

doi: 10.3788/gzxb20124104.0493

用热场动力学理论研究介观电路的 Wigner 函数

张晓燕¹, 王继锁^{2,3}

(1 菏泽学院 物理系, 山东 菏泽 274015)

(2 聊城大学 物理科学与信息工程学院, 山东 聊城 252059)

(3 曲阜师范大学 物理工程学院, 山东 曲阜 273165)

摘要:利用热场动力学及相干热态表象理论, 重构了有限温度下介观 RLC 电路的 Wigner 函数, 研究了有限温度下介观 RLC 电路的量子涨落. 借助于 Weyl-Wigner 理论讨论了有限温度下介观 RLC 电路 Wigner 函数的边缘分布, 并进一步阐明了 Wigner 函数边缘分布统计平均的物理意义. 结果表明: 有限温度下介观 RLC 电路中电荷和电流的量子涨落随着温度和电阻值的增加而增加, 回路中的电荷和电流之间存在着压缩效应, 这种量子效应是由于系统零点振动的涨落而引起的; 有限温度下介观 RLC 电路 Wigner 函数边缘分布的统计平均正好是储存在介观 RLC 电路中电容和电感上的能量.

关键词:量子光学; 介观 RLC 电路; Wigner 函数; 边缘分布

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2012)04-0493-4

0 引言

近些年来, 随着纳米技术和纳米电子学的飞速发展^[1-2], 对于介观体系的研究不仅已成为当今凝聚态物理学以及材料科学等领域的前沿课题^[3-4], 而且对其基础性研究将对 21 世纪新型材料的制备以及新一代微电子器件的研制具有重要的科学指导意义. 早在 20 世纪 70 年代, Louisell(路易塞尔)通过与经典简谐振子量子化方法做类比, 首先实现了 LC 电路的量子化^[5]. 然而实际情况是回路中的电流要产生焦耳热, 应该考虑温度效应, 因此研究有限温度下介观 RLC 电路的量子特性有着非常重要的意义. 目前, 人们已经提出多种重构和测量量子态 Wigner 函数的方案^[6-11]. 在理论上, 典型的重构方案有光学零拍层析法^[6]和光子计数法^[7]. 对腔场, 在实验上, Smithey 等利用光学零拍层析法重构了电磁场的真空态和压缩态的 Wigner 函数^[8], Banaszek 等利用光子计数法测量了真空态和相干态的 Wigner 函数^[9]. 这些重构和测量量子态 Wigner 函数方案也就成为了解量子态演化规律及性质的一个重要方法.

本文利用 Takahashi-Umezawa 的热场动力学以及相干热态表象理论研究了有限温度下介观

RLC 电路的量子特性, 重构了有限温度下介观 RLC 电路的 Wigner 函数, 并进一步阐明了 Wigner 函数边缘分布统计平均的物理意义.

1 热场动力学理论简介

热场动力学是 Takahashi 与 Umezawa 为了把处于非零温度时的系综平均等价地转换为对于一个纯态的期望值而引进的^[12-13]. 为了方便起见, 引入一个虚态矢, 对于一个现实物理态矢 $|n\rangle$ 要引进一个虚态矢 $|\tilde{n}\rangle$ 相伴, $|\tilde{n}\rangle$ 与 $|n\rangle$ 分属不同的矢量空间, 它们相互独立. 相应的, 对每一个现实的算符 a , 也要引进在 $|\tilde{n}\rangle$ 空间中作用的算符 \tilde{a} . 在粒子数空间, 对于一个纯态密度矩阵 $\rho(\hat{a}, \hat{a}^+)$, 算符的热平均可以写成

$$\langle 0(\beta) | \hat{A} | 0(\beta) \rangle = \text{Tr}(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}}) / \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) \quad (1)$$

式中 $\beta = (kT)^{-1}$, $|0(\beta)\rangle$ 为热真空态, k 是玻尔兹曼常量, \hat{H} 是系统的哈密顿量. Takahashi 和 Umezawa 发现热算符

$$\hat{S}(\theta) |0, \tilde{0}\rangle = |0(\beta)\rangle \quad (2)$$

这里态 $|0, \tilde{0}\rangle$ 被 a 与 \tilde{a} 湮灭. 把 $\hat{S}(\theta)$ 作展开

$$\hat{S}(\theta) = \exp[\theta(\hat{a}^+ \tilde{a}^+ - \hat{a} \tilde{a})] =$$

基金项目:国家自然科学基金(No. 10574060)、山东省自然科学基金(No. Y2008A16, No. ZR2010AQ024, No. ZR2010AQ027)和菏泽学院科研基金(No. XYJKJ-1)资助

