  $M^2$  因子和相对  $M^2$  因子几乎没有影响, 即当  $3 < \alpha < 3.6$  时, 光束质量几乎不随湍流的外尺度的改变而

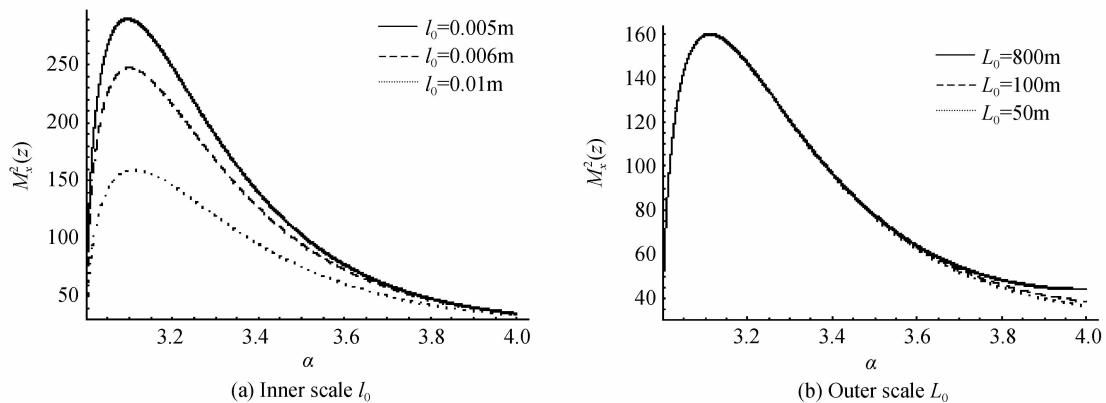
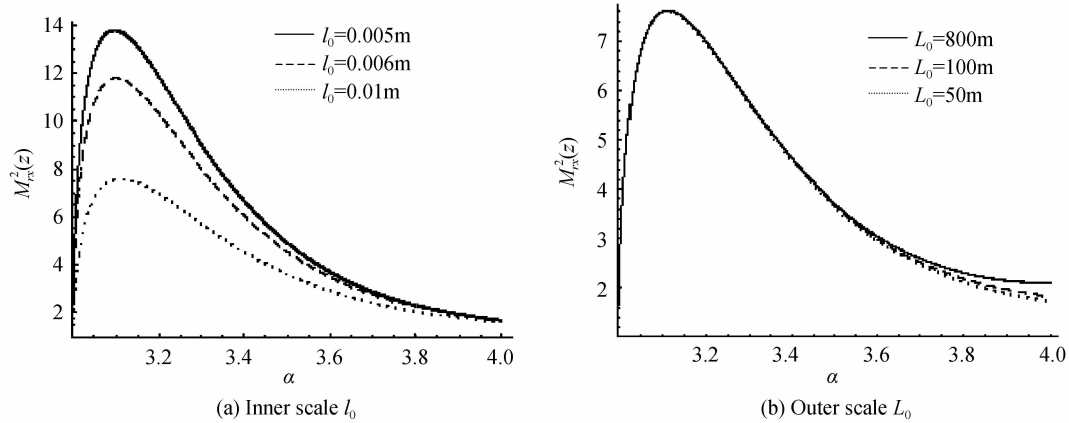


图 4 H-G 光束的  $M^2$  因子随参量  $\alpha$  的变化

Fig. 4 The  $M^2$ -factor of H-G beams versus  $\alpha$

图5 H-G 光束的相对  $M^2$  因子随参量  $\alpha$  的变化Fig. 5 Relative  $M^2$ -factor of H-G beams versus  $\alpha$ 

改变. 而当  $3.6 < \alpha < 4$  时, H-G 光束的  $M^2$  因子相对  $M^2$  因子会随湍流的外尺度的增加而增加, 湍流的外尺度越大,  $M^2$  因子相对  $M^2$  因子变化越大, 表明光束传输受湍流影响越大, 光束质量变得越差. 即在  $3.6 < \alpha < 4$  时 (比如,  $\alpha = 11/3$  的常规 Kolmogorov 谱), 湍流的内尺度减小或外尺度增加都会导致光束质量变差.

图 6(a) 和 (b) 分别描绘了具有不同光束阶数的

H-G 光束的相对束宽  $w_{rx}(z)$  随传输距离  $z$  的变化和相对  $M^2$  因子  $M^2_{rx}(z)$  随参量  $\alpha$  的变化情况, 所用计算参量与图 5 一致. 从图 6(a) 和 (b) 可以看出, 在非 K 湍流中, H-G 光束的相对束宽和相对  $M^2$  因子都会随光束阶数的增加而减小, 表明阶数越高的 H-G 光束的束宽和  $M^2$  因子受湍流的影响越小, 光束传输质量保持得越好.

