

doi: 10.3788/gzxb20124104.0436

一维光子晶体斜入射波包的带隙结构

高洁¹, 房丽敏¹, 李华刚¹, 麦志杰²

(1 广东第二师范学院 物理系, 广州 510303)

(2 华南农业大学 应用物理系, 广州 510642)

摘要:对波包的任意傅里叶分量进行坐标变换后,利用转移矩阵法推导出波包斜入射情形下一维光子晶体的色散关系表达式,利用色散关系曲线分析得出波包斜入射的第一带隙结构,与以往平面波的第一带隙结构不同,波包的带隙宽度小于平面波的带隙宽度,并且在位置上前者带隙包含在后者内部.比较了一维光子晶体分别在波包入射与平面波入射情形下带隙位置和宽度,分析了波包中心入射角的变化以及波包的角分布范围的变化对带隙结构的影响,得到了一维光子晶体对波包斜入射的带隙结构的基本特征,确定了计算波包带隙能够近似当作平面波处理的条件.研究表明,波包的带隙结构受入射角大小和波包角分布范围的影响.入射角越小,波包入射的带隙结构越接近平面波;波包的角分布范围越小,光子晶体对波包的带隙宽度和位置越接近平面波.

关键词:一维光子晶体;波包;色散关系;带隙;角分布

中图分类号:O734

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2012)04-0436-6

0 引言

一维光子晶体是电介质只在一个方向呈周期性排列的结构^[1-2],该结构对平面波具有透射和反射的作用,文献[3-7]利用特征矩阵法或转移矩阵法推导出了色散关系的解析表达式,并且通过数值计算确定了带隙结构^[3-7].但是,实际入射到光子晶体的光束并不是理想的平面波,而是波矢具有一定的空间角分布的波包.就单色高斯光束来说,通常所说的光束的波矢和入射角指的是波包的中心波矢 \mathbf{k}_0 及其入射角 θ_0 .但是,在中心波矢周围分布着不同方向的分波矢 \mathbf{k} ,它们与中心波矢呈比较小的夹角 $\Delta\theta$,其大小等于 \mathbf{k}_0 ,因而入射角稍微偏离了 θ_0 ^[8-9].这样,一维光子晶体对波包入射的带隙结构就不同于文献[3-7]中基于平面波入射计算的带隙结构了.

本文根据波的叠加原理和傅里叶变换思想,将单色高斯波包的任意傅里叶分量看作平面波成分^[10],将其 TE 模和 TM 模对应的波矢 \mathbf{k} 变换到统一的坐标系下并写出相应的电场和磁场表达式.利用转移矩阵法对波包的平面波分量在稳态时的透射和反射做出比较详细的推导,从而得出一维光子晶体在波包入射时的色散关系.一方面,考虑了波包的角分布 $\Delta\theta$ 以后,对该色散关系在数值计算应用中

采取了不同于平面波入射的措施,得到了波包入射的第一带隙结构,并与平面波入射的带隙位置和宽度做出分析比较,探讨二者的不同之处.另一方面,通过对色散关系曲线和带隙结构进一步研究,探讨了波包在不同入射角斜入射的情况下,以及入射波包在不同的角分布范围情形下的带隙特征.

1 波包斜入射的第一带隙结构推导

如图 1 所示,非磁性电介质结构为 ab 总层数为 n 的一维光子晶体,介电常量分别为 ϵ_a, ϵ_b ,厚度分别为 a, b 周期为 d ,高斯光束从空气斜入射到光子晶体表面.沿着波包中心波矢 \mathbf{k}_0 建立坐标系 (x^i, y^i, z^i) ,并且沿着任意分量波矢 \mathbf{k} 建立坐标系 (x', y', z') ,并使坐标轴 y' 的方向垂直于该分量波矢的入射面, x' 方向则在入射面内,这两个坐标轴的方向图中未画出.在介质层面上建立坐标系 (X, Y, Z) ,并且使 Y 的方向始终与 y' 的方向一致.根据光学原理,任意波包可以经过傅里叶变换看作是由无数个平面波分量叠加组成的.在上述的坐标系下,入射光束电磁场的空间部分 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}), \mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r})$ 经过傅里叶变换,任意电磁场分量 $\tilde{\mathbf{E}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{H}}^{(i)}$ 的传播可以分别看作是一个平面波在不同入射面内沿不同入射角的传播^[11].