第一作者:张晓燕(1982-), 女, 助教, 硕士, 主要研究方向为量子光学与量子信息. Email: zxy9416932@163.com

收稿日期: 2011-10-08; **修回日期:** 2011-12-11

$$\exp(\hat{a}^+ \tilde{a}^+ \tanh \theta) \exp[(\hat{a}^+ \hat{a} + \tilde{a}^+ \tilde{a} + 1) \cdot \text{Insec } h\theta] \exp(-\hat{a} \tilde{a} \tanh \theta) \quad (3)$$

得到热真空态

$$|0(\beta)\rangle = \text{sec } h\theta \exp(a^+ \tilde{a}^+ \tanh \theta) |0\tilde{0}\rangle \quad (4)$$

在极高温极限($\hbar\omega \ll 2kT$)下, $\tanh \theta \rightarrow 1$, 热真空态变成

$$|0(\beta)\rangle|_{T \rightarrow \infty} = \exp(a^+ \tilde{a}^+) |0\tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{n}\tilde{n}\rangle \quad (5)$$

式中 $|\tilde{n}\rangle = \tilde{a}^+{}^n / \sqrt{n!} |0\tilde{0}\rangle$, $|n\tilde{n}\rangle$ 是热数态. 本文要用它建立一个新的热场态 $|\tau\rangle$, 它具有正交完备性, 因而构成一个新的热表象.

用算符 $D(\tau) = \exp(\tau a^+ - \tau^* a)$ 对高温极限下的热真空态作平移

$$D(\tau) |0(\beta)\rangle|_{T \rightarrow \infty} = D(\tau) \exp(a^+ \tilde{a}^+) |0\tilde{0}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\tau|^2 + \tau a^+ - \tilde{a}^+ \tau^* + a^+ \tilde{a}^+\right) |0\tilde{0}\rangle \quad (6)$$

所以, $|\tau\rangle$ 可以称为高温极限下的相干热态. 分别以 a 与 \tilde{a} 作用到 $|\tau\rangle$ 上得到

$$a|\tau\rangle = (\tau + \tilde{a}^+) |\tau\rangle, \tilde{a}|\tau\rangle = (-\tau^* + a^+) |\tau\rangle \quad (7)$$

可见

$$(a - \tilde{a}^+) |\tau\rangle = \tau |\tau\rangle, (\tilde{a} - a^+) |\tau\rangle = -\tau^* |\tau\rangle \quad (8)$$

$$\langle \tau | (a^+ - \tilde{a}) = \tau^* \langle \tau |, \langle \tau | (\tilde{a}^+ - a) = -\tau \langle \tau | \quad (9)$$

表明 $|\tau\rangle$ 是正交的

$$\langle \tau' | \tau \rangle = \pi \delta^{(2)}(\tau - \tau') \quad (10)$$

利用零温度下真空态投影算子的正规乘积形式

$$|0\tilde{0}\rangle \langle 0\tilde{0}| = : \exp(-a^+ a - \tilde{a}^+ \tilde{a}) :$$

以及有序算符内的积分技术(Integration Within an Ordered Product of Operators, IWOP)^[14], 不难证明 $|\tau\rangle$ 是完备的.

$$\int \frac{d^2\tau}{\pi} |\tau\rangle \langle \tau| = \frac{d^2\tau}{\pi} : \exp[-|\tau|^2 + \tau(a^+ - \tilde{a}) - \tau^*(\tilde{a}^+ - a) + a^+ \tilde{a}^+ + a\tilde{a} - a^+ a - \tilde{a}^+ \tilde{a}] : = 1 \quad (11)$$

所以, $|\tau\rangle$ 称为相干热态表象, 是热场动力学的一个新表象.

