

doi: 10.3788/gzxb20124103.0288

负折射介质中孤波间相互作用

陈 诚, 董 佳, 杨 荣 草

(山西大学 物理电子工程学院, 太原 030006)

摘 要:以描述负折射介质中超短脉冲传输的归一化非线性薛定谔方程为模型,采用对称分步傅里叶算法研究了负折射介质中亮、暗孤波间的相互作用.数值模拟发现:当孤波的初始频移为零时,亮孤波间的相互作用与常规介质中类似;当孤波的初始频移不为零时,其传输速度和相互作用明显受三阶色散和自陡峭效应的影响,主要表现为相互排斥.而负折射介质中暗孤波间的相互作用与常规介质中的相互作用类似,无论暗孤波是否存在初始频移,暗孤波间的相互作用在三阶色散和自陡峭的影响下都表现为相互排斥.结果表明,通过调节三阶色散和自陡峭系数可以在一定程度上抑制负折射介质中亮、暗孤波间的相互作用.该研究结果为负折射介质在未来高速通信中的应用提供了理论依据.

关键词:负折射介质;亮孤波;暗孤波;相互作用

中图分类号:O431

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2012)03-0288-6

0 引言

负折射介质是一种新型的人工构造材料,也称负折射材料(Negative-Index Materials, NIMs). 21世纪初, J. B. Pendry 教授提出了实现负介电常量和负磁导率的设计结构^[1]. 随后, D. Smith 等人在实验上成功制造出这种材料^[2], 有关负折射介质的研究在国内外上引起高度关注.

负折射介质具有负的介电常量 ϵ 和负的磁导率 μ , 因此表现出常规介质所不具有的许多特性, 如逆 Snell 定律、反常的 Doppler 效应、反常的 Cerenkov 效应、逆的 Goos-Hänchen 相移^[3-5]. 随着研究的深入, 负折射介质在设计、制造和应用等方面取得了巨大进展, 被人们应用于滤波器、隐身、天线、光通信以及其它领域^[6-7].

在光通信领域中, 光孤子一直是人们研究的热点. 当介质的非线性和色散效应达到平衡时, 光脉冲在传统的非线性色散介质中传输时, 可以形成光孤子. 通常在反常色散区形成亮孤子, 在正常色散区则形成暗孤子. 目前, 超短脉冲在负折射介质中的传输也逐渐引起人们的关注. Lazarides 等人推导了脉冲在非线性电和磁极化的超常介质中传输的一组耦合非线性薛定谔方程^[8], Scalora 等人将电场和磁场去

耦, 导出一个归一化的非线性薛定谔方程^[9], 该方程已被普遍用来研究超短脉冲在负折射介质中的传输. 文献[10-12]分别报道了负折射介质中存在精确的亮孤波和暗孤波. 本文在现有的关于负折射介质中光孤波研究的基础上, 以描述超短脉冲在负折射介质中传输的非线性薛定谔方程为模型, 通过大量数值模拟分别对负折射介质中亮、暗孤波间的相互作用进行了详细研究. 结果发现与常规介质中的亮、暗孤波相互作用存在不同.

1 理论模型与负折射介质中的亮、暗孤波解

超短脉冲在超常介质中的传输可用高阶非线性薛定谔方程描述为^[12-13]

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + k_3 \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + ip_3 |E|^2 E - ip_5 |E|^4 E + s_1 \frac{\partial}{\partial \tau} (|E|^2 E) - is_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|E|^2 E) \quad (1)$$

式中: $E(\xi, \tau)$ 是电场的复包络; $\xi = Z/\lambda_p$, $\tau = cT/\lambda_p$ 分别是归一化传输距离和时间; λ_p 是等离子体波长; $k_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{V_g} \right) = -\frac{1}{\beta n} \left(\frac{1}{V_g^2} - \alpha\gamma - \beta \frac{\epsilon\gamma' + \mu\alpha'}{4\pi} \right)$ 和 $k_3 = \frac{1}{2\beta n} \left(\frac{k_2}{V_g} + \beta \frac{\epsilon\gamma'' + \mu\alpha''}{24\pi^2} + \frac{\alpha\gamma' + \gamma\alpha'}{4\pi} \right)$ 分别是群速度