基金项目:国家自然科学基金委员会青年基金(No. 11104083)资助

第一作者:高洁(1972—),男,讲师,硕士,主要研究方向为基础光学、光子晶体、物理教育等. Email:gi607_2000@gdei.edu.cn

收稿日期:2011-07-22; **修回日期:**2012-01-19

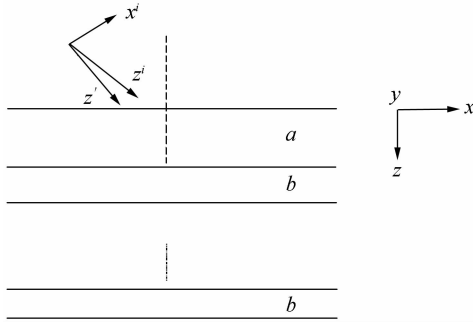


图1 波包入射一维光子晶体的坐标系

Fig. 1 Coordinate systems constructed on 1-D photonic crystal for wave packet

对于 TE 模, 电场 $\tilde{\mathbf{E}}^{(i)}$ 沿 y' (Y) 方向, 磁场 $\tilde{\mathbf{H}}^{(i)}$ 沿 x' 方向, 波矢 \mathbf{k} 投影到坐标系 (X, Y, Z) 下 $k_x \neq 0$, $k_Y = 0$, 且在 XY 无限大平面内 k_x 保持守恒. 根据斯涅耳定理, 介质层 a 或 b 内的电场 $\tilde{\mathbf{E}}_j^E$ ($j = a, b$) 同样沿 y' (Y) 方向. 因而可以写出在介质层 a 或 b 内的电场的表达式为

$$\tilde{\mathbf{E}}_j^E = \tilde{E}_{Y_j}^E(z) \exp(ik_x x) \tilde{\mathbf{e}}_Y \quad (j = a, b) \quad (1)$$

相应地, 根据麦克斯韦方程^[12]

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^E = -\frac{i}{\omega \mu_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_j^E \quad (2)$$

可以写出介质层 a 或 b 内的磁场 $\tilde{\mathbf{H}}_j^E$ 的表达式

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^E = -\frac{i}{\omega \mu_0} \left[-\frac{d\tilde{E}_{Y_j}^E(z)}{dz} \tilde{\mathbf{e}}_x + ik_x \tilde{E}_{Y_j}^E(z) \tilde{\mathbf{e}}_z \right] \cdot \exp(ik_x x) \quad (j = a, b) \quad (3)$$

将式(1)代入稳态下电磁场的亥姆赫兹方程

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}_j^E + \epsilon_j k_0^2 \tilde{\mathbf{E}}_j^E = 0 \quad (4)$$

得到任意介质层 a 内的电场为

$$\tilde{E}_{Y_a}^E(z) = A_a^E \exp[ik_{za}(z - md)] + B_a^E \cdot \exp[-ik_{za}(z - md)] \quad (md \leq z < md + a) \quad (5)$$

以及 b 内的电场为

$$\tilde{E}_{Y_b}^E(z) = A_b^E \exp[ik_{zb}(z - md)] + B_b^E \cdot \exp[-ik_{zb}(z - md)] \quad (md + a \leq z < (m+1)d) \quad (6)$$

式中 $k_{zj} = (\epsilon_j k_0^2 - k_x^2)^{1/2}$.

根据周期结构的布洛赫定理^[13], 可以得到式(5)的递推关系式, 在 $(m+1)d \leq z < (m+1)d + a$

$$\tilde{E}_{Y_{a+d}}^E(z) = \exp(i\mathbf{k}d) \{ A_a^E \exp[ik_{za}(z - md)] + B_a^E \exp[-ik_{za}(z - md)] \} \quad (7)$$

式中 \mathbf{k} 为布洛赫波矢量.

