

doi:10.3788/gzxb20124112.1474

# 基于六角形晶格的光子晶体零折射率特性及其光学应用研究

程星亮,程丽彬,豆振领,张冠茂

(兰州大学 信息科学与工程学院 现代通信技术研究所,兰州 730000)

**摘 要:**运用色散特性分析的方法,在六角形晶格光子晶体能带结构的布里渊区中心找到了狄拉克点,用等效媒质理论验证了在这点上光子晶体的等效介电常量和等效磁导率同时为零,即存在狄拉克频点,用此六角形晶格光子晶体可以实现零折射率材料.随后运用有限元数值仿真方法,研究了此六角形晶格结构在狄拉克频点及其附近所呈现的零折射率特性.将此种六角形晶格光子晶体经过合理设计用以制作凹透镜,发现可以实现远场的亚波长聚焦.此外在凹透镜的入射面处引入反射结构可以在一定程度上增强聚焦效果,提高了系统的分辨率.

**关键词:**六角形晶格光子晶体;狄拉克点;零折射率;凹透镜;亚波长聚焦

**中图分类号:** TN929.1;O73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2012)12-1474-5

## 0 引言

近些年来,由于对石墨烯能带结构的分析研究<sup>[1-2]</sup>,狄拉克点的概念被广泛地提及.在这些点处,石墨烯的电子能带结构在布里渊区边缘处的  $K$  点呈现锥形分布的奇异性,这些点周围的电子态运动具有线性的色散关系,对其可以用描述相对论粒子特性的狄拉克方程来加以研究.相关研究表明,导致在能带结构中出现锥形奇异性的直接原因是晶格结构的对称性,因此这种奇异性不仅仅存在于电子态的结构中.事实上,相似的狄拉克点在光子晶体的光子能带结构中也已经发现,S. Raghu 和 F. D. M. Haldane 已经指出在光子晶体能带结构的  $K$  点存在着类似于石墨烯能带结构中的狄拉克点分布<sup>[3]</sup>.由于光子晶体中狄拉克点的存在,使得在电子态下由于此种色散关系所呈现的许多有趣的现象在光子晶体中的探讨成为了可能,例如异常的量子霍尔效应、安德森定域缺失和狄拉克点处的极值透射等<sup>[4-5]</sup>.2011年,X. Q. Huang 研究小组发现在由正方形晶格形成的二维光子晶体能带结构中,光子带隙在其能带结构布里渊区中心变得很窄,几乎消失,两个能带相交成锥状,这样形成的锥形奇异点也被称作狄拉克点<sup>[6]</sup>.除此之外,一个额外的平带穿过狄拉克点形成一个三重简并点,把这个三重简并点叫

做由随机简并诱导的狄拉克点(Accidental-degeneracy-induced Dirac point, ADIDP),并在理论和实验上同时证明了通过合理地设置光子晶体的结构参量,在其能带结构布里渊区的中心可以出现 ADIDP.同时,在这一点所对应的频率处,该结构的等效介电常量和等效磁导率将同时为零,因此应用该结构的光子晶体可以用来实现零折射率材料.

在过去的若干年内,由于具有特别的波操纵特性,零折射率材料已被广泛地加以分析研究<sup>[7-10]</sup>.在处于稳定态时,电磁波通过这种材料时其相位在空间将不会发生变化<sup>[8]</sup>.关于零折射率材料操纵波传播特性的理论已经被广泛研究,并且在原理上这种材料可以由包含金属谐振器或手性填充物的人造复合材料来加以实现<sup>[11-12]</sup>.由 X. Q. Huang 研究小组提出的通过用光子晶体实现零折射率材料的研究工作为获得零折射率材料提供了一种新的实现方法<sup>[6]</sup>.在该文献中,从理论和实验上已经对正方形晶格光子晶体的零折射率特性做了研究,包括其波导、隐身和聚焦特性,并且提及六角形晶格也可以用来实现零折射率材料.因为平面波通过零折射率材料时其相位几乎不发生改变,因此可以用零折射率材料制作的凹透镜来实现聚焦<sup>[7]</sup>.