2 有限温度下介观 RLC 电路的 Wigner 函数

本文利用 Takahashi-Umezawa 的热场动力学理论重构有限温度下介观 RLC 电路的 Wigner 函数. 对于一个与电压源 $\varepsilon(t)$ 串联的 RLC 电路, 它的经典运动方程可写为^[15]

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t) \quad (12)$$

从式(12)可以看出, 在电荷随时间的变化过程中, 回路中有四种能量的变化, 总能量的变化为

$$E = \frac{p^2}{2L} + \frac{R}{2L}(qp + pq) + \frac{q^2}{2C} - q\varepsilon(t) \quad (13)$$

式中电荷 $q(t)$ 代替了通常的“坐标”, 它的共轭变量

$p(t) = Ldq/dt$ 代替了通常的“动量”(除因子 L 之外 $p(t)$ 表示电路中电流的大小). 按通常的量子化方法, 一对可观测量 q 和 p 写成一对线性厄米算符 \hat{q} 和 \hat{p} , 并且它们之间满足对易关系 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. 在实现了有源 RLC 电路的量子化后, 该体系的哈密顿量可以写成

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2L} + \frac{R}{L}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + \frac{\hat{q}^2}{2C} - \hat{q}\varepsilon(t) \quad (14)$$

当未接电源, 即 $\varepsilon(t) = 0$ 时由式(14), 可得到这时体系的哈密顿量为

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2L} + \frac{R}{L}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + \frac{\hat{q}^2}{2C} \quad (15)$$

引入么正变换^[15]

$$U = \exp\left(i \frac{R}{2\hbar} \hat{q}^2\right) \quad (16)$$

由式(15)可得

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= U \hat{H}_0 U^{-1} = \frac{\tilde{p}^2}{2L} + \frac{1}{2} L \omega'^2 \tilde{q}^2 = \\ &\hbar\omega' \left(\tilde{a}^+ \tilde{a} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sqrt{2L\hbar\omega'} (\omega' L \hat{q} + i \hat{p}), \tilde{a}^+ = \\ &\sqrt{2L\hbar\omega'} (\omega' L \hat{q} - i \hat{p}) \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - R^2 C/L}$, ω_0 ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$) 为无电阻时 RLC 电路的共振频率. 由式(18)可得

$$\hat{q} = \frac{\tilde{a} + \tilde{a}^+}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega' L}}, \hat{p} = \frac{\tilde{a} - \tilde{a}^+}{\sqrt{2}i} \sqrt{L\hbar\omega'} \quad (19)$$

在热场动力学中, 算符 \hat{a}^+ 伴随着虚空间中的 \tilde{a}^+ , 与 \tilde{H}_0 对应的热真空态 $|0(\beta)\rangle$ 为

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \text{sec } h\theta \exp[\hat{a}^+ \tilde{a}^+ \tanh \theta] |0, \tilde{0}\rangle, \\ \tanh \theta &= \exp\left(-\frac{\hbar\omega'}{2kT}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

利用 Weyl 对应计算有限温度下介观 RLC 电路的量子涨落

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \iint dq dp \omega(q, p) \langle \Delta_\omega(q, p) \rangle = \\ &2 \int \omega(\alpha, \alpha^*) \langle \Delta(\alpha, \alpha^*) \rangle d^2\alpha, \alpha = \frac{q + ip}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\Delta_\omega(q, p) = \Delta(\alpha, \alpha^*)$ 是 Wigner 算符, $\omega(q, p)$ 是算符 \hat{A} 的经典对应. 利用相干态的完备性关系

$$\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle \langle z| = 1 \text{ 和 IWOP 技术}^{[14,16]}, \text{ 可得到热真空态的 Wigner 函数, 即}$$

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \Delta(\alpha, \alpha^*) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1 - e^{-\beta\omega'\hbar}}{\pi(1 + e^{-\beta\omega'\hbar})} \cdot \\ &\exp\left[\frac{-2(1 - e^{-\beta\omega'\hbar})}{1 + e^{-\beta\omega'\hbar}} |\alpha|^2\right] \end{aligned} \quad (22)$$

借助于数值计算方法,可以得到当温度不同时,介观 RLC 电路在热真空态下的 Wigner 函数随复变量 α 的虚部和实部的变化规律(自然单位制下,选取 $R=1, L=4, C=3, R, L, C$ 的单位分别为其相应的自然单位),如图 1.