根据电磁场的边界条件, 即 $\tilde{\mathbf{E}}_j^E$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}_j^E$ 的切向分量连续, 由式(3)~(7), 得到

$$\exp(i\mathbf{k}d) \begin{bmatrix} A_a^E \\ B_a^E \end{bmatrix} = \mathbf{M}^E \begin{bmatrix} A_a^E \\ B_a^E \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 \mathbf{M}^E 为转移矩阵, 并且 $\mathbf{M}^E = \mathbf{T}^{-1}(k_{za}, 0) \mathbf{T}(k_{zb}, d) \mathbf{T}^{-1}(k_{zb}, a) \mathbf{T}(k_{za}, a)$, 矩阵 $\mathbf{T}(k_{zj}, \lambda)$ 的定义为

$$\mathbf{T}(k_{zj}, \lambda) = \begin{bmatrix} \exp(ik_{zj}\lambda) & \exp(-ik_{zj}\lambda) \\ k_{zj} \exp(ik_{zj}\lambda) & -k_{zj} \exp(-ik_{zj}\lambda) \end{bmatrix}$$

要使方程(8)有非零解, 必须满足

$$\begin{vmatrix} M_{11}^E - \exp(i\mathbf{k}d) & M_{12}^E \\ M_{21}^E & M_{22}^E - \exp(i\mathbf{k}d) \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\kappa_E = \frac{1}{d} \arccos \left[\cos(k_{za}a) \cos(k_{zb}b) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{zb}}{k_{za}} + \frac{k_{za}}{k_{zb}} \right) \sin(k_{za}a) \sin(k_{zb}b) \right] \quad (9)$$

对于 TM 模, 磁场 $\tilde{\mathbf{H}}^{(i)}$ 沿 y' (Y) 方向, 电场 $\tilde{\mathbf{E}}^{(i)}$ 沿 x' 方向, 同样可以写出坐标系 (X, Y, Z) 下介质层内的电场和磁场表达式为

$$\tilde{\mathbf{H}}_j^M = \tilde{H}_{Y_j}^M(z) \exp(ik_x x) \tilde{\mathbf{e}}_Y \quad (j = a, b) \quad (10)$$

根据麦克斯韦方程

$$\tilde{\mathbf{E}}_j^M = \frac{i}{\omega \epsilon_j} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_j^M$$

得到

$$\tilde{\mathbf{E}}_j^M = \frac{i}{\omega \epsilon_j} \left[-\frac{d\tilde{H}_{Y_j}^M(z)}{dz} \tilde{\mathbf{e}}_x + ik_x \tilde{H}_{Y_j}^M(z) \tilde{\mathbf{e}}_z \right] \cdot \exp(ik_x x) \quad (j = a, b) \quad (11)$$

类似方程(4)~(9)的过程, 可以从方程(10)~(11)解得一维光子晶体对 TM 模的色散关系式,

$$\kappa_M = \frac{1}{d} \arccos \left[\cos(k_{za}a) \cos(k_{zb}b) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{zb}\epsilon_a}{k_{za}\epsilon_b} + \frac{k_{za}\epsilon_b}{k_{zb}\epsilon_a} \right) \sin(k_{za}a) \sin(k_{zb}b) \right] \quad (12)$$

色散关系式(9)和式(12)在表达形式上虽然和文献[3-7]中关于平面波入射的结果是一致的, 但是从前面推导的过程来看, 区别在于, 本结果描述的分量波矢入射角不再是平面波情形下的 θ_0 , 而是稍微偏离 θ_0 的一系列入射角. 因此, 在计算波包入射光子晶体的带隙时, 必须同时考虑入射角在 $\theta_0 - \Delta\theta \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta$ 范围带隙的交叠. 以高斯波包入射角 $\theta_0 = \pi/3$, $\Delta\theta = \pi/30$ 为例, 利用式(9)与式(12)计算介电常量分别为 $\epsilon_a = 5.4756$, $\epsilon_b = 2.6569$ 厚度分别为 $a = 65 \text{ nm}$, $b = 90 \text{ nm}$ 的一维光子晶体 $\text{TiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ 的第一带隙结构, 并且计算出该光子晶体在平面波沿 $\theta_0 = \pi/3$ 入射情况下的第一带隙结构, 将两种情形下的带隙结构进行比较.

