

doi: 10. 3788/gzxb20124103. 0348

三个两能级原子与数态场相互作用的纠缠特性

廖庆洪, 龚黎华

(南昌大学 电子信息工程系, 南昌 330031)

摘 要:通过计算并发度和线性熵研究了初始处于 GHZ 态的三个两能级原子与数态场相互作用系统的纠缠动力学特性, 讨论了场的初始光子数对并发度和线性熵的影响. 结果表明, 腔内两原子之间的纠缠出现突然产生现象, 而且可以通过改变场的初始光子数来控制产生纠缠的阈值时间和纠缠的最大值. 对腔外原子的探测导致了并发度随时间的演化呈现周期性规律, 场的光子数的增加不但减小了并发度的最大值, 而且缩短了并发度的演化周期.

关键词:并发度; 线性熵; 纠缠突然产生; 量子信息

中图分类号: O431. 2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2012)03-0348-5

0 引言

量子纠缠是量子物理区别于经典物理最奇特、最不可思议的特征之一. 在量子信息领域中, 量子纠缠作为一种物理资源, 在量子隐形传态、量子密集编码、纠缠交换、量子计算和量子密码等各方面起着重要作用^[1]. 纠缠态的产生与操纵问题是量子纠缠研究的一个重要课题, 具有重要的理论意义和重大的应用前景. 人们在许多系统, 如囚禁离子^[2]、原子系综^[3]、光子对^[4]、超导比特^[5]等系统中, 对纠缠的产生和制备进行了报道. Bose 等人研究了处于纯态的单比特与热态场相互作用的系统, 结果发现单比特与场之间总是能够产生纠缠^[6]. 两个处于激发态的原子与单模场通过单光子^[7]或者是双光子^[8]发生相互作用时, 它们之间不能产生纠缠. 2008 年, Ficek 和 Tanaš 研究了耦合于一个真空场中的两个二能级原子, 两原子初始处于非纠缠态, 通过自发辐射, 经过一段有限时间后两原子之间可以产生纠缠, 即纠缠的推迟产生现象, Ficek 和 Tanaš 把这种初时处于解纠缠的两原子, 在经过有限时间之后, 产生纠缠的现象, 称为纠缠的突然产生现象 (Sudden Birth of Entanglement, ESB)^[9]. 近年来, 人们对非旋波近似以及耗散腔系统中的原子纠缠特性进行了深入的研究^[10-12].

1997 年, Gerry 和 Ghosh 研究了 Jaynes-Cummings 模型中场的压缩特性, 结果发现通过对腔对原子的操作可以大大地提高场的压缩效应^[13]. 杨垂平和郭光灿研究了初始处于 Einstein-

Podolsky-Rosen(EPR)态的两个两能级原子, 其中一个原子处于腔外的系统, 结果表明对腔外原子的操控可以控制腔内原子的发射性质^[14]. 2007 年, 夏云杰组研究了对原子选择性的测量可以控制光场的量子统计性质^[15]. 2010 年, 卢道明研究了腔外原子的测量和旋转操作对腔内原子纠缠动力学特性的影响^[16]. 本文利用并发度和线性熵作为一种度量方式研究了初始处于 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)态的三个两能级原子与数态场相互作用系统的纠缠性质, 讨论了场的初始光子数和腔外原子进行探测对并发度和线性熵的影响, 结果表明对腔外原子进行探测, 原子处于基态时, 并发度随时间的演化呈现周期性规律, 场的光子数的增加不但减小了并发度的最大值, 而且缩短了并发度的演化周期.

1 物理模型与基本方程

研究的物理模型是一个腔外的孤立原子 A_1 和两个原子 A_2 和 A_3 处于一个单模高 Q 腔内, 其中孤立原子 A_1 和腔内原子以及腔场没有任何相互作用, 物理模型示意图如图 1 所示.

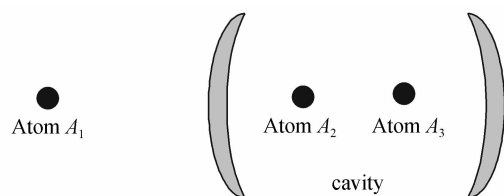


图 1 物理模型

Fig. 1 Schematic diagram of the physical model considered in this work

基金项目:国家自然科学基金(No. 10647133)、江西省自然科学基金(No. 2009GQS0080)和江西省教育厅科技项目(No. GJJ11339, No. GJJ12137)资助

第一作者:廖庆洪(1982-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为量子通信. Email: nculqh@163.com

收稿日期: 2011-08-04; **修回日期:** 2012-01-01

为了简单起见,考虑腔内原子和场的共振相互作用,并且腔的 Q 值是如此的高以至于可以忽略腔的耗散导致的退相干效应^[17-18]. 在旋波近似下,相互作用绘景中,系统的哈密顿量(取 $\hbar=1$)为

$$H_I = g(a^\dagger S_2^- + a S_2^+ + a^\dagger S_3^- + a S_3^+) \quad (1)$$

其中 $S_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$ 和 $S_i^+ = |e_i\rangle\langle g_i|$ 为腔内原子 $i(i=2,3)$ 的下降和上升算符, a^\dagger 和 a 为腔内场模的产生和湮灭算符, g 为腔内原子和场的耦合强度,已假设腔内两个原子和场的耦合强度相等.

设初始时刻三个原子处于 GHZ 态,则原子初始时刻的态矢量表达式为

$$|\psi(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1 e_2 e_3\rangle - |g_1 g_2 g_3\rangle) \quad (2)$$

场初始处于数态 $|n\rangle$,则系统在初始时刻的态矢为

$$|\psi(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1 e_2 e_3\rangle - |g_1 g_2 g_3\rangle) |n\rangle \quad (3)$$

在 $t>0$ 的任意时刻,由于原子和场的相互作用,系统的态矢量演变为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f} = & A(t) |e_1, e_2, e_3, n\rangle + B(t) |e_1, e_2, \\ & g_3, n+1\rangle + C(t) |e_1, g_2, e_3, n+1\rangle + D(t) |e_1, \\ & g_2, g_3, n+2\rangle + E(t) |g_1, e_2, e_3, n-2\rangle + \\ & F(t) |g_1, g_2, e_3, n-1\rangle + G(t) |g_1, e_2, g_3, n-1\rangle + \\ & H(t) |g_1, g_2, g_3, n\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

在相互作用绘景中,态矢量 $|\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f}$ 所满足的薛定谔方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f} = H_I |\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f} \quad (5)$$

将式(4)代入式(5),得到微分方程组

$$iA'(t) = g \sqrt{n+1} B(t) + g \sqrt{n+1} C(t) \quad (6)$$

$$iB'(t) = iC'(t) = g \sqrt{n+1} A(t) + g \sqrt{n+2} D(t) \quad (7)$$

$$iD'(t) = g \sqrt{n+2} B(t) + g \sqrt{n+2} C(t) \quad (8)$$

$$iE'(t) = g \sqrt{n-1} F(t) + g \sqrt{n-1} G(t) \quad (9)$$

$$iF'(t) = iG'(t) = g \sqrt{n-1} E(t) + g \sqrt{n} H(t) \quad (10)$$

$$iH'(t) = g \sqrt{n} F(t) + g \sqrt{n} G(t) \quad (11)$$

考虑初始条件,有

$$A(0) = -H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, B(0) = C(0) = D(0) = 0 \quad (12)$$

$$E(0) = F(0) = G(0) = 0 \quad (12)$$

求解方程组(6)~(11),即可得到

$$A(t) = -\frac{n+1}{\sqrt{2}(2n+3)} [1 - \cos(\sqrt{2(2n+3)}gt)] + \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$B(t) = C(t) = -\frac{i\sqrt{n+1}}{2\sqrt{2n+3}} \sin(\sqrt{2(2n+3)}gt) \quad (14)$$

$$D(t) = -\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{2}(2n+3)} [1 - \cos(\sqrt{2(2n+3)}gt)] \quad (15)$$

$$E(t) = -\frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2}(2n-1)} [1 - \cos(\sqrt{2(2n-1)}gt)] \quad (16)$$

$$F(t) = G(t) = \frac{i\sqrt{n}}{2\sqrt{2n-1}} \sin(\sqrt{2(2n-1)}gt) \quad (17)$$

$$H(t) = \frac{n}{\sqrt{2}(2n-1)} [1 - \cos(\sqrt{2(2n-1)}gt)] - \frac{1}{2} \quad (18)$$

对于由三个原子 A_1, A_2, A_3 和腔 f 构成的四体系统,研究两个原子 A_2 和 A_3 之间的纠缠时知道整个系统密度矩阵 $\rho_{A_1 A_2 A_3 f}(t) = |\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 f} \langle \psi(t)|$ 的情况下,对原子 A_1 和场 f 进行取迹,可以得到两个原子 A_2 和 A_3 的约化密度矩阵 $\rho_{A_2 A_3}(t)$,由两原子 A_2 和 A_3 的约化密度矩阵就可以得到关于两个原子 A_2 和 A_3 的纠缠信息. 在标准基 $|e_2, e_3\rangle, |e_2, g_3\rangle, |g_2, e_3\rangle, |g_2, g_3\rangle$ 下,两个原子 A_2 和 A_3 的约化密度矩阵具有表达式

$$\rho_{A_2 A_3}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中密度矩阵元为

$$\rho_{11}(t) = A(t)A^*(t) + B(t)B^*(t) + E(t)E^*(t) \quad (20)$$

$$\rho_{22}(t) = G(t)G^*(t), \rho_{23}(t) = B(t)C^*(t) + G(t)F^*(t) \quad (21)$$

$$\rho_{32}(t) = C(t)B^*(t) + F(t)G^*(t), \rho_{33}(t) = C(t)C^*(t) + F(t)F^*(t) \quad (22)$$

$$\rho_{44}(t) = D(t)D^*(t) + H(t)H^*(t) \quad (23)$$

采用 1998 年 Wootters 提出的并发度 (Concurrence)^[19] 来度量两原子之间的纠缠,并发度的定义为

$$C(t) = \max [0, \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) - \lambda_4(t)] \quad (24)$$

式中 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)$ 是算符 $[\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}]^{1/2}$ 的本征值的降序排列, $\tilde{\rho}$ 是 ρ 的时间反演矩阵,表达式为

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y \quad (25)$$

式中 $*$ 表示取复共轭, C 的取值范围为 $0 \leq C \leq 1$,其中 $C=0$ 对应解纠缠, $C=1$ 为最大纠缠态.

由密度矩阵式描述的两原子 A_2 和 A_3 系统,并发度的表达式^[20] 为

$$C(t) = 2 \max \{0, |\rho_{23}(t)| - \sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)}\} \quad (26)$$

利用线性熵来度量两原子 A_2, A_3 和原子 A_1 , 场 f 之间的纠缠,得到两原子 A_2 和 A_3 的线性熵为^[21-23]

$$S(t) = 1 - \text{Tr}[\rho_{A_2 A_3}^2(t)] = 1 - [\rho_{11}^2(t) + \rho_{22}^2(t) + \rho_{33}^2(t) + \rho_{44}^2(t) + 2\rho_{23}(t)\rho_{32}(t)] \quad (27)$$

若利用场电离技术对腔外原子 A_1 进行测量,测得原子 A_1 处于基态 $|g_1\rangle$,则由原子 A_2, A_3 和场 f 构成的系统的态坍缩为

$$|\psi(t)\rangle_{A_2 A_3 f} = \sqrt{2} [E(t)|e_2, e_3, n-2\rangle + F(t)|g_2, e_3, n-1\rangle + G(t)|e_2, g_3, n-1\rangle + H(t)|g_2, g_3, n\rangle] \quad (28)$$

类似地,可以得到原子 A_2 和 A_3 的约化密度矩阵形式与式(19)相同,而密度矩阵元的表达式变为

$$\rho_{11}(t) = 2E(t)E^*(t), \rho_{22}(t) = 2G(t)G^*(t), \rho_{23}(t) = 2G(t)F^*(t) \quad (29)$$

$$\rho_{32}(t) = 2F(t)G^*(t), \rho_{33}(t) = 2F(t)F^*(t), \rho_{44}(t) = 2H(t)H^*(t) \quad (30)$$

利用以上结果,可以讨论数态场的光子数对两原子 A_2 和 A_3 之间纠缠以及两原子 A_2, A_3 和原子 A_1 , 场 f 之间纠缠特性的影响.

2 结果与讨论

图 2 给出了数态场的光子数取不同值时,并发度随时间的演化规律,实线和点线分别对应 $n=4, 7$.从图中可以看出,原子 A_2 和 A_3 之间的纠缠发生了类似于文献[9]的纠缠突然产生现象,也就是说,原子间初始时刻不存在纠缠,突然在一段有限时间之后,两原子之间发生了纠缠,人们称这种效应为“纠缠突然产生”.当相互作用继续一段时间之后,并发度 C 突然降为零,并且纠缠为零值持续一段时间,即两原子 A_2 和 A_3 之间出现了纠缠的突然死亡现象^[24].随着相互作用时间的推移,纠缠的突然产生和突然死亡现象交替出现.对比图 2 中的实线和点线发现纠缠产生的阈值时间与场的光子数有关,场光子数越大时,两原子纠缠产生的阈值时间变长,两原子间纠缠的最大值变小.

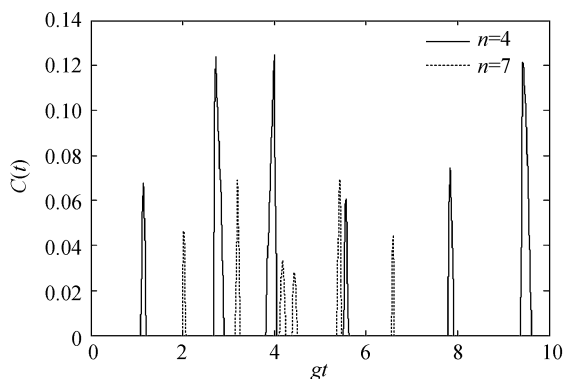


图 2 并发度随时间的演化

Fig. 2 The time evolution of concurrence

图 3 展示了两原子 A_2 和 A_3 的线性熵随时间

的演化规律,其它参量与图 2 是相同的.两原子 A_2 和 A_3 的线性熵大小反映了两原子 A_2, A_3 子系统和原子 A_1 , 场 f 子系统之间的纠缠大小,从图中可以看出两原子 A_2 和 A_3 的线性熵随时间的演化呈现振荡行为,对比图 3 中的实线和点线发现数态场光子数越大,两原子 A_2 和 A_3 的线性熵随时间的演化呈现更多的振荡的行为.

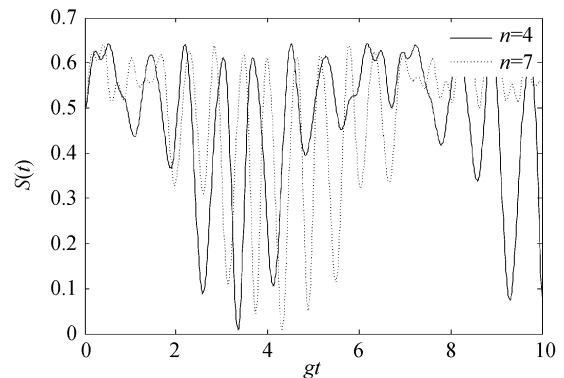


图 3 线性熵随时间的演化,其它参量与图 2 相同

Fig. 3 The time evolution of linear entropy. The other parameters are the same as in Fig. 2

图 4 给出了腔外原子 A_1 处于基态 $|g_1\rangle$ 时,数态场的光子数取不同值时,并发度随时间的演化规律,实线和点线分别对应 $n=4, 7$.对比图 4 与图 2 中实线可以发现,当对腔外原子 A_1 进行探测之后,原子 A_2 和 A_3 之间的纠缠没有出现突然产生现象,而是原子 A_2 和 A_3 和场一旦开始发生相互作用,场和原子间能量就发生交换,两原子之间立即就产生纠缠,随着相互作用继续进行,两原子之间出现纠缠的突然死亡现象^[24],并且并发度随时间的演化呈现周期性的规律.比较图 4 中的实线和点线发现,两原子 A_2 和 A_3 之间纠缠的最大值随着场的光子数的增加而减小,纠缠为零的值的持续时间缩短,并发度的演化周期缩短.

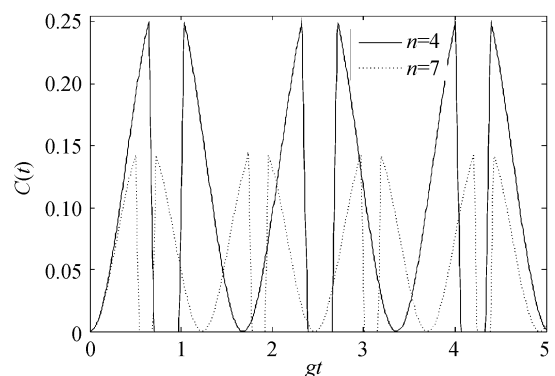


图 4 原子 A_1 处于基态时,并发度随时间的演化

Fig. 4 The time evolution of concurrence when the atom A_1 is detected in ground state

图 5 给出了腔外原子 A_1 处于基态 $|g_1\rangle$ 时,两原子 A_2 和 A_3 的线性熵随时间的演化规律,其它参

量与图 4 相同.从图中可以看出当原子 A_2 和 A_3 和场一旦开始发生相互作用,场和原子间能量就发生交换,两子系统之间立即就产生纠缠,当相互作用继续进行,线性熵渐渐地达到最大值,此时两原子 A_2 , A_3 子系统和原子 A_1 ,场 f 子系统之间呈现强纠缠特性,在某些相互作用时刻,线性熵的值为零,也就是说在这些时刻,两原子 A_2 , A_3 子系统和原子 A_1 ,场 f 子系统之间完全处于解纠缠状态,并且线性熵随时间的演化呈现周期性的规律.比较图 5 中的实线和点线发现,随着数态场光子数越大,不但线性熵的最大值增大,而且线性熵随时间的演化周期缩短.

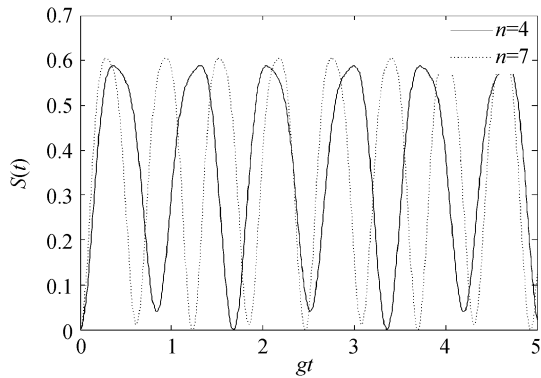


图 5 探测腔外原子 A_1 处于基态 $|g_1\rangle$,线性熵随时间的演化规律,其它参量与图 4 相同

Fig. 5 The time evolution of linear entropy when the atom A_1 is detected in ground state. The other parameters are the same as in Fig. 4

3 结论

本文利用并发度和线性熵作为度量研究了初始处于 GHZ 态的三个两能级原子与数态场相互作用系统的纠缠动力学性质,其中原子 A_1 孤立地处于腔外,原子 A_2 和 A_3 处于一个单模高 Q 腔内与场发生共振相互作用,讨论了场的初始光子数和腔外原子进行探测对并发度和线性熵的影响,结果表明:对腔外原子不进行探测时,腔内两原子之间的纠缠出现突然产生现象,并且可以通过改变光场初始光子数来控制产生纠缠的阈值时间和纠缠的最大值;当对腔外原子进行探测,原子处于基态时,并发度随时间的演化呈现周期性规律,场的光子数的增加不但减小了并发度的最大值,而且缩短了并发度的演化周期.希望本文的研究结果对纠缠态的制备、纠缠的操控等具有一定指导的意义.

参考文献

- [1] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [2] TURCHETTE Q A, WOOD C S, KING B E, et al. Deterministic entanglement of two trapped ions[J]. *Physical Review Letters*, 1998, **81**(17): 3631-3634.
- [3] JULSGAARD B, KOZHEKIN A, POLZIK E S. Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects[J]. *Nature*, 2001, **413**(6854): 400-403.
- [4] ASPECT A, GRANGIER P, ROGER G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem[J]. *Physical Review Letters*, 1981, **47**(7): 460-463.
- [5] STEFFEN M, ANSMANN M, RADOSLAW C, et al. Measurement of the entanglement of two superconducting qubits via state tomography[J]. *Science*, 2006, **313**(5792): 1423-1425.
- [6] BOSE S, FUENTES-GURIDI I, KNIGHT P L, et al. Subsystem purity as an enforcer of entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 2001, **87**(5): 050401-1-4.
- [7] KIM M S, LEE J, AHN D, et al. Entanglement induced by a single-mode heat environment[J]. *Physical Review A*, 2002, **65**(4): 040101-1-4.
- [8] ZHOU L, SONG H S, LI C. Entanglement induced by a single-mode thermal field and the criteria for entanglement[J]. *J Opt, B: Quant Semiclass Opt*, 2002, **4**(6): 425-429.
- [9] FICEK Z, TANAS R. Delayed sudden birth of entanglement[J]. *Physical Review A*, 2008, **77**(5): 054301-1-4.
- [10] XIA Jian-ping, REN Xue-zao, CONG Hong-lu, et al. Quantum entanglement of the coherent state field interacting with a Λ type three-level atom without rotating wave approximation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1621-1626.
- [11] 夏建平, 任学藻, 丛红璐, 等. 非旋波近似下 Λ 型三能级原子与相干态光场的量子纠缠[J]. *光子学报*, 2010, **39**(9): 1621-1626.
- [12] JIANG Dao-lai, REN Xue-zao, CONG Hong-lu, et al. Entanglement properties of two entangled atoms without rotating wave approximation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1636-1640.
- [13] 姜道来, 任学藻, 丛红璐, 等. 非旋波近似下两纠缠原子的纠缠特性[J]. *光子学报*, 2010, **39**(9): 1636-1640.
- [14] ZHANG Li-hui, LI Gao-xiang. Entanglement properties of two-atoms interacting with field in dissipative cavity[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(4): 607-612.
- [15] 张立辉, 李高翔. 耗散腔中双原子与光场的纠缠演化特性[J]. *光子学报*, 2011, **40**(4): 607-612.
- [16] GERRY C C, GHOSH H. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic measurements[J]. *Physics Letters A*, 1997, **229**(1): 17-22.
- [17] YANG Chui-ping, GUO Guang-can. Controllable emission properties of an atom inside a cavity by manipulating the atom outside the cavity[J]. *Physics Letters A*, 1999, **255**(3): 129-132.
- [18] ZHOU Yuan, ZHANG Ying-jie, XIA Yun-jie. Remote control of quantum statistical properties of light field[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 1122-1128.
- [19] 周原, 张英杰, 夏云杰. 远程控制光场的量子统计性质[J]. *光学学报*, 2007, **27**(6): 1122-1128.
- [20] LU Dao-ming. Remote control entanglement properties of two-atom inside cavities[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(11): 2088-2092.
- [21] 卢道明. 远程控制原子的纠缠特性[J]. *光子学报*, 2010, **39**(11): 2088-2092.
- [22] MOYA-CESSA H, KNIGHT P L, ROSENHOUSE-DANTSKER A. Photon amplification in a two-photon lossless micromaser[J]. *Physical Review A*, 1994, **50**(2): 1814-1821.
- [23] GARRAWAY B M, SHERMAN B, MOYA-CESSA H, et al. Generation and detection of nonclassical field states by

- conditional measurements following two-photon resonant interactions[J]. *Physical Review A*, 1994, **49**(1): 535-547.
- [19] WOOTTERS W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(10): 2245-2248.
- [20] YU T, EBERLY J H. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed "X" states [J]. *Quantum Information and Computation*, 2007, **7**(5-6): 459-468.
- [21] EL-ORANY F A A. Relationship between the linear entropy, the von Neumann entropy and the atomic Wehrl entropy for the Jaynes-Cummings model. 2007, Preprint quant-ph/07054373.
- [22] MUNRO W J, JAMES D F V, WHITE A G, *et al.* Maximizing the entanglement of two mixed qubits [J]. *Physical Review A*, 2001, **64**(3): 030302-1-4.
- [23] BERRY D W, SANDERS B C. Bounds on general entropy measures [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, **36**(49): 12255-12265.
- [24] YU T, EBERLY J H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission[J]. *Physical Review Letters*, 2004, **93**(14): 140404-1-4.

Entanglement Properties of Three Two-level Atoms System Interacting with a Fock State Field

LIAO Qing-hong, GONG Li-hua

(*Department of Electronic Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

Abstract: The dynamics of entanglement of three two-level atoms initially in GHZ state system interacting with a Fock state field are investigated by means of concurrence and linear entropy. The effect of photon number on the time evolution of concurrence and linear entropy is analyzed. The results show that the phenomenon of sudden birth of entanglement between two atoms trapped in a cavity occurs and the threshold time and maximum for the creation of the entanglement can be controlled by the photon number. The measurement of the atom outside the cavity leads to the periodic evolution of the concurrence and an increase of the photon number results in decreasing in the maximum of concurrence and shortening of the evolution period of the time behavior of concurrence.

Key words: Concurrence; Linear entropy; Entanglement sudden birth; Quantum information