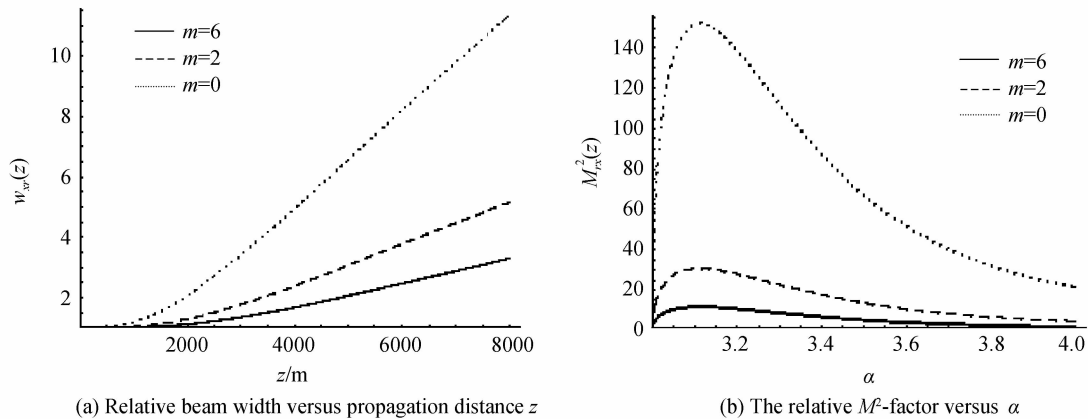


图6 不同光束阶数的 H-G 光束

Fig. 6 H-G beams with different values of beam order

另外, 分析式 (13) 和 (14) 也可以得到当传输距离比较远时, 在非 K 湍流中的 H-G 光束的角扩展随参量  $\alpha$ 、 $L_0$  和  $l_0$  的变化规律与  $M^2$  因子随它们的变化规律相似, 为节省篇幅就不再对此进行数值计算.

### 3 结论

本文基于广义惠更斯-菲涅尔原理和非 Kolmogorov 谱, 推导出了 H-G 光束在非 K 大气湍流中传输的束宽、角扩展以及  $M^2$  因子的解析表达式. 从表达式得出 H-G 光束的束宽、角宽以及  $M^2$  因子都与光束的阶数  $m$ , 非 K 湍流的广义指数参量  $\alpha$ 、内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  以及传输距离有关. 通过

数值模拟计算表明: 当传输距离比较近时 (如  $z < 1$  km), H-G 光束的束宽、 $M^2$  因子几乎不随参量  $\alpha$  的增加而变化, 也就是说此时湍流对他们的改变影响较小; 而当传输距离比较远时 (如  $z \geq 3$  km), H-G 光束的束宽、相对束宽、 $M^2$  因子、相对  $M^2$  因子都随  $\alpha$  的变化规律是先随参量  $\alpha$  ( $\alpha < 3.11$ ) 的增加而增大直到  $\alpha = 3.11$  达到最大值后再随参量  $\alpha$  ( $3.11 < \alpha < 4$ ) 的增加而减小, 随湍流的内尺度的减小而增大, 随湍流的外尺度增加而增大 (当  $3.6 < \alpha < 4$  时), 但当  $3 < \alpha < 3.6$  区间取值时, 几乎不随外尺度增加而改变. 从相对束宽、相对  $M^2$  因子的变化来看, H-G 光束在非 Kolmogorov 湍流中传输的束宽和传输质量随广义指数参量  $\alpha$  的不同, 湍流对它们的影响也不

同,湍流的内尺度越大或外尺度越小,以及光束的阶数越大,湍流对它们的影响越小,传输质量保持得越好.本文所得到的结论对存在非 Kolmogorov 结构湍流的自由空间光通信有潜在的应用价值.