透镜是光学研究中最基本的元件之一,它在光学显微镜、高密度光数据存储、光刻等应用中发挥着

**基金项目:**兰州大学中央高校基本科研业务费专项资金(No. lzujbky-2012-40)资助

**第一作者:**程星亮(1987-),女,硕士研究生,主要研究方向为微纳光子晶体及表面等离子体器件设计与应用. Email: chengxingliang927@163.com

**导师(通讯作者):**张冠茂(1973-),男,副教授,博士,主要研究方向为光通信、光传感、微纳光子晶体以及光域表面等离子体共振理论与应用. Email: zhanggm@lzu.edu.cn

**收稿日期:**2012-06-13;**修回日期:**2012-08-06

重要的作用. 因此, 在光学透镜实现及其性能的改善方面已经有人做了大量的理论和实验研究<sup>[13-15]</sup>. J. B. Pendry 在 2002 年就提出可以用一块由负折射率材料构成的平板来实现“Perfect lens”即完美透镜, 这种由负折射率材料制作的透镜可以放大场的倏逝波, 可以重现物体被损失的信息<sup>[16]</sup>. 随后, 其它类型结构的透镜亦先后被提出<sup>[17-22]</sup>, 它们可以突破衍射极限以实现更高的成像分辨率.

本文分析研究了按六角形晶格排列的由电介质柱构成的光子晶体结构. 通过色散特性分析在其能带结构布里渊区的中心找到了 ADIDP 点, 利用等效媒质理论<sup>[23]</sup> 确定了在该点处此六角形晶格结构的等效介电常量和等效磁导率同时为零. 基于此用六角形晶格光子晶体经适当设计制作的凹透镜, 在 ADIDP 频率及其附近, 实现了远场的亚波长聚焦. 在此基础上, 进一步研究了在透镜的入射面一侧引入防反射结构以提高透镜的聚焦性能, 同时给出了防反射结构距离以及介质柱半径变化对此凹透镜聚焦特性影响的计算关系, 得到了系统的优化设计参量.

## 1 六角形晶格光子晶体零折射率的理论分析

用光子晶体实现零折射率材料需要具备两个基本条件<sup>[6]</sup>. 首先, 在能带结构中  $\Gamma$  点出现狄拉克锥色散是必须的. 其次, 只有满足了等效媒质理论, 光子晶体才能被映射为  $\epsilon_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} = 0$  的系统. 文献<sup>[6]</sup> 用多散射理论建立了在  $\Gamma$  点存在 ADIDP 的条件. 在本文中, 六角形晶格光子晶体的参量给出如下, 圆柱体的相对介电常量  $\epsilon_r = 12.5$ , 介质柱的半径  $r = 0.184a$ , 其中  $a$  为晶格常量<sup>[6]</sup>. 在此计算中仅考虑 TM 模式, 即电场分量  $E_z$  平行于这些介质柱. 运用色散特性分析方法计算得到的光子能带结构分布如图 1, 在归一化频率  $\omega_D = (\omega a)/(2\pi c) = 0.589$  处, 其中  $\omega$  为角频率,  $c$  代表在自由空间的光速, 可以看

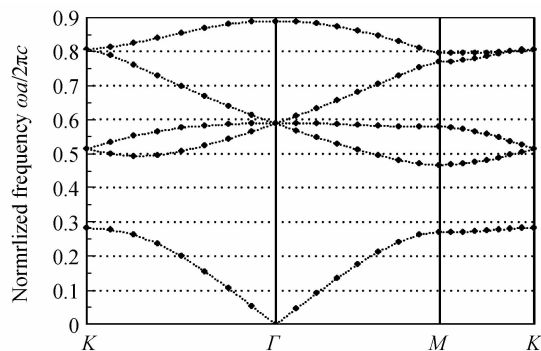


图 1 二维六角形晶格光子晶体能带结构分布  
Fig. 1 The band structure of the two-dimensional photonic crystal with hexagonal lattice

到在  $\Gamma$  点存在一个三重简并点, 即由两个具有线性色散的能带相交而形成的狄拉克锥, 此外还存在一个平带亦穿过狄拉克点.