基金项目:国家自然科学基金(No. 60878008)、教育部新教师基金(No. 200801081014)、山西省自然科学基金(No. 2008012002-1)和山西省回国留学人员科研资助项目(No. 2011-002)资助

第一作者:陈诚(1987-),男,硕士研究生,主要研究方向为超短脉冲的非线性传输. Email: chencheng810@163.com

导师(通讯作者):杨荣草(1970-),女,副教授,主要研究方向为光通信. Email: sxdxyrc@sxu.edu.cn

收稿日期:2011-09-13; **修回日期:**2011-11-11

色散 (Group Velocity Dispersion, GVD) 和三阶色散 (Third-Order Dispersion, TOD) 系数; $p_3 = \beta\mu\chi^{(3)}/2n$ 和 $p_5 = \beta\mu^2(\chi^{(3)})^2/8n^3$ 分别为三阶和五阶非线性的系数; $s_1 = \chi^{(3)}[\mu/(V_g n) - (\gamma + \mu)]/2n$ 和 $s_2 = \mu\chi^{(3)}[k_2/4n + \gamma/(\mu\beta) + \gamma'/(4\pi\mu)]/2n$ 分别是自陡峭 (Self-Steepening, SS) 和二阶非线性色散系数. 这里 $\alpha = \partial[\bar{\omega}\epsilon(\bar{\omega})]/\partial\bar{\omega}$, $\alpha' = \partial^2[\bar{\omega}\epsilon(\bar{\omega})]/\partial^2\bar{\omega}$, $\alpha'' = \partial^3[\bar{\omega}\epsilon(\bar{\omega})]/\partial^3\bar{\omega}$, $\gamma = \partial[\bar{\omega}\mu(\bar{\omega})]/\partial\bar{\omega}$, $\gamma' = \partial^2[\bar{\omega}\mu(\bar{\omega})]/\partial^2\bar{\omega}$, $\gamma'' = \partial^3[\bar{\omega}\mu(\bar{\omega})]/\partial^3\bar{\omega}$, $\beta = 2\pi\bar{\omega} = 2\pi\omega/\omega_p$, $V_g = 2n/(\epsilon\gamma + \mu\alpha)$ (以真空中光速 c 为单位), 介电常量 ϵ 和磁导率 μ 在损耗可忽略的情况下可采用无损的 Drude 模型 $\epsilon(\bar{\omega}) = 1 - \bar{\omega}^{-2}$, $\mu(\bar{\omega}) = 1 - (\omega_m^2/\omega_p^2)\bar{\omega}^{-2}$, ω_p 和 ω_m 分别代表电和磁的等离子体频率^[9]. ω_m/ω_p 与超常介质的结构和材料特性有关, 直接影响介质的 ϵ 和磁导率 μ , 从而影响式(1)中的各项系数. 理论上讲, 通过设计各种不同结构和尺寸的超常材料, 可以调控式(1)中的各项色散和非线性效应的系数. 另外注意到, 方程中五阶非线性的系数 p_5 是 $(\chi^{(3)})^2$ 的量级, 其效应非常微弱, 因此可以忽略. 假设脉冲振幅在传输过程中不会剧烈色散, s_2 的影响也可以忽略, 式(1)可简化成包含三阶色散和自陡峭效应的非线性薛定谔方程^[14]

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + k_3 \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + ip_3 |E|^2 E + s_1 \frac{\partial}{\partial \tau} (|E|^2 E) \quad (2)$$

为了方便数值演化, 重新对式(1)做归一化变换

$$t = \frac{\lambda_p \tau}{c T_0}, z = \frac{\lambda_p \xi}{L_D}, u = \frac{E}{\sqrt{P_0}}$$