#### 参考文献

- [1] YOUNG C Y, GILCREST Y V, MACON B R. Turbulence-induced beam spreading of higher-order mode optical waves [J]. *Optical Engineering*, 2002, **41**(5): 1097-103.
- [2] EYYUBOĞLU H T. Propagation and coherence properties of higher order partially coherent dark hollow beams in turbulence[J]. *Optics & Laser Technology*, 2008, **40**(1): 156-66.
- [3] BAYKAL Y. Formulation of correlations for general-type beams in atmospheric turbulence[J]. *JOSA A*, 2006, **23**(4): 889-93.
- [4] DAN Y, ZHANG B. Beam propagation factor of partially coherent flat-topped beams in a turbulent atmosphere [J]. *Optics Express*, 2008, **16**(20): 15563-74.
- [5] DAN Y, ZHANG B. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence[J]. *Optics Letters*, 2009, **34**(5): 563-5.
- [6] YANG A, ZHANG E, JI X, *et al.* Propagation properties of partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams through atmospheric turbulence [J]. *Optics & Laser Technology*, 2009, **41**(6): 714-722.
- [7] JI X, CHEN X, LÜ B. Spreading and directionality of partially coherent Hermite-Gaussian beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *JOSA A*, 2008, **25**(1): 21-28.
- [8] CHEN Xiao-wen, TANG Ming-yue, JI Xiao-ling. The influence of atmospheric turbulence on the spatial correlation property of partially coherent Hermite-Gaussian beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(4): 2607-2613.  
陈晓文,汤明玥,季晓玲.大气湍流对部分相干厄米-高斯光束空间相干性的影响[J]. *物理学报*, 2008, **57**(4): 2607-2613.
- [9] QIAO Na, DAN You-quan, ZHANG Bin. Propagation properties of elegant hermite-gaussian beams in atmospheric turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1542-7.  
乔娜,但有全,张彬.复宗量厄米-高斯光束在湍流大气中的传输特性[J]. *光学学报*, 2010, **30**(6): 1542-7.
- [10] YUAN Y, CAI Y, QU J, *et al.* Propagation factors of Hermite-Gaussian beams in turbulent atmosphere[J]. *Optics & Laser Technology*, 2010, **42**(8): 1344-1348.
- [11] HUANG Y, ZHANG B, DAN Y, *et al.* Changes of propagation characteristic parameters for partially coherent Hermite-Gaussian beams in a turbulent atmosphere [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2011, **49**(4): 514-520.
- [12] JI X, LI X. Effective radius of curvature of partially coherent Hermite-Gaussian beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Journal of Optics*, 2010, **12**(3): 1-5.
- [13] SIEGMAN A E. Lasers[M]. California: University Science Books, 1986: 642-803.
- [14] ZHANG S, YI L. Two-dimensional Hermite-Gaussian solutions in strongly nonlocal nonlinear medium with rectangular boundaries[J]. *Optics Communications*, 2009, **282**(8): 1654-8.
- [15] 吕百达.激光光学[M].北京:高等教育出版社,2003:24-229.
- [16] GORI F. Flattened Gaussian beams [J]. *Optics Communications*, 1994, **107**(5-6): 335-41.
- [17] DAYTON D, PIERSON B, SPIELBUSCH B, *et al.* Atmospheric structure function measurements with a Shack-Hartmann wave-front sensor[J]. *Optics Letters*, 1992, **17**(24): 1737-9.
- [18] RAO C, JIANG W, LING N. Spatial and temporal characterization of phase fluctuations in non-Kolmogorov atmospheric turbulence [J]. *Journal of Modern Optics*, 2000, **47**(6): 1111-26.
- [19] TOSELLI I, ANDREWS L C, PHILLIPS R L, *et al.* Angle of arrival fluctuations for free space laser beam propagation through non Kolmogorov turbulence [C]. *SPIE*, 2007, **6457**: 65510E.
- [20] WU G, GUO H, YU S, *et al.* Spreading and direction of Gaussian-Schell model beam through a non-Kolmogorov turbulence[J]. *Optics Letters*, 2010, **35**(5): 715-717.

## Propagation Properties of Hermite-Gaussian Beams in Non-Kolmogorov Turbulence

HUANG Yong-ping, ZENG An-ping

(Computational Physics Key Laboratory of Sichuan Province, School of Physics and Electronic Engineering, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, China)

**Abstract:** Based on the extended Huygens-Fresnel principle and non-Kolmogorov spectrum, analytical expressions for the beam width, angular spread and  $M^2$ -factor of Hermite-Gaussian (H-G) beams through non-Kolmogorov turbulence are derived. The results show that at a sufficiently long propagation distance (such as  $z \geq 3$  km), the beam width, angular spread and the  $M^2$ -factor of H-G beams through non-Kolmogorov turbulence all increase with the increasing outer scale  $L_0$  ( $3.6 < \alpha < 4$ ) and decreasing inner scale  $l_0$ , and increase with the increasing exponent parameter  $\alpha$  until it reaches its maximum value at  $\alpha = 3.11$ , then decrease with increasing  $\alpha$ . However, the beam width and  $M^2$ -factor of H-G beams hardly vary with increasing outer scale  $L_0$  in the region  $3 < \alpha < 3.6$ .

**Key words:** Laser technique; Non-Kolmogorov turbulence; Beam-width spreading;  $M^2$ -factor; Hermite-Gaussian (H-G) beam