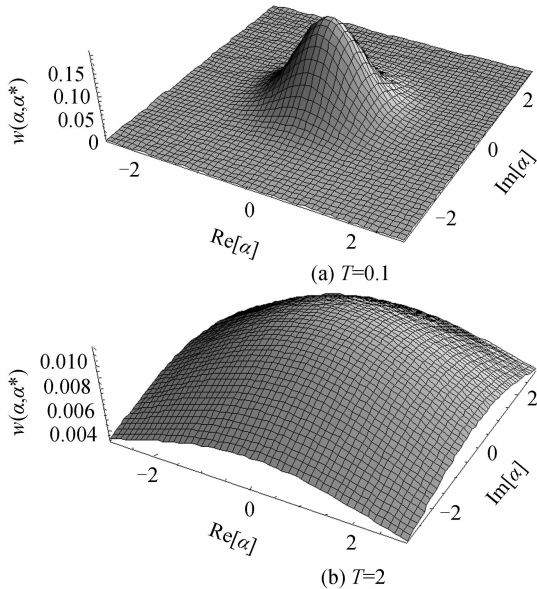


图 1 当温度 T 取 0.1 和 2 时, Wigner 函数随 α 的虚部和实部的变化

Fig. 1 The variance of Wigner function with $\text{Re}[\alpha]$ and $\text{Im}[\alpha]$ when $T=0.1$ and $T=2$

从图中可以看出:温度较低时,热真空态下的 Wigner 函数具有一个稳定的波峰;当温度升高时,波峰向两个方向扩散,并且波峰随温度的升高而下降,温度的变化极大地破坏了波包的稳定性.可见,温度对介观 RLC 电路在热真空态下 Wigner 函数的影响是非常大的.

借助于 Weyl-Wigner 理论,可以得到回路中电荷和电流的涨落满足

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \coth \frac{\beta \hbar (\sqrt{LC - R^2 C^2})}{2LC} \quad (23)$$

因此,可以得到介观 RLC 电路中电流和电荷的涨落分别为

$$\langle 0(\beta) | \hat{q}^2 | 0(\beta) \rangle = \frac{C \hbar}{2\sqrt{LC - R^2 C^2}} \coth \frac{\beta \hbar (\sqrt{LC - R^2 C^2})}{2LC} \quad (24)$$

$$\langle 0(\beta) | \hat{p}^2 | 0(\beta) \rangle = \frac{\hbar \sqrt{LC - R^2 C^2}}{2C} \coth \frac{\beta \hbar (\sqrt{LC - R^2 C^2})}{2LC} \quad (25)$$

由此可见,回路中电荷和电流之间存在着压缩效应.

3 介观 RLC 电路 Wigner 函数边缘分布的物理意义

借助于 Weyl 对应和 Wigner 理论,讨论有限温

度下介观 RLC 电路中 Wigner 函数的边缘分布.发现 $q^2/2C$ 和 $p^2/2L$ 的统计平均正好是储存在 RLC 电路中的能量.

在热真空态 $|0(\beta)\rangle$ 下本文计算出储存在电容中的能量为

$$E_C = \langle 0(\beta) | \frac{\hat{q}^2}{2C} | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{2C} \int dp dq \frac{\hbar (\alpha + \alpha^*)^2}{2\omega/L} \cdot \langle 0(\beta) | \Delta_\omega(q, p) | 0(\beta) \rangle = \frac{\hbar}{4\sqrt{LC - R^2 C^2}} \cdot \coth \frac{\beta \hbar (\sqrt{LC - R^2 C^2})}{2LC} \quad (26)$$

和储存在电感中的能量为

$$E_L = \langle 0(\beta) | \frac{\hat{p}^2}{2L} | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{2L} \int dp dq \frac{L \hbar \omega' (\alpha - \alpha^*)^2}{2} \cdot \langle 0(\beta) | \Delta_\omega(q, p) | 0(\beta) \rangle = \frac{\hbar \sqrt{LC - R^2 C^2}}{4LC} \cdot \coth \frac{\beta \hbar (\sqrt{LC - R^2 C^2})}{2LC} \quad (27)$$

以上分析得到 Wigner 函数边缘分布的一个新的物理意义,即 Wigner 函数边缘分布的统计平均正好是储存在介观 RLC 电路中电容和电感上的能量.

4 结论

本文研究了有限温度下介观 RLC 电路的量子特性及其 Wigner 函数.结果表明,在介观 RLC 电路中,电荷和电流的量子涨落不仅受温度的影响,而且随电阻值的变化而变化.回路中的电荷和电流之间存在着压缩效应,即使在绝对零度,电路中的电荷和电流仍存在着量子涨落,这种量子效应是由于系统零点振动的涨落而引起的.本文认为,这种量子效应在其它的介观电路中会普遍存在,对于进一步设计微小电路及压低噪声影响会具有一定的实际意义.另外,本文还赋予了 Wigner 函数边缘分布统计平均新的物理含义,即 Wigner 函数边缘分布的统计平均正好是储存在介观 RLC 电路中电容和电感上的能量.

参考文献

- [1] SRIVASTAVA Y, WIDOM A. Quantum electrodynamic processes in electrical engineering circuit[J]. *Physics Reports*, 1987, **148**(1): 1-65.
- [2] BUOT F A. Mesoscopic physics and nanoelectronics[J]. *Physics Reports*, 1993, **234**(2-3): 73-174.
- [3] WANG Ji-suo, LIU Tang-kun, ZHAN Ming-sheng. Quantum fluctuations in a mesoscopic inductance coupling circuit[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2000, **39**(8): 2013-2019.
- [4] WANG Ji-suo, FENG Jian, LIU Tang-kun, et al. Quantum effect of a non-dissipative mesoscopic inductance coupling circuit in a displaced squeezed fock state[J]. *Acta Photonica*

- Sinica*, 2002, **31**(5): 570-574.
王继锁, 冯健, 刘堂昆, 等. 平移压缩 Fock 态下无耗散介观电感耦合电路的量子效应[J]. *光子学报*, 2002, **31**(5): 570-574.
- [5] 路易塞尔 W. H. 辐射的量子统计性质[M]. 陈水, 于熙令, 译. 北京: 科学出版社, 1982.
- [6] DARIANO G M, MACCHIAVELLO C, PARIS M G A. Detection of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection [J]. *Physical Review A*, 1994, **50**(5): 4298-4302.
- [7] WALLENTOWITZ S, VOGEL W. Unbalanced homodyning for quantum state measurements [J]. *Physical Review A*, 1996, **53**(6): 4528-4533.
- [8] SMITHEY D T, BECK M, COOPER J. Measurement of number-phase uncertainty relations of optical fields [J]. *Physical Review A*, 1993, **48**(4): 3159-3167.
- [9] BANASZEK K, RADZEWICZ C, WODKIEWICZ K. Direct measurement of the Wigner function by photon counting [J]. *Physical Review A*, 1999, **60**(1): 674-677.
- [10] MENG Xiang-guo, WANG Ji-suo, LIANG Bao-long. Wigner functions and tomogram functions of even and odd pair coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 549-555.
- 孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 奇偶对相干态的维格纳函数和层析图函数 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(3): 549-555.
- [11] MENG Xiang-guo, WANG Ji-suo, LIANG Bao-long. Phase properties for the photon-added even and odd coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 721-726.
- 孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 增光子奇偶相干态的相位特性 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 721-726.
- [12] UMEZAWA H, MATSUMOTO H, TACHIKI M. Thermo field dynamics and condensed states [M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [13] TAKAHASHI Y, UMEZAWA H. Thermo field dynamics [J]. *International Journal of Modern Physics B*, 1996, **10**(13-14): 1755-1850.
- [14] FAN Hong-yi. Thermal Wigner operator in coherent thermal state representation and its application [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2002, **37**(3): 289-293.
- [15] WANG Ji-suo, LIU Tang-kun, ZHAN Ming-sheng. Quantum wavefunctions and fluctuations of mesoscopic RLC circuit [J]. *Chinese Physics Letters*, 2000, **17**(7): 528-529.
- [16] FAN Hong-yi, KLAUDER J R. Time evolution of the Wigner function in the entangled-state representation [J]. *Physical Review A*, 1994, **49**(6): 704-710.

Wigner Function of Mesoscopic Circuit by Virtue of the Thermo Field Dynamics

ZHANG Xiao-yan¹, WANG Ji-suo^{2,3}

(1 Department of Physics, Heze University, Heze, Shandong 274015, China)

(2 School of Physics Science and Information Engineering, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China)

(3 College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China)

Abstract: By virtue of the thermo field dynamics and the coherent thermo state representation, the Wigner function of mesoscopic RLC circuit at finite temperature was obtained, and the quantum fluctuations of mesoscopic RLC circuit at finite temperature were studied. By means of the Weyl correspondence and Wigner theorem the marginal distribution of Wigner function in mesoscopic RLC circuit was discussed. The physical meaning of marginal distributions' statistical average of the Wigner function was explained. The results show that the quantum fluctuations of both charge and current of mesoscopic RLC circuit at finite temperature increase with the rising of temperature and resistance value, and the mesoscopic RLC circuit has squeezed effects between charge and current, caused by the quantum mechanical zero-point fluctuations; the marginal distributions' statistical averages of the Wigner function are the energy stored in capacity and in inductance of the mesoscopic RLC circuit, respectively.

Key words: Quantum optics; Mesoscopic RLC circuit; Wigner function; Marginal distribution