式中 P_0, L_D, T_0 分别为归一化参量, 则变换后的方程简写成

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{ia}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + iN^2 \left[|u|^2 u - iS_1 \frac{\partial}{\partial t} (|u|^2 u) \right] \quad (3)$$

式中 $a = \text{sgn}(k_2)$, $b = \frac{k_3 \lambda_p^2}{T_0^3 c^3} L_D$, $L_D = \frac{c^2 T_0^2}{|k_2| \lambda_p}$, $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$, $L_{NL} = \frac{\lambda_p}{p_3 P_0}$, $S_1 = \frac{s_1 \lambda_p}{c T_0 p_3}$, L_D 为色散长度, L_{NL} 为非线性长度. 当 $b=0, S_1=0$ 时, 式(3)简化为标准的非线性薛定谔方程, 存在精确亮暗孤波解^[15]. 当 $b \neq 0, S_1 \neq 0$ 时, 式(3)是包含三阶色散和自陡峭效应的高阶非线性薛定谔方程, $N=1, a=\pm 1$ 时方程具有的亮、暗孤波解^[10-12]为

$$\begin{aligned} u^+(z, t) &= \rho_1 \text{sech} [\eta_1 (t - \chi_1 z)] \cdot \exp [i(K_1 z + \Omega_1 t)] \\ u^-(z, t) &= \rho_2 \tanh [\eta_2 (t - \chi_2 z)] \cdot \end{aligned} \quad (4)$$

$$\exp [i(K_2 z + \Omega_2 t)] \quad (5)$$

式中

$$\rho_i = \eta_i \sqrt{\frac{2b}{-aS_1}} \quad (6)$$

$$\Omega_i = \frac{1}{2S_1} + \frac{a}{4b} \quad (7)$$

$$\chi_i = -\frac{a^2}{16b} + \frac{3b}{4S_1^2} + \frac{a}{4S_1} - m\eta_i^2 b \quad (8)$$

$$K_i = \frac{a^3}{64b^2} + \frac{a^2}{32bS_1} - \frac{a}{16S_1^2} - \frac{b}{8S_1} + \frac{3mb\eta_i^2}{2S_1} + \frac{ma\eta_i^2}{4} \quad (9)$$

ρ_i 和 η_i 分别是孤波振幅和反脉宽, χ_i 代表孤波的速度, K_i 和 Ω_i 是孤波的波数和频移, 这里 $i=1, 2$, 且 $i=1$ 时, $a=-1, m=1$; $i=2$ 时, $a=1, m=-2$. 从式(6)看出, 当 $bS_1 > 0$, 式(3)有基态亮孤波解式(4); 当 $bS_1 < 0$, 式(3)有基态暗孤波解式(5).

本文采用对称分步傅里叶数值方法分别研究在三阶色散和自陡峭效应影响下亮孤波和暗孤波之间的相互作用. 为了提高准确度, 采用对称分布傅里叶算法

$$u(z+h, t) \approx \exp \left[\frac{h}{2} \hat{D} \right] \exp [h\hat{N}] \cdot \exp \left[\frac{h}{2} \hat{D} \right] u(z, t) \quad (10)$$

其中: $\hat{D} = -i \frac{a}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial^3}{\partial t^3}$,

$$\hat{N} = iN^2 \left(|u|^2 - \frac{iS_1}{u} \frac{\partial (|u|^2 u)}{\partial t} \right).$$

基于式(4)和(5)的亮暗孤波解, 输入的初始亮、暗孤子对形式为

$$u^+(0, t) = \rho_1 \text{sech} [\eta_1 (t + t_0)] \exp [i\Omega_1 (t + t_0)] + \rho_1 \text{sech} [\eta_1 (t - t_0)] \exp [i\Omega_1 (t - t_0)],$$

$$u^-(0, t) =$$

$$\begin{cases} -\rho_2 \tanh [\eta_2 (t + t_0)] \exp [i\Omega_2 (t + t_0)] & (-\infty < t \leq 0) \\ \rho_2 \tanh [\eta_2 (t - t_0)] \exp [i\Omega_2 (t - t_0)] & (0 < t < +\infty) \end{cases}$$

式中 t_0 是表示两孤波间间距的参量. 为了计算方便, 本文模拟中选取 $\eta_i = 1, \rho_i$ 和 Ω_i 分别由式(6)和(7)决定.

2 数值结果及其分析

2.1 两个亮孤波间的相互作用

在常规介质中, 两个皮秒亮孤波间相互作用表现为周期性的离合^[15], 而对于两个飞秒亮孤波, 相互作用开始表现为相互吸引, 然后合二为一, 之后一直排斥, 且不具有周期性^[16]. 通过大量模拟表明: 负折射介质中的亮孤波间相互作用与常规介质中亮孤波间的相互作用存在异同. 图 1(a)给出了 $b=0.01$,

$s_1=0.02, t_0=6$ 时两个亮孤波传输 100 个色散长度的相互作用情况. 从图上可看出, 当初始间距较大时, 两亮孤波间几乎不发生相互作用. 减小孤波间距 $t_0=3.5$ 后, 发现其相互作用类似于飞秒亮孤波间相互作用, 它们在传输很短的色散长度就发生强烈的吸引, 甚至合二为一, 随后又处于排斥状态, 如图 1 (b). 究其原因: 由于在图 1 中 $S_1=2b$, 根据式 (7), 输入的亮孤波的初始频移 $\Omega=0$, 两亮孤波的初始形式和演化模型都与常规介质中的类似, 导致了类似的结果.

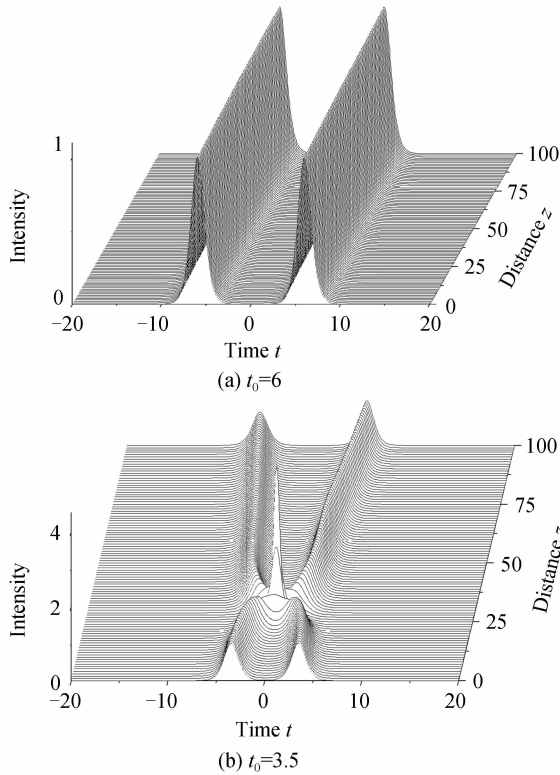


图 1 不同间距下两亮孤波在负折射介质中的相互作用
Fig. 1 The interactions of two bright solitary waves with different initial separations in NIMs

进一步, 本文考虑 $S_1 \neq 2b$ 时负折射介质中三阶色散和自陡峭效应对孤波相互作用的影响. 图 2 给出了 $t_0=3.5, S_1=0.02$ 时, 不同色散 $b=0.009$ 和 $b=0.011$ 下负折射介质中两亮孤波间的相互作用情况. 图 3 给出了 $t_0=3.5, b=0.01$ 不同自陡峭系数 $S_1=0.018$ 与 $S_1=0.022$ 下负折射介质中两亮孤波间的相互作用情况.