为了满足将图 1 所对应的光子晶体结构等效为零折射率系统的第二个条件, 在此可以应用等效媒质理论来讨论此六角形晶格. 由文献<sup>[23]</sup> 给出的等效折射率  $\epsilon_{\text{eff}}$  和等效磁导率  $\mu_{\text{eff}}$  的计算关系为

$$\frac{\epsilon_{\text{eff}}(\omega) + 2\epsilon_0 \frac{J'_0(k_0 r_0)}{k_0 r_0 J_0(k_0 r_0)}}{\epsilon_{\text{eff}}(\omega) + 2\epsilon_0 \frac{Y'_0(k_0 r_0)}{k_0 r_0 Y_0(k_0 r_0)}} = \frac{Y_0(k_0 r_0)}{iJ_0(k_0 r_0)} \left[ \frac{D_0(\omega)}{1 + D_0(\omega)} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\mu_{\text{eff}}(\omega) - \mu_0 \frac{J_1(k_0 r_0)}{k_0 r_0 J'_1(k_0 r_0)}}{\mu_{\text{eff}}(\omega) - \mu_0 \frac{Y_1(k_0 r_0)}{k_0 r_0 Y'_1(k_0 r_0)}} = \frac{Y'_1(k_0 r_0)}{iJ'_1(k_0 r_0)} \left[ \frac{D_1(\omega)}{1 + D_1(\omega)} \right] \quad (2)$$

式中  $\omega$  为电磁波的角频率,  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  为电磁波在真空中的传播波数,  $D_m$  则表示米氏散射系数, 其表达式如下所示(其中  $m$  值取为 1 或 0)

$$D_m = [\mu_0 k_s J'_m(k_s r_s) J_m(k_0 r_s) - \mu_s k_0 J_m(k_s r_s) \cdot J'_m(k_0 r_s)] / [\mu_s k_0 J_m(k_s r_s) H_m^{(1)'}(k_0 r_s) - \mu_0 k_s J'_m(k_s r_s) H_m^{(1)}(k_0 r_s)] \quad (3)$$

这里  $r_s$  代表介质柱的半径,  $(r_s/r_0)^2$  为介质柱在空气中的填充率,  $k_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s}$ ,  $\epsilon_s$  和  $\mu_s$  分别为介质柱的介电常量和磁导率. 分析计算可得由此六角形晶格形成的光子晶体材料的等效介电常量 ( $\epsilon_{\text{eff}}$ ) 和等效磁导率 ( $\mu_{\text{eff}}$ ) 与归一化频率  $\omega a/2\pi c$  之间的变化关系曲线如图 2.

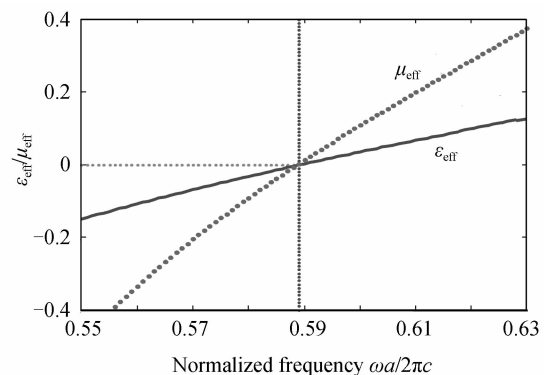


图 2 等效媒质理论分析六角形晶格的等效介电常量和等效磁导率与归一化频率变化关系曲线  
Fig. 2 The effective permittivity  $\epsilon_{\text{eff}}$  and permeability  $\mu_{\text{eff}}$  as the function of the normalized frequency of the hexagonal lattice obtained by using the effective medium theory

由图中曲线可以看出, 在狄拉克频  $\omega_D = 0.589$  处, 等效介电常量  $\epsilon_{\text{eff}}$  和等效磁导率  $\mu_{\text{eff}}$  的取值同时为零. 因此在上述参量下, 六角形晶格光子晶体在狄拉克频点处可以视为  $\epsilon_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} = 0$  的零折射率介质材料.

## 2 数值仿真分析

由前述理论分析可知,通过合理地设置六角形晶格光子晶体的结构参量,可以将其等效为零折射率系统.下面就利用有限元方法(Finite Element Method, FEM)对此结构的六角形晶格光子晶体结构进行数值仿真研究.由于该结构中沿着 $\Gamma-M$ 方向的模式为非耦合的布洛赫模式,因此在下面的仿真分析中入射平面波应沿着垂直于光子晶体的 $\Gamma-K$ 方向入射<sup>[24]</sup>.作为对照,图3(a)的计算结果为平面波通过理想的均匀零折射率材料传播的情形.可见,在稳态时,零折射率材料中的电磁场在空间分布上不会发生相位的改变<sup>[8]</sup>.若将均匀的零折射率材料用六角形晶格的光子晶体材料代替,其仿真计算所得场图如图3(b)所示.在仿真分析中,入射平面波的归一化频率取为0.589,仿真结构的边界采用理想磁导体(Perfect Magnetic Conductor, PMC).由该计算结果可以看出,当平面波通过该六角形晶格光子晶体时其相位几乎保持不变.此外,当入射平面波的频率在狄拉克频点附近时其相位也同样保持不变.因此,在狄拉克频点及其附近,六角形晶格的光子晶体结构可以等效为一种零折射率的材料.

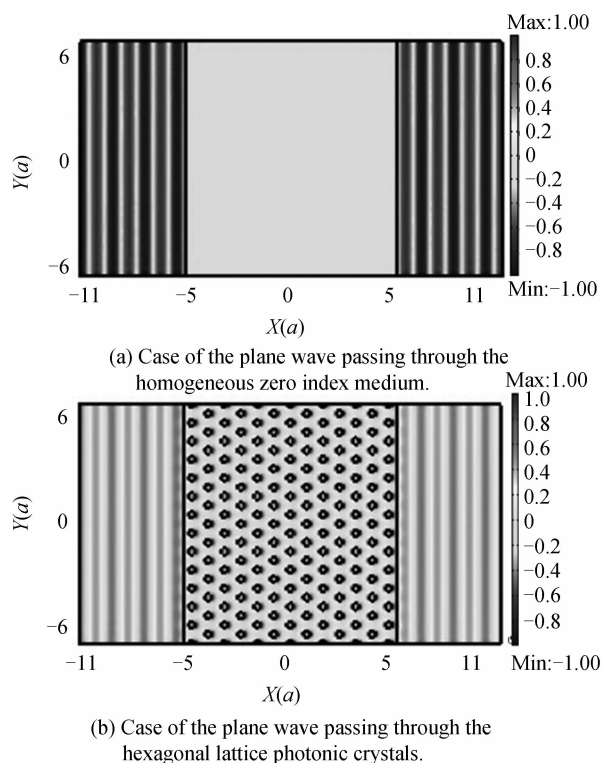


图3 平面波在理想零折射率材料和六角形晶格光子晶体中传播保持相位不变性仿真结果  
Fig. 3 Simulations demonstrating that the plane wave passing through the zero index material and the hexagonal lattice photonic crystals can keep the phase invariability  
接下来,在狄拉克频点附近,通过仿真分析研究

用六角形晶格光子晶体实现的凹透镜的聚焦特性.因为平面波通过零折射率材料时相位不发生改变,因此可以用零折射率材料制作的凹透镜来实现聚焦<sup>[7]</sup>.通过前面的分析可以知道,图1对应的六角形晶格光子晶体结构在其狄拉克频点附近可以等效为零折射率材料,因此,我们用六角形晶格的光子晶体代替零折射率材料来实现凹透镜,并通过仿真的方法来研究其聚焦性能.在仿真分析中,不妨取晶格的大小 $a=311\text{ nm}$ ,因此介质柱的半径 $r=0.184 \times a=57.2\text{ nm}$ .由六角形晶格光子晶体构成的凹透镜的部分结构如图4(a)所示,当入射波频率位于狄拉克频点及其附近时,在凹透镜的另一侧就会出现一个入射光波的聚焦点,如图4(b)所示.在仿真过程中使用了吸收边界条件,取入射波的归一化工作频率 $\omega_D=0.586$ ,对应的工作波长为 $\lambda=532\text{ nm}$ ,此时焦点的半高全宽(Full-Width-Half-Maximum, FWHM)为 $0.508\lambda$ .现定义焦点与凹透镜最外侧边沿的垂直距离为焦距,如图4(b)所示,其值可以达到 $4.44\lambda$ ,由此计算结果可知,六角形晶格光子晶体构造的凹透镜可以实现远场的亚波长聚焦.

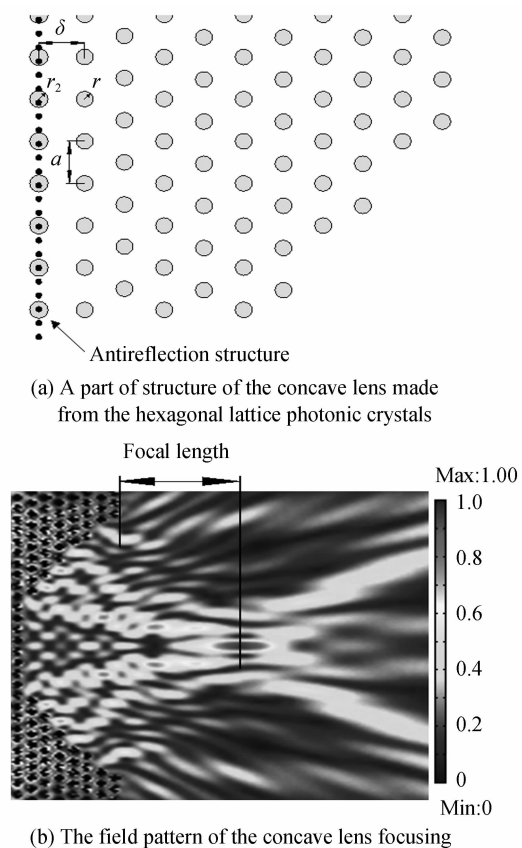


图4 基于六角形晶格光子晶体的凹透镜的聚焦特性  
Fig. 4 Focusing simulation of the concave lens made from the hexagonal lattice photonic crystals

为了进一步提高聚焦效果,如同文献<sup>[25]</sup>所述,可以在凹透镜入射界面处引入防反射结构,如图4(a)所示.在此,取半径都为 $r_2$ 且相对介电常量 $\epsilon_r=$

12.5 的介质柱放置于凹透镜入射面作为防反射结构,  $\delta$  为防反射结构到凹透镜的垂直距离。

首先取  $r_2 = 0.2a$  不变, 通过改变  $\delta$  的取值, 来研究  $\delta$  取值的变化对聚焦效果的影响。当  $\delta$  值以  $0.05a$  的间隔从  $0.7a$  增大到  $1.3a$  过程中, 其值的改变对焦点处场的半高全宽和焦距的影响如图 5 曲线所示, 图中正方形表示 FWHM, 三角形代表焦距。

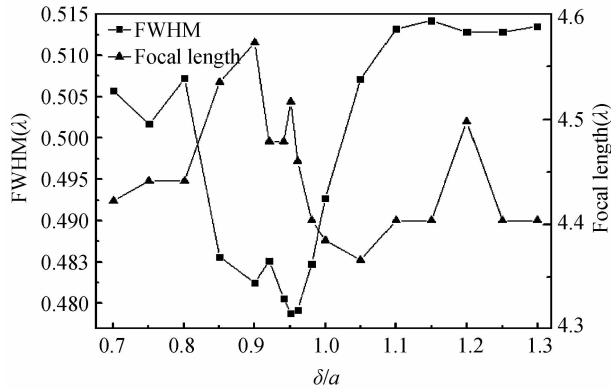


图 5 防反射结构距离  $\delta$  对六角形晶格光子晶体凹透镜的 FWHM 和焦距影响的变化曲线

Fig. 5 The influence of  $\delta$  on the FWHM and Focal length of the concave lens made from the hexagonal lattice photonic crystals when  $r_2 = 0.2a$

由图 5 可以看出, 当  $\delta = 0.95a$  时, 焦点处的 FWHM 可以取得最小值为  $0.479\lambda$ , 此时的焦距值为  $4.517\lambda$ 。为了进一步验证此凹透镜的 FWHM 在  $\delta = 0.95a$  时取得最小的值, 我们在  $\delta = 0.95a$  附近取  $0.92a$ 、 $0.94a$ 、 $0.96a$  和  $0.98a$ , 如图 5 所示, 在这些点处的 FWHM 都大于  $0.479\lambda$ , 因此, 在  $\delta = 0.95a$  时, 此凹透镜能够取得最佳的聚焦效果。

若保持  $\delta = 0.95a$  不变, 改变构成防反射结构的介质柱的半径  $r_2$ , 让  $r_2$  从  $0.15a$  到  $0.45a$  以  $0.05a$  为间隔变化, 可得焦点处的 FWHM 和焦距随防反射结构介质柱的半径变化的关系曲线如图 6 所示。

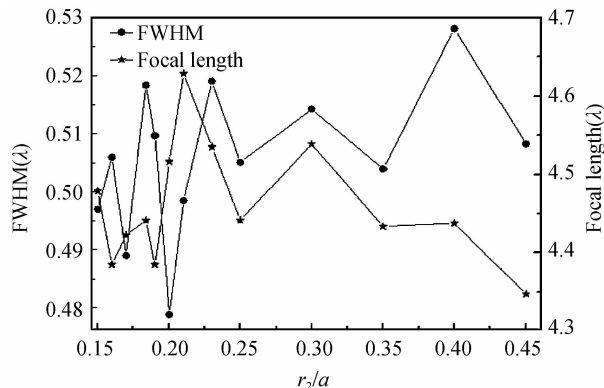


图 6  $\delta = 0.95a$  时 FWHM 和焦距随防反射结构介质柱半径  $r_2$  的变化曲线

Fig. 6 The influence of  $r_2$  on the FWHM and the focal length when  $\delta = 0.95a$

由图可以看出, 当  $r_2 = 0.2a$  时, FWHM 取得较

小的值, 当  $r_2$  取  $0.2a$  附近的值  $0.17a$ 、 $0.184a$ 、 $0.19a$ 、 $0.21a$  和  $0.23a$  时, 对应的 FWHM 值如图 6 所示都大于  $0.479$ 。由此可知, 当  $r_2 = 0.2a$  且  $\delta = 0.95a$  时, 此凹透镜可以取得最佳的聚焦效果, 其焦距也可以取得较大的值。对应此优化参量的凹透镜的聚焦场图如图 7 所示。

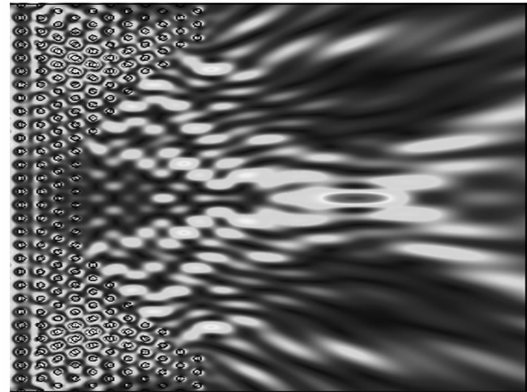


图 7  $r_2 = 0.2a$  且  $\delta = 0.95a$  时六角形晶格光子晶体构成的凹透镜聚焦场图分布

Fig. 7 The field pattern of the concave lens made from the hexagonal lattice photonic crystals when  $r_2 = 0.2a$  and  $\delta = 0.95a$

由上面的分析结果可知, 通过合理地设置六角形晶格光子晶体的结构参量, 可以将其等效为零折射率材料, 从而设计制作出使用六角形晶格光子晶体的凹透镜来实现光学聚焦。该结果亦同时表明, 在凹透镜入射面处引入适当的防反射结构能够有效地提高凹透镜的聚焦性能, 可以显著地改善远场的亚波长聚焦效果。

### 3 结论

本文运用色散特性分析的方法在六角形晶格光子晶体能带结构布里渊区的中心找到了狄拉克点, 并用等效媒质理论证明在这一点处光子晶体的等效介电常量和等效磁导率同时为零, 即可用此结构的光子晶体实现零折射率材料。通过数值仿真的方法研究了六角形晶格光子晶体的零折射率特性, 并基于此特性设计了凹透镜结构。仿真分析结果表明, 由此六角形晶格光子晶体构成的凹透镜可以实现远场的亚波长聚焦。此外, 通过在凹透镜入射端引入防反射结构, 可以在一定程度上提高其聚焦性能, 减小焦点处的 FWHM 和增大焦距。研究发现, 引入防反射结构后, 在归一化频率  $\omega_D = 0.586$  下, 若取  $r_2 = 0.2a$  且  $\delta = 0.95a$  时, 在焦点处的 FWHM 可以达到极小值  $0.479\lambda$ , 对应的焦距值则为  $4.517\lambda$ 。这种可以实现零折射率材料特性的六角形晶格光子晶体, 由于其仅由电介质材料构成, 因此在光学系统设计中具有一定的潜在的工程应用价值。

## 参考文献

- [1] NOVOSELOV K S, GEIM A K, MOROZOV S V, *et al.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene [J]. *Nature*, 2005, **438**(7065): 197-200.
- [2] ZHANG Y B, TAN Y W, STORMER H L, *et al.* Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene[J]. *Nature*, 2005, **438**(7065): 201-204.
- [3] RAGHU S, HALDANE F D M. Analogs of quantum-Hall-effect edge states in photonic crystals[J]. *Physical Review A*, 2008, **78**(3): 033834-1-033834-21.
- [4] GEIM A K, NOVOSELOV K S. The rise of graphene[J]. *Nature Materials*, 2007, **6**(3): 183-191.
- [5] SEPKHANOV R A, BAZALIY Y B, BEENAKKER C W J. Extremal transmission at the Dirac point of a photonic band structure[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(6): 063813-1-063813-5.
- [6] HUANG X Q, LAI Y, HANG Z H, *et al.* Dirac cones induced by accidental degeneracy in photonic crystals and zero-refractive-index materials[J]. *Nature Materials*, 2011, **10**(8): 582-586.
- [7] ALU A, SILVEIRINHA M G, SALANDRINO A, *et al.* Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation phase pattern[J]. *Physical Review B*, 2007, **75**(15): 155410-1-155410-13.
- [8] HAO J M, YAN W, QIU M. Super-reflection and cloaking based on zero index metamaterial [J]. *Physical Review Letters*, 2010, **96**(10): 101109-1-101109-3.
- [9] JIANG H T, XU X H, WANG Z L, *et al.* Position-independent normal-mode splitting in cavities filled with zero-index metamaterials[J]. *Optics Express*, 2012, **20**(6): 6348-6356.
- [10] CHENG Q, JIANG W X, CUI T J, *et al.* Spatial power combination for omnidirectional radiation via anisotropic metamaterials[J]. *Physical Review Letters*, 2012, **108**(21): 213903-1-213903-5.
- [11] LIU R, CHENG Q, HAND T, *et al.* Experimental demonstration of electromagnetic tunