

doi:10.3788/gzxb20124103.0343

# 原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性

卢道明

(武夷学院 电子工程系, 福建 武夷山 354300)

**摘 要:**研究了耦合腔 A 和 B 中各囚禁一个二能级原子的情况, 给出了总激发数为 2 时系统态矢的演化. 利用 Negativity 熵度量两子系统间的纠缠, 采用数值计算方法研究了两个原子之间、腔内原子与腔场之间和两个腔场之间的纠缠性质. 讨论了腔场间的耦合强度对纠缠特性的影响. 研究结果表明: 原子 1 和原子 2 处于分离态. 另一方面, 随腔场间耦合系数增大腔场间的纠缠和原子与腔场间的纠缠减小.

**关键词:**量子光学; 二能级原子; 耦合腔; 量子纠缠

**中图分类号:** O431.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2012)03-0343-5

## 0 引言

腔量子电动力学 (Quantum Electrodynamics, QED) 技术和囚禁离子技术是实现多比特纠缠态、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术. 1995 年 Kimble 小组利用腔 QED 技术实验上第一次演示并测量了与量子逻辑门有关的相移<sup>[1]</sup>. 近十多年来, 法国 Haroche 领导的 ENS 小组利用腔 QED 技术在实验上成功实现两原子 Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) 纠缠态<sup>[2-3]</sup>、两腔模的 EPR 纠缠态<sup>[4]</sup>、三粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ) 态和两比特量子逻辑门<sup>[5]</sup>等. 此外, 人们还提出了许多利用 QED 技术进行量子态制备和传送的方案<sup>[6-7]</sup>. 近年来, 耦合腔系统已成为量子信息处理的物理实现的热门研究之一<sup>[8-11]</sup>. Zheng 等人提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统产生双模压缩态的方案<sup>[12]</sup>. Yin 等人提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子态转换和逻辑门的方案<sup>[13]</sup>. Yang 等人提出利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子相位门的方案<sup>[14]</sup>. 但在以往的研究中主要讨论系统的总激发数为 1 的情况, 关于更高激发数情况的研究少见报道. 本文研究系统总激发数等于 2 时, 原子与耦合腔相互作用系统中两个原子之间、腔内原子与腔场之间和两个腔场之间的纠缠特性.

## 1 理论模型

如图 1 所示, 在耦合腔 A 和 B 中各囚禁一个二

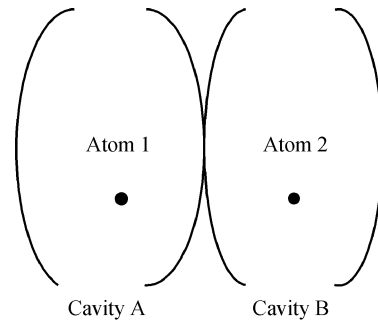


图 1 系统的框图

Fig. 1 Sketch of the set-up

能级原子. 原子 1 或原子 2 通过单光子跃迁分别与腔场 A 或腔场 B 发生共振相互作用. 在旋波近似下, 在相互作用绘景中系统的哈密顿为

$$H_I = f_1(a_A s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_2(a_B s_2^+ + a_B^+ s_2^-) + J(a_A a_B^+ + a_A^+ a_B) \quad (1)$$

式中  $a_A^+$ ,  $a_A$  ( $a_B^+$ ,  $a_B$ ) 分别表示腔场的产生和湮没算符,  $s_i^+$  和  $s_i^-$  ( $i=1, 2$ ) 为第  $i$  个原子的赝自旋算符.  $f_1, f_2$  分别表示两个腔中原子与腔场的耦合系数,  $J$  为两个腔之间的耦合系数. 为简单起见, 设  $f_1 = f_2 = f$ . 定义系统的总激发数算符为

$\hat{N} = |e\rangle_1 \langle e| + |e\rangle_2 \langle e| + a_A^+ a_A + a_B^+ a_B$ , 因  $[\hat{N}, H_I] = 0$ , 所以在系统演化过程中总激发数守恒.  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别表示二能级原子的激发态和基态.

当系统总激发数等于 2 时, 系统在演化过程中将保留在以  $|\varphi_1\rangle = |ee00\rangle, |\varphi_2\rangle = |eg01\rangle, |\varphi_3\rangle = |ge10\rangle, |\varphi_4\rangle = |eg10\rangle, |\varphi_5\rangle = |ge01\rangle, |\varphi_6\rangle = |gg11\rangle, |\varphi_7\rangle = |gg20\rangle, |\varphi_8\rangle = |gg02\rangle$  为基矢构成

基金项目: 福建省自然科学基金 (No. 2008J0217) 资助

第一作者: 卢道明 (1963-), 男, 教授, 主要研究方向为量子光学. Email: daominglu79@hotmail.com

收稿日期: 2011-08-23; 修回日期: 2011-10-22

的子空间中,在 $|\varphi_i\rangle$ 态中第 1 到第 4 位分别表示原子 1、原子 2、腔 A 和腔 B 的状态.

在相互作用绘景中,系统的态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle \quad (2)$$

取  $\hbar=1$ , 任意时刻  $t$  系统的态矢将演化为

$$|\varphi(t)\rangle = d_1 |\varphi_1\rangle + d_2 |\varphi_2\rangle + d_3 |\varphi_3\rangle + d_4 |\varphi_4\rangle + d_5 |\varphi_5\rangle + d_6 |\varphi_6\rangle + d_7 |\varphi_7\rangle + d_8 |\varphi_8\rangle \quad (3)$$

设系统初始时刻处于 $|\varphi_1\rangle$ 态,那么初始条件为: $d_1=1$ ,  $d_2=d_3=d_4=d_5=d_6=d_7=d_8=0$ . 解方程(2)可得出

$$\begin{aligned} d_1 &= A \cos(\alpha t) + B \cos(\beta t) + C, d_2 = d_3 = \\ & - \frac{i}{2f} (A \alpha \sin(\alpha t) + B \beta \sin(\beta t)), \\ d_4 &= d_5 = \frac{J}{2f} (d_1 - 1) - \frac{1}{6fJ} [A(\alpha^2 - (4f^2 + J^2))(1 - \cos(\alpha t)) + B(\beta^2 - (4f^2 + J^2))(1 - \cos(\beta t))], \\ d_6 &= d_1 - 1 - \frac{1}{3f^2} [A(\alpha^2 - (4f^2 + J^2))(1 - \cos(\alpha t)) + B(\beta^2 - (4f^2 + J^2))(1 - \cos(\beta t))], \\ d_7 &= d_8 = \frac{-i}{6\sqrt{2}f^2 J} \cdot [A\alpha(\alpha^2 - (4f^2 + J^2))\sin(\alpha t) + B\beta(\beta^2 - (4f^2 + J^2))\sin(\beta t)] \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(H - \sqrt{H^2 - 16(2f^4 + J^4)})^{1/2}$ ,

$$H = 6f^2 + 5J^2,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(H + \sqrt{H^2 - 16(2f^4 + J^4)})^{1/2},$$

$$A = \frac{2f^2(-\beta^2 + 4f^2 + J^2)}{\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)},$$

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_7|^2 & 0 & d_7 d_6^* & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_6 d_7^* & 0 & |d_6|^2 & 0 & d_6 d_7^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{24}|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_7|^2 & 0 & d_7 d_6^* & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{24}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_1|^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对腔 B 的态进行转置,可得出其部分转置矩阵为

$$B = \frac{2f^2(\alpha^2 - (4f^2 + J^2))}{\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)},$$

$$C = 1 - A - B$$

## 2 原子间纠缠的演化

为了度量两个子系统间的纠缠度,本文采用 Negativity 熵来度量,即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两个子系统,其纠缠可用部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值来定义

$$N = -2 \sum_i \lambda_i \quad (5)$$

式中  $\lambda_i$  是部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值.

利用式(3),对腔场求迹,以 $|ee\rangle$ 、 $|eg\rangle$ 、 $|ge\rangle$ 、 $|gg\rangle$ 为基矢,可得到原子 1 和原子 2 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} |d_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_{24}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_{24}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_{678}|^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $|d_{24}|^2 = |d_2|^2 + |d_4|^2$ ,  $|d_{678}|^2 = |d_6|^2 + |d_7|^2 + |d_8|^2$ . 因  $\rho_{12}$  非对角元全为 0,所以原子间的纠缠度  $N_{12} = 0$ . 这表明原子间是分离. 这一结果与系统的激发数为 1 时的情况完全不同<sup>[13]</sup>.

## 3 腔场间纠缠的演化

腔场 A 与腔场 B 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述. 利用式(3),对原子 1 和原子 2 的态求迹,以 $|22\rangle$ 、 $|21\rangle$ 、 $|20\rangle$ 、 $|12\rangle$ 、 $|11\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|02\rangle$ 、 $|01\rangle$ 和 $|00\rangle$ 为基矢,可得到腔 A 和腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_7|^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_7 d_6^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 d_7^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |d_6|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 d_7^* & 0 & 0 & 0 & |d_{24}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_7 d_6^* & 0 & 0 & 0 & |d_{24}|^2 & 0 \\ |d_7|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_1|^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

采用数值计算方法,利用上式,耦合系数  $J$  分别取  $1f, 2f, 4f, 6f$  时,腔场 A 和 B 间的纠缠量随时间演化如下图 2 所示.从图中可见:随腔场间耦合

系数增大,腔场间纠缠减弱.这表明选择较小的腔场间耦合系数对增大腔场间纠缠有利.

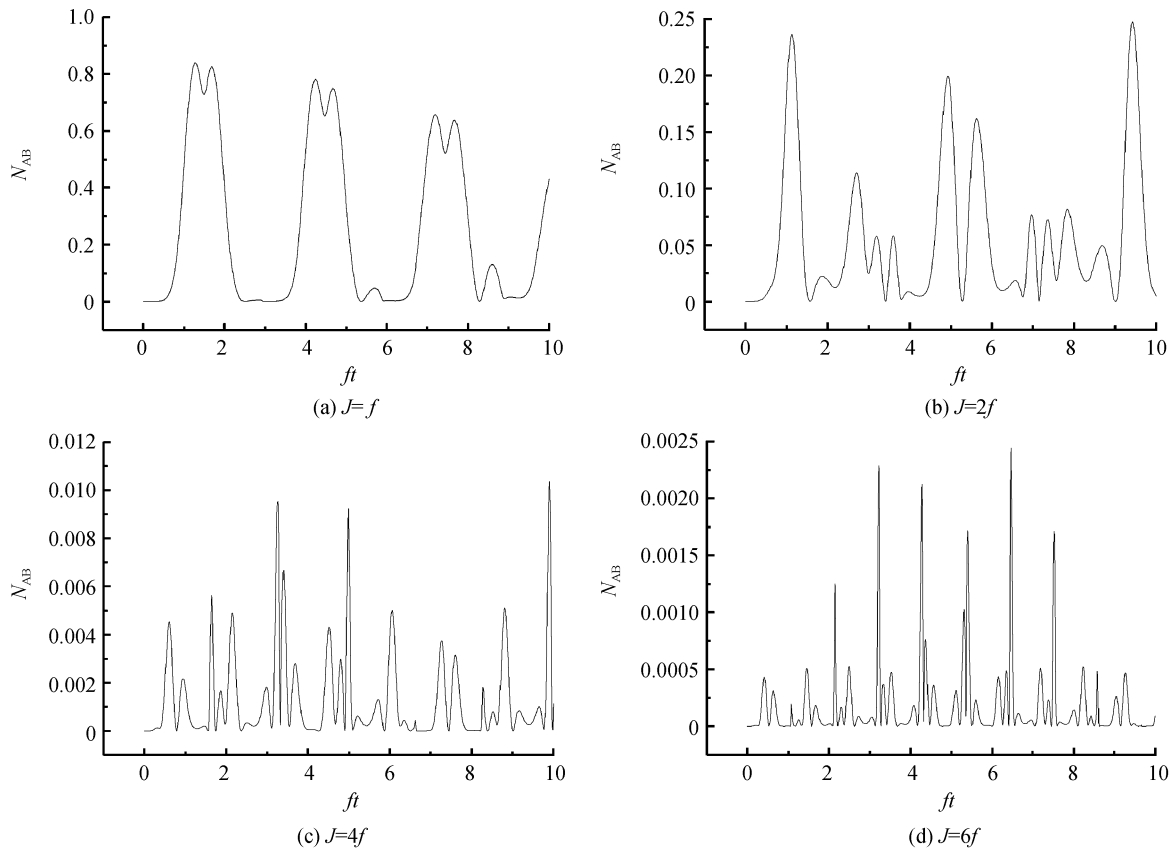


图 2 腔场 A 与腔场 B 间纠缠量  $N_{AB}$  随时间的演化  
Fig. 2 Time evolution of cavity-cavity entanglement  $N_{AB}$

### 4 原子与腔场间纠缠的演化

原子 1 与腔场 A 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述.利用式(3),对原子 2 和腔场 B 的态求

迹,以  $|e\rangle|2\rangle, |e\rangle|1\rangle, |e\rangle|0\rangle, |g\rangle|2\rangle, |g\rangle|1\rangle, |g\rangle|0\rangle$  为基矢,可得到原子 1 和腔 A 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_4|^2 & 0 & d_4 d_7^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_1|^2 + |d_2|^2 & 0 & d_1 d_3^* + d_2 d_6^* & 0 \\ 0 & d_7 d_4^* & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 d_1^* + d_6 d_2^* & 0 & |d_2|^2 + |d_6|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 + |d_7|^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

对腔场 A 的态进行转置, 可得出其部分转置矩阵为

$$\rho_{1A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 d_7^* & 0 \\ 0 & |d_4|^2 & 0 & 0 & 0 & d_1 d_3^* + d_2 d_6^* \\ 0 & 0 & |d_1|^2 + |d_2|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_7|^2 & 0 & 0 \\ d_7 d_4^* & 0 & 0 & 0 & |d_2|^2 + |d_6|^2 & 0 \\ 0 & d_3 d_1^* + d_6 d_2^* & 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 + |d_7|^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

通过数值计算耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, 1f, 2f, 5f$  时, 原子 1 和腔场 A 间的纠缠量随时间演化如下图 3 所示. 从图 3 可见: 原子与腔场间的纠缠量作不规则振荡. 随腔场间耦合的增强, 曲线的峰值减

小, 重心下移, 其平均值也减小. 这表明随腔场间耦合的增强原子与腔场间的纠缠减弱. 进一步研究表明, 原子 2 和腔场 B 间的纠缠演化与原子 1 和腔场 A 间的纠缠演化结果一致.

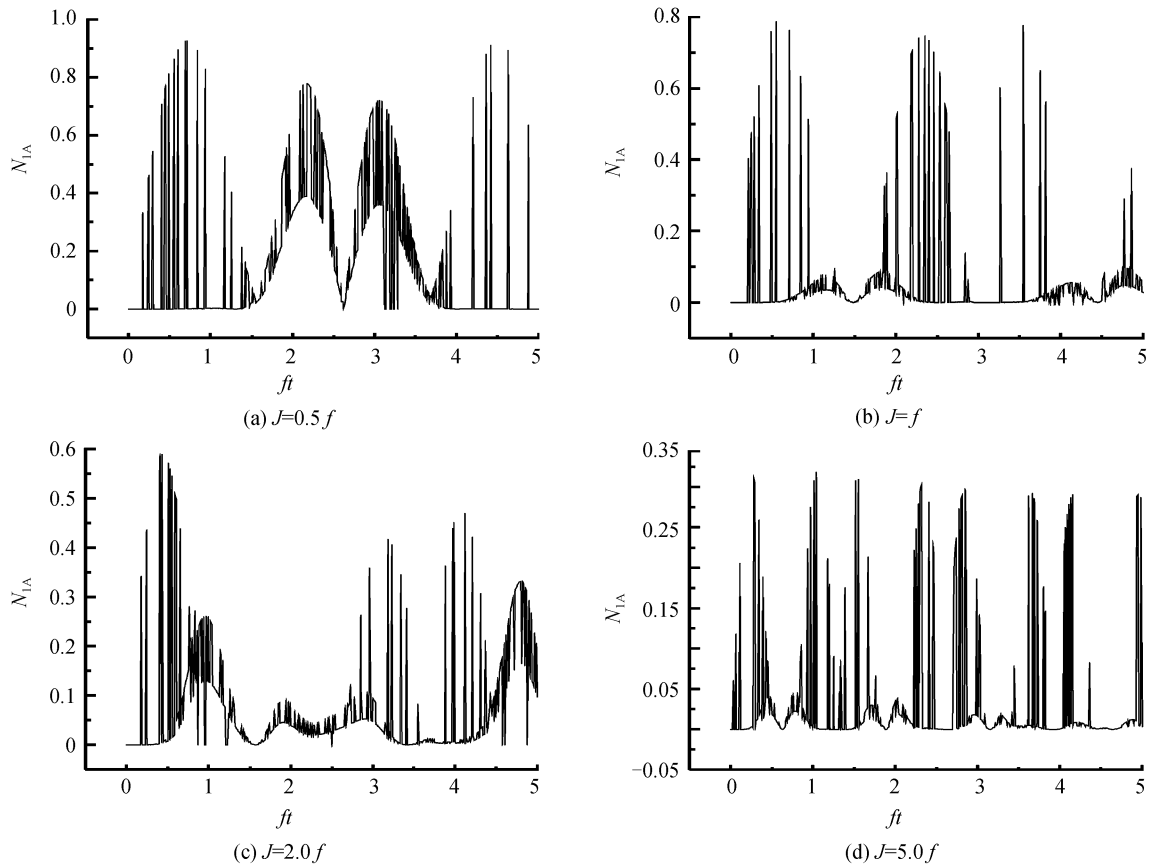


图 3 原子 1 与腔场 A 间纠缠量  $N_{1A}$  随时间的演化

Fig. 3 Time evolution of atom-cavity entanglement  $N_{1A}$

## 5 结论

本文考虑两个全同二能级原子分别被囚禁在耦合腔 A 和 B 中, 并且原子与腔场发生共振相互作用的情况. 给出了系统总激发数等于 2 时, 系统态矢的演化. 利用 Negativity 熵来度量两个子系统间的纠缠, 采用数值计算方法研究了系统中两个原子间、腔 A 与腔 B 间和原子与腔场间纠缠的演化. 讨论了腔场间的耦合系数变化对纠缠特性的影响. 研究结果表明: 原子 1 和原子 2 处于分离态, 这与总激发数等

于 1 时的情况完全不同. 另一方面, 随腔场间耦合系数增大腔场间的纠缠和原子与腔场间的纠缠减小.

### 参考文献

- [1] TURCHETTE Q A, HOOD C J, LANGE W, *et al.* Measurement of conditional phase shifts for quantum logic[J]. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(25): 4710-4713.
- [2] HAGLEY E, MAITRE X, NOGUES G, *et al.* Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms[J]. *Physical Review Letters*, 1997, **79**(1): 1-5.
- [3] OSNAGHI S, BERTET P, AUFEVES A, *et al.* Coherent control of an atomic collision in a cavity[J]. *Physical Review Letters*, 2001, **87**(3): 037902.
- [4] RAUSCHENBEUTEL A, NOGUES G, OSNAGHI S, *et al.* Step by step engineered many particle entanglement [J].

- Science*, 2000, **288**: 2024-2028.
- [5] RAUSCHENBEUTEL A, NOGUES G, OSNAGHI S, *et al.* Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED[J]. *Physical Review Letters*, 1999, **83**(24): 5166-5169.
- [6] ZHENG S B, GUO G C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(11): 2392-2395.
- [7] YANG Z B. Teleportation of two-atom entangled state in resonant cavity quantum electrodynamics[J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(2): 329-334.
- [8] OGDEN C D, IRISH E K, KIM M S. Dynamics in a coupled-cavity array[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(6): 063805.
- [9] HARTMANN M J, BRANDAO F G S L, PLENIO M B. Effective spin systems in coupled microcavities[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **99**: 160501.
- [10] ZHENG S B, YANG C P, NORI F. Arbitrary control of coherent dynamics for distant qubits in a quantum network [J]. *Physical Review A*, 2010, **82**(4): 042327.
- [11] ZHENG S B. Quantum communication and entanglement between two distant atoms via vacuum fields[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(6): 064204.
- [12] ZHENG S B, YANG Z B, XIA Y. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities [J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(1): 015804.
- [13] YIN Z Q, LI F L. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(1): 012324.
- [14] YANG Z B, XIA Y, ZHENG S B. Resonant scheme for realizing quantum phase gates for two separate atoms via coupled cavities [J]. *Optics Communications*, 2010, **283**: 3052-3057.

## Entanglement Properties in the System of two Atoms Trapped in Coupled Cavities

LU Dao-ming

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

**Abstract:** The two-excitation system comprising two two-level atoms resonantly interacting with two coupled cavities is analyzed. The evolution of the state vector of the system is given when the total excitation number equals two. By means of the numerical calculations, the temporal evolution in the entanglement is investigated between the atoms, between the cavities, as well as between the atom and the local cavity mode. The influences of coupling constant between cavities on the entanglements are discussed. The results obtained show that atom and atom are separable, and the cavity-cavity entanglement and the atom-cavity entanglement are weakened with increasing of the coupling constant between cavities.

**Key words:** Quantum optics; Two-level atom; Coupling cavities; Dynamical properties