计算得到图 2(a) 的带隙上下带边对应的频率为 $\omega_{\text{up}} = 3.9600 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\omega_{\text{down}} = 3.0800 \times 10^{15} \text{ Hz}$. 图 2(b) 为 $\omega_{\text{up}} = 4.0533 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\omega_{\text{down}} = 3.0533 \times 10^{15} \text{ Hz}$. 对于 TE 模, 波包和平面波的第一带隙宽度 $\Delta\omega$ 分别为 $8.800 \times 10^{14} \text{ Hz}$, $1.000 \times 10^{15} \text{ Hz}$. 图 2(c) 为 $\omega_{\text{up}} = 3.7943 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\omega_{\text{down}} = 3.3219 \times 10^{15} \text{ Hz}$. 图 2(d) 为 $\omega_{\text{up}} = 3.8400 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\omega_{\text{down}} = 3.2610 \times$

10^{15} Hz. 对于 TM 模, 波包和平面波的第一带隙宽度 $\Delta\omega$ 分别为 4.724×10^{14} Hz, 5.790×10^{14} Hz. 可以看到, 波包 TE 模和 TM 模的第一带隙宽度分别小于平面波入射的带隙宽度. 而且, 波包带隙上下带边位置 ω_{up} 与 ω_{down} 也与平面波带隙位置不相同, 前

者上带边对应的频率小于后者上带边的频率, 而前者下带边对应的频率却大于后者下带边频率, 即波包的带隙总是包含在平面波的内部. 波包的带隙结构与平面波的相比发生了改变受到了一定的影响.

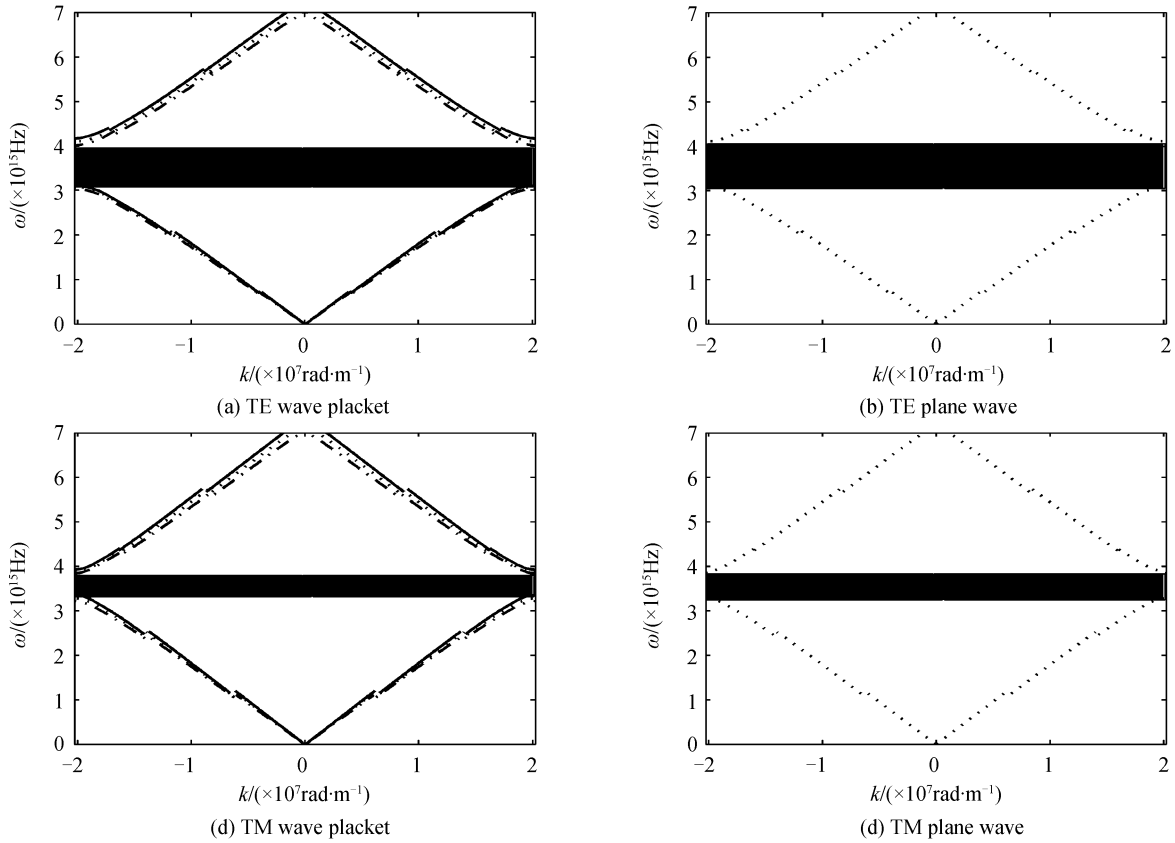


图 2 入射角为 $\theta_0 = \pi/3$, 波包角 ($\Delta\theta = \pi/30$) 与平面波第一带隙位置

Fig. 2 Structures of first band gap with incident angle $\theta_0 = \pi/3$ for wave packet ($\Delta\theta = \pi/30$) and plane wave

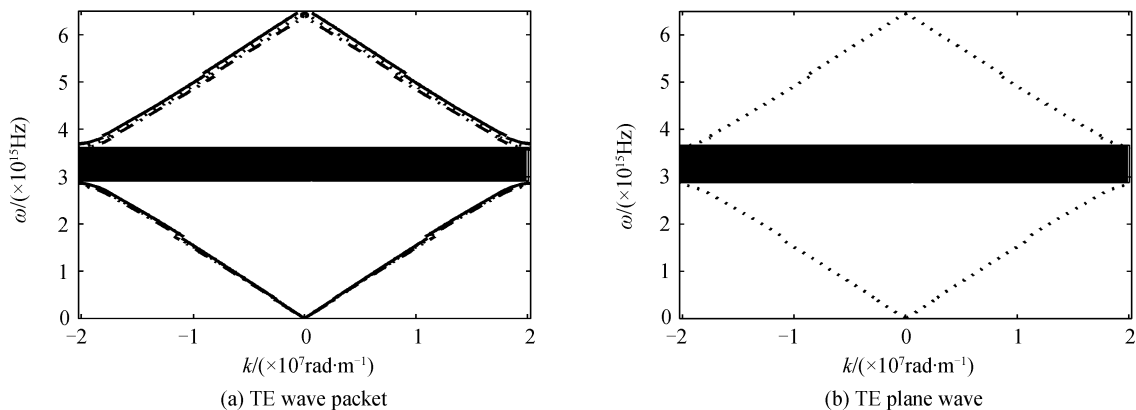
2 波包入射的带隙结构的影响因素

2.1 入射角对带隙结构的影响

图 2 是把波包入射角为 $\theta_0 = \pi/3$ 情况下光子晶体带隙与平面波入射的带隙做比较. 实际上, 在不同入射角的情况下, 光子晶体对波包带隙结构的影响是不一样的.

利用式(9)与式(12)计算入射角为 $\theta_0 = \pi/6$ 情

况下光子晶体对波包与平面波的第一带隙结构, 见图 3. 图 3(a) 的带隙上下带边对应的频率为, $\omega_{up} = 3.6133 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 2.9067 \times 10^{15}$ Hz; 图 3(b) 为 $\omega_{up} = 3.6667 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 2.8800 \times 10^{15}$ Hz; 图 3(c) 为 $\omega_{up} = 3.5810 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 2.9867 \times 10^{15}$ Hz; 图 3(d) 为 $\omega_{up} = 3.6114 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 2.9257 \times 10^{15}$ Hz. 比较图 3 和图 2 及其相应的计算结果, 可以看出, 随着入射角的减小, 波包带隙上下



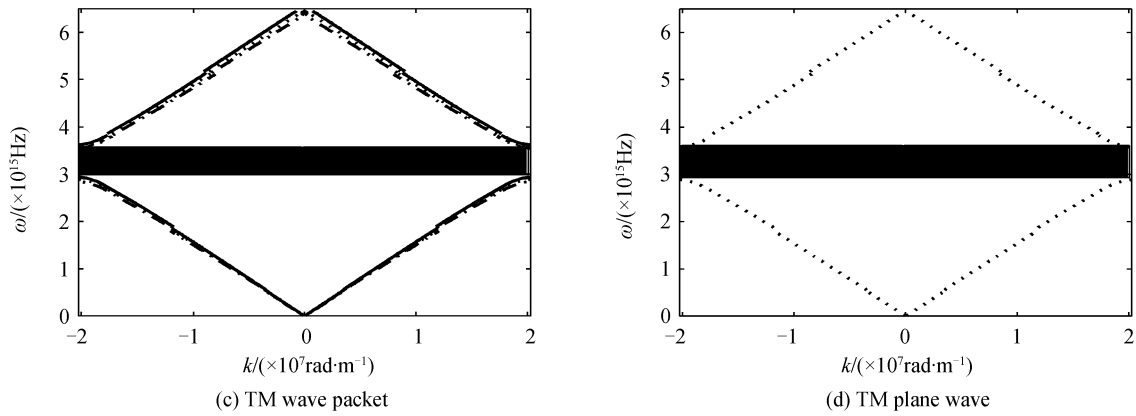


图3 入射角为 $\theta_0 = \pi/6$, 波包 ($\Delta\theta = \pi/30$) 与平面波第一带隙位置

Fig. 3 Structures of first band gap with incident angle $\theta_0 = \pi/6$ for wave packet ($\Delta\theta = \pi/30$) and plane wave

带边对应的频率都在减小,这个特点如同平面波的带隙特点.但是,在入射角比较小的 $\theta_0 = \pi/6$ 情况下,无论对于 TE 模还是 TM 模,波包的带隙上下边的数值 ω_{up} 与 ω_{down} 都接近平面波的带隙上下边数值,而且波包的 TE 模和 TM 模带隙宽度 $\Delta\omega$ 的数值分别为 7.066×10^{14} Hz, 5.943×10^{14} Hz,也分别接近平面波的带隙宽度数值 7.867×10^{14} Hz, 6.857×10^{14} Hz. 因此,波包入射的带隙位置和宽度都越来越接近平面波入射的带隙结构,光子晶体对波包入射时带隙结构的影响随着入射角的减小而逐渐减弱.

2.2 波包的角分布范围对带隙结构的影响

以上讨论中选取波包的角分布范围为 $\Delta\theta = \pi/30$,对于距离高斯光束的腰束远近不同的地方,角分布范围是不一样的.选取角分布范围比较大 $\Delta\theta = \pi/18$ 与比较小 $\Delta\theta = \pi/60$ 两种情形作对比,利用式(9)与式(12)研究该参量对波包第一带隙结构的影响.计算得到图 4(a)的带隙位置 $\omega_{up} = 3.9067 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 3.1067 \times 10^{15}$ Hz;图 4(b)为 $\omega_{up} = 3.8248 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{down} = 3.2914 \times 10^{15}$ Hz. 图4的结果及其计算数据表明,在波包的

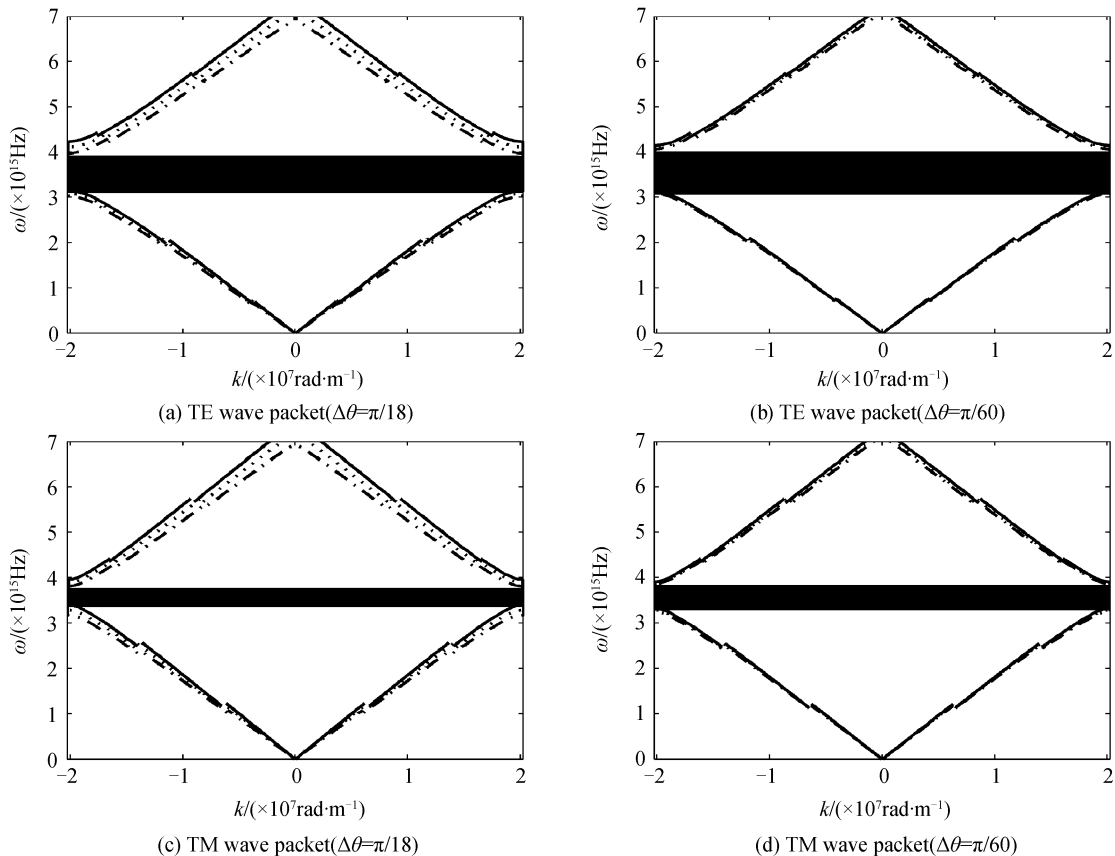


图4 入射角为 $\theta_0 = \pi/3$, 波包角分布不相同情况下第一带隙

Fig. 4 Structures of first band gap for wave packet with same incident angle $\theta_0 = \pi/3$ but different angle spectrum

4.000 0 $\times 10^{15}$ Hz, $\omega_{\text{down}} = 3.066 7 \times 10^{15}$ Hz; 图 4(c) 为 $\omega_{\text{up}} = 3.763 8 \times 10^{15}$ Hz, $\omega_{\text{down}} = 3.367 6 \times 10^{15}$ Hz; 角分布范围 $\Delta\theta = \pi/60$ 的情形下(图(b)和(d)), TE 模和 TM 模的带隙宽度 $\Delta\omega$ 分别为 9.333×10^{14} Hz, 5.334×10^{14} Hz, 大于 $\Delta\theta = \pi/18$ 的情形下(图(a)和(c)) TE 模和 TM 模的带隙宽度 8.000×10^{14} Hz, 3.962×10^{14} Hz. 比较图 4 与图 2 中的(b)和(d), 还可以看出, 在 $\Delta\theta = \pi/60$ 比较小的情形下, 波包的带隙位置 ω_{up} 与 ω_{down} 更加接近平面波的带隙位置. 这些结果说明波包角分布范围越小, 光子晶体带隙结构越接近平面波入射情形下的带隙结构. 从理论预期上说, 由于平面波是波包的角分布为零的特殊情形, 因此波包的角分布越小其对应的带隙结构应该越接近平面波入射的情形直至完全一致, 那么图 4 的结果正好符合这个预期.

3 结论

在对波包的傅里叶分量坐标变换以后, 通过推导得到了一维光子晶体单色高斯波包的色散关系, 该色散关系对应的入射角具有一定的角分布范围. 利用色散关系曲线分析得出波包斜入射的第一带隙结构, 与以往平面波的第一带隙结构不同, 波包的带隙宽度小于平面波的带隙宽度, 并且在位置上前者带隙包含在后者内部. 研究表明, 波包的带隙结构受入射角大小和波包角分布范围的影响. 入射角越小波包入射的带隙结构越接近平面波的情形; 波包的角分布范围越小, 光子晶体对波包的带隙宽度和位置越接近平面波的情形, 这个结果符合把平面波看作角分布为零的波包这样一个物理情形. 因此, 只有当波包的入射角以及角分布都比较小时, 其带隙结构才能用平面波来近似处理.

参考文献

[1] YE H P. Optical waves in layered media[M]. New York;

Wiley, 1988: 161-163.

- [2] WINN J N, FINK Y, FAN S H, *et al.* Omnidirectional reflection from a one-dimensional optical crystal[J]. *Optics Letters*, 1998, **23**(20): 1573-1575.
- [3] MAO Jin. Properties of light propagation in one-dimensional photonic crystal[D]. University of Electronic Science and Technology of China, 2008: 11-24.
毛谨. 光在一维光子晶体中的传输特性研究[D]. 电子科技大学, 2008: 11-24.
- [4] 曹庄琪. 导波光学中的转移矩阵方法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000: 7-67.
- [5] ZHANG Ling, LIANG Liang, ZHANG Ling-li, *et al.* Study of band structure of 1-D photonic crystal[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(9): 1815-1818.
张玲, 梁良, 张琳丽, 等. 一维光子晶体带隙结构研究[J]. 光子学报, 2008, **37**(9): 1815-1818.
- [6] GU Guo-chang, LI Hong-qiang. Properties of light propagation in 1-D periodic dielectric structure [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 728-734.
顾国昌, 李宏强. 一维光子晶体材料中的光学传输特性[J]. 光学学报, 2000, **20**(6): 728-734.
- [7] WANG Hui, LI Yong-ping. An eigen matrix method for obtaining the band structure of photonic crystal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(11): 2172-2178.
王辉, 李永平. 用特征矩阵法计算光子晶体的带隙结构[J]. 物理学报, 2001, **50**(11): 2172-2178.
- [8] NAVASQUILLO J, SUCH V, POMER F. A general method for treating the incidence of a plane electromagnetic wave on a plane interface between dielectrics[J]. *American Journal of Physics*, 1989, **57**(12): 1109-1112.
- [9] POMER F, NAVASQUILLO J. The fields of a bounded electromagnetic beam propagating through an air gap between two dielectrics for frustrated total reflection[J]. *American Journal of Physics*, 1990, **58**(8): 763-768.
- [10] 赵建林. 高等光学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 20-22.
- [11] BLIOCH K YU, BLIOCH YU P. Polarization, transverse shifts, and angular momentum conservation laws in partial reflection and refraction of an electromagnetic wave packet [J]. *Physical Review E*, 2007, **75**(6): 066609.
- [12] BORN M, WOLF E. Principles of optics [M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 7-74.
- [13] 黄昆, 韩汝琦. 固体物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988: 154-157.

Band Structure of 1-D Photonic Crystal for Oblique Incident Electromagnetic Wave Packet

GAO Jie¹, FANG Li-min¹, LI Hua-gang¹, MAI Zhi-jie²

(1 *Department of Physics, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China*)

(2 *Department of Applied Physics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China*)

Abstract: Dispersion relation of 1-D photonic crystal is deduced by the method of transfer matrix, with coordinate transformation of arbitrary Fourier exponent of electromagnetic wave packet which is obliquely incident. By analyzing the dispersion relation, it is easy to find the difference between the first band gap under obliquely incident wave packet and that of plane wave, respectively. Meanwhile, the former gap is located in the latter one, for the former one is narrower than the latter one in width. Characteristic of band gap is obtained under obliquely incident wave packet, by comparing the first band gap structure with that of plane wave considering edge position and width of the gap. The condition of approximately substituting plane wave for wave packet to calculate band gap is analyzed, according to related factors such as different incident angle of central wave vector and angle spectrum of wave packet. The results demonstrate that the first band gap structure is closely related to incident angle of central wave vector and angle spectrum of wave packet. With smaller incident angle, the first band gap structure caused by wave packet would become closer to that of plane wave; and with smaller angle spectrum of wave packet, the width and position of the first band gap is closer to those of plane wave.

Key words: 1-D photonic crystal; Electromagnetic wave packet; Dispersion relation; Band gap; Angle spectrum