由图 2 和图 3 可知, 三阶色散和自陡峭效应不仅影响孤波对的传输速度, 而且影响两孤波间的相互作用. 大量的数值模拟发现, 当 $S_1 \neq 2b$ 时, 两亮孤波在传输过程中几乎不再发生相互碰撞, 孤波的非零的初始频移 $\Omega=1/2S_1-1/4b$ 影响了孤波的传输速度和相互作用情况. 当 b 和 S_1 的取值使孤波对具有较大频移时, 两亮孤波具有较大的传输速度, 并表

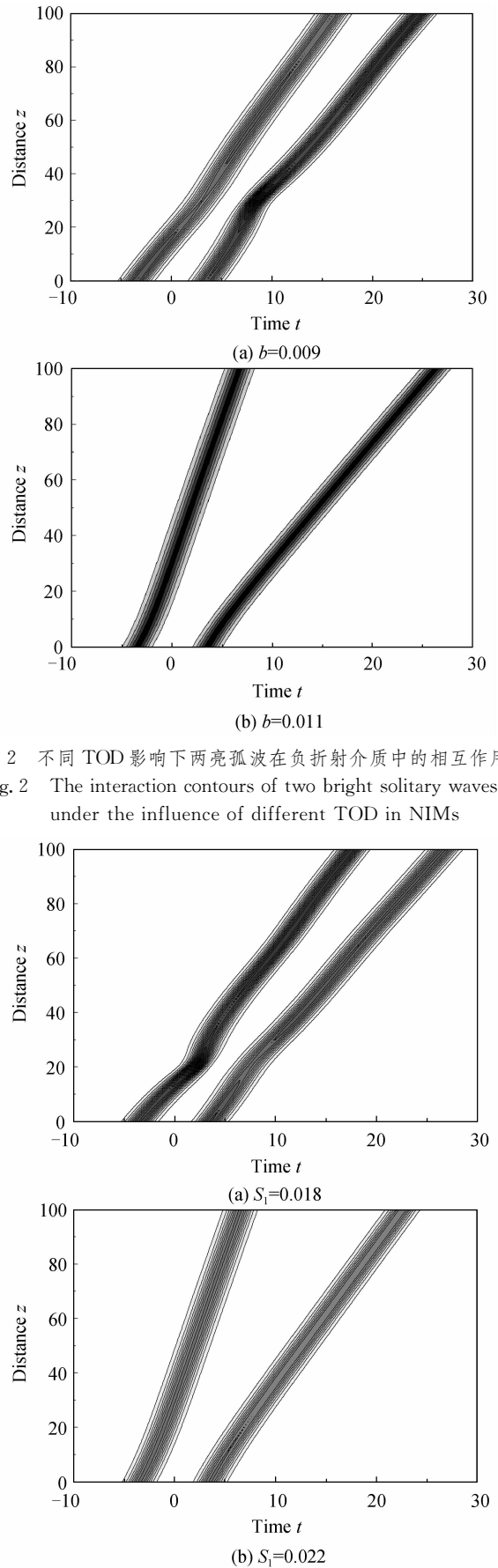


图 2 不同 TOD 影响下两亮孤波在负折射介质中的相互作用
Fig. 2 The interaction contours of two bright solitary waves under the influence of different TOD in NIMs

图 3 不同 SS 影响下两亮孤波在负折射介质中的相互作用
Fig. 3 The interaction contours of two bright solitary waves under the influence of different SS in NIMs

现为相互排斥。 b 和 S_1 不同, 频移 Ω 不同, 孤波的传输速度和孤波的相位就不同, 而孤波的相位会影响孤波间的相互作用^[15]. 利用负折射介质可调控的色散和非线性特性, 可以选取负折射介质中不同的三阶色散和自陡峭系数来抑制亮孤波间的相互作用, 如图 2(a) 中 $b=0.009$, $S_1=0.02$ 时, 两亮孤波间的相互作用得到了较好的抑制。

2.2 两个暗孤波间的相互作用

常规介质中暗孤波间的相互作用呈现相互排斥, 孤波间距越小, 相互作用越强^[17]. 本文通过数值模拟研究在负折射介质中的暗孤波相互作用. 图 4 和图 5 分别给出了在相同初始间距下, 负折射介质中三阶色散和自陡峭影响下两暗孤波间的相互作用情况。

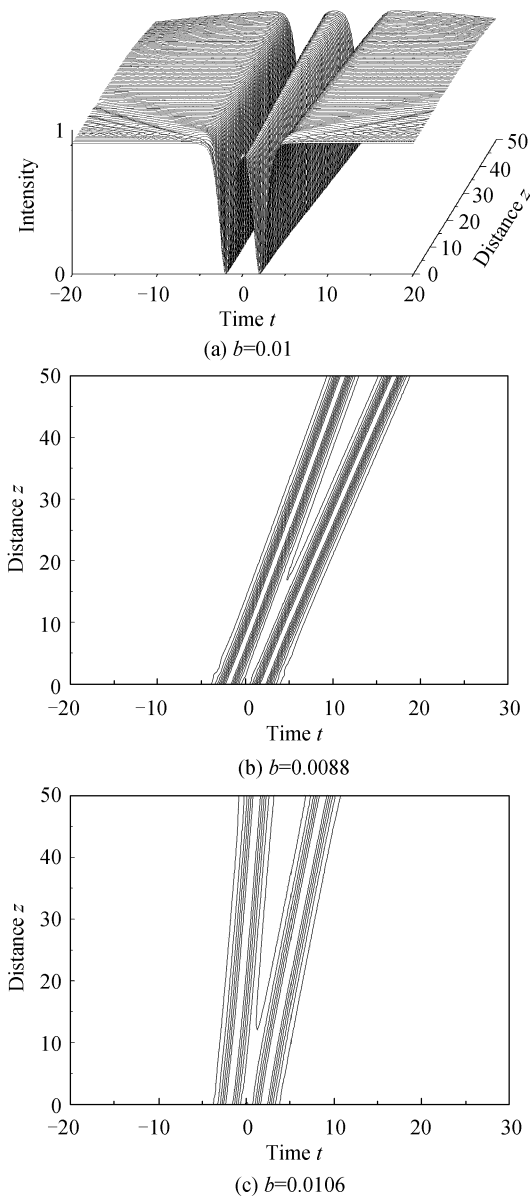


图 4 不同 TOD 影响下两暗孤波在负折射介质中的相互作用
Fig. 4 The interactions of two dark solitary waves under the influence of different TOD in NIMs

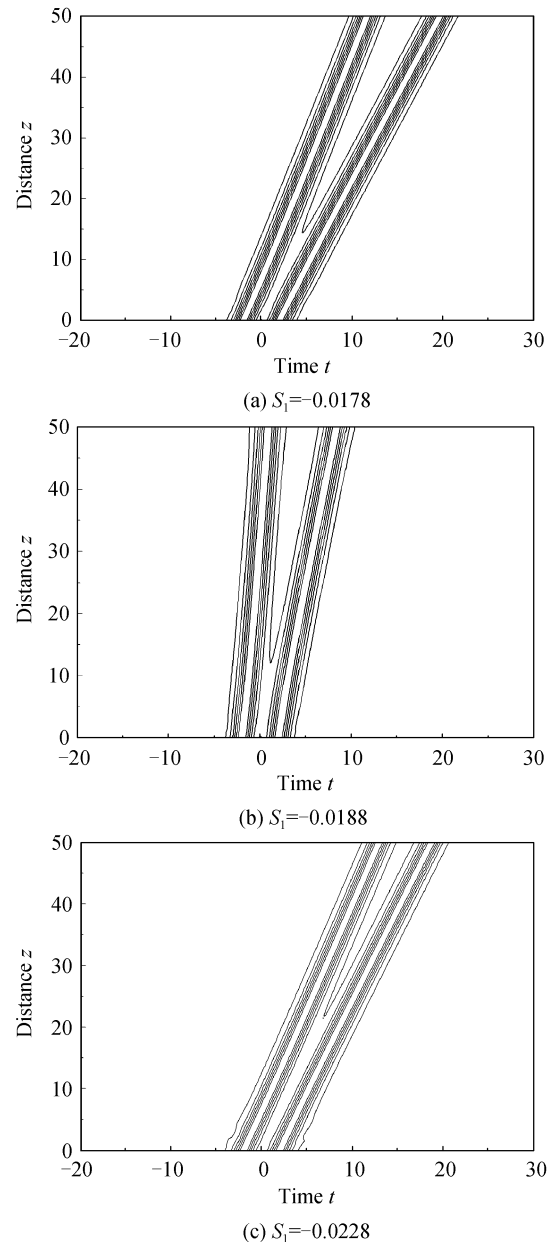


图 5 不同 SS 影响下两暗孤波在负折射介质中的相互作用
Fig. 5 The interaction contours of two dark solitary waves under the influence of different SS in NIMs

从图 4(a) 可以看出, 当 $t_0=2$, $S_1=-2b$ 时, 初始输入的两暗孤波的频移 $\Omega=0$, 两暗孤波在传输过程中相互排斥, 其相互作用情况非常类似于常规介质的情形^[17]. 当 $S_1 \neq -2b$ 时, 孤波的初始频移 $\Omega \neq 0$, 在不同的三阶色散下, 两暗孤波以不同的速度传输, 表现为不同程度的排斥作用, 如图 4(b) 和 (c). 当 $S_1 \neq -2b$ 时, 自陡峭效应对暗孤波间的相互作用的影响与三阶色散的影响类似, 不同的自陡峭系数对暗孤波对的传输速度和相互作用都产生明显的影响, 如图 5. 比较图 5 中三组参量下暗孤波相互作用情况, 可以看出, 当选取 $b=0.01$, $S_1=-0.0228$ 时, 暗孤波间的相互作用相对较小, 见图 5(c). 大量的数值模拟发现, 当 $S_1 \neq -2b$, 三阶色散和自陡峭的

影响下两暗孤波间的相互作用总体表现为相互排斥,排斥的程度与三阶色散和自陡峭效应的取值有关,通过选取合适的三阶色散和自陡峭参量,也可在一定程度上减小或抑制暗孤波间的相互作用。

3 结论

基于描述负折射介质中超短脉冲传输的归一化非线性薛定谔方程,本文采用分步傅里叶算法对负折射介质中的亮孤波和暗孤波间的相互作用进行了详细研究.结果表明:当三阶色散和自陡峭参量取值满足 $S_1 = 2b$ 时,输入的亮孤波初始频移为零,两亮孤波间的相互作用情况与常规介质的情况类似,两亮孤波首先表现为相互碰撞而后强烈排斥;当 $S_1 \neq 2b$,三阶色散和自陡峭系数的取值使亮孤波具有非零的频移,不同的三阶色散和自陡峭效应使两亮孤波以不同的速度传输和相互作用,两亮孤波不再发生碰撞,整体表现为排斥形式.负折射介质中暗孤波的相互作用与亮孤波类似,不同的三阶色散和自陡峭效应对暗孤波的传输速度和相互作用有不同程度的影响.该研究结果表明,通过选取负折射介质中三阶色散和自陡峭参量达到减小或抑制孤波间相互作用的目的.该研究结果为负折射介质在未来高速通信中的应用提供了理论依据。

参考文献

- [1] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(18): 3966-3969.
- [2] SMITH D R, PADILLA W J, VIER D C, *et al.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **84**(18): 4184-4187.
- [3] REED E J, SOLJACIC M, JOANNOPOULOS J D. Reversed doppler effect in photonic crystals [J]. *Physical Review Letters*, 2003, **91**(13): 3901-3904.
- [4] LUOCY, IBANESCU M, JOHNSON S G, *et al.* Cerenkov radiation in photonic crystals[J]. *Science*, 2003, **299**(5606): 368-371.
- [5] PARAZZOLI C G, GREGOR R B, LI K, *et al.* Experimental verification and simulation of negative index of refraction using snell's law [J]. *Physical Review Letters*, 2003, **90**(10): 107401.
- [6] YU A, YANG F, ELSHERBENI A. A dual-band circularly polarized ring antenna based on composite right and left handed metamaterials[J]. *Progress In Electromagnetics Research*, 2008, **78**: 73-81.
- [7] ALLEN C A, LEONG K M K H, ITOH T. Design of microstrip resonators using balanced and unbalanced composite right/left-handed transmission lines[J]. *IEEE Transactions on. Microwave Theory and Techniques*, 2006, **54**(7): 3104-3112.
- [8] LAZARIDES N, TSIRONIS G P. Coupled nonlinear Schrödinger field equations for electromagnetic wave propagation in nonlinear left-handed materials [J]. *Physical Review E*, 2005, **71**(3): 6614-6617.
- [9] SCALORA M, SYRCHIN M S, AKOZBEK N, *et al.* Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: Application to negative index materials[J]. *Physical Review Letter*, 2005, **95**(1): 3902-3905.
- [10] LI Peng-gang, ZHANG Yu, YANG Rong-cao. Propagation of bright solitons in metamaterials under higher-order effects [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2010, **16**(2): 119-126. 李鹏刚,张宇,杨荣草. 高阶效应影响下亮孤子在超常介质中的传输特性[J]. *量子光学学报*, 2010, **16**(2): 119-126.
- [11] LIU Hai-lan, WEN Shuang-chun, XIONG Min, *et al.* Formation and propagation of dark solitons in metamaterials [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(11): 6473-6479. 刘海兰,文双春,熊敏,等. 超常介质中暗孤子的形成和传输特性研究[J]. *物理学报*, 2007, **56**(11): 6473-6479.
- [12] LI Peng-gang, YANG Rong-cao, ZHANG Yu. Gray solitary-wave solutions in nonlinear negative-index materials [J]. *Physical Review E*, 2010, **82**(4): 6603-6609.
- [13] XIANG Yun-jiang, WEN Shuang-chun, DAI Xiao-yu, *et al.* Modulation instability induced by nonlinear dispersion in metamaterials[J]. *Journal of Optical Society America B*, 2007, **24**(12): 3058-3063.
- [14] TSITSAS N L, ROMPOTIS N, KOURAKIS I, *et al.* Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials[J]. *Physical Review E*, 2009, **79**(3): 7601-7603.
- [15] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optics [M]. San Diego, CA: Academic Press, 2001.
- [16] TIAN Hui-ping, LI Zhong-hao, WANG Gang, *et al.* Numerical research of interaction between femtosecond optical pulses[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(5): 513-517. 田慧平,李仲豪,王钢,等. 飞秒光脉冲间相互作用的数值研究[J]. *光学学报*, 2001, **21**(5): 513-517.
- [17] WANG Tao, TIAN Hui-ping, LI Zhong-hao, *et al.* Numerical research of interactions between femosecond dark solitons[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(6): 680-683. 王涛,田慧平,李仲豪,等. 飞秒暗孤子间相互作用的数值研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(6): 680-68.

Research on Interactions Between Solitary Waves in Negative-index Materials

CHEN Cheng, DONG Jia, YANG Rong-cao

(College of Physics & Electronics Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Based on the higher-order nonlinear Schrödinger equation describing the propagation of ultrashort pulses in negative-index materials, the interactions of bright and dark solitary waves in negative-index materials are studied using symmetrical Split-step Fourier method, respectively. Lots of numerical results show that when initial frequency shift is zero, the interactions between bright solitary waves are similar to those of bright solitons in conventional materials; when initial frequency shift is nonzero, the transmission speed and interactions are influenced by the third-order dispersion and the self-steepening effects. While the interactions between dark solitary waves are similar to those of dark solitary waves in conventional materials behaving repulsion each other under the influence of the third-order dispersion and the self-steepening effects whether initial frequency shift is zero or not. The results show that the interactions of bright and dark solitary waves in negative-index materials may be suppressed to some extent. The obtained results provide a theoretical basis for the applications of negative-index materials in future high-speed communication.

Key words: Negative-index materials; Bright solitary waves; Dark solitary waves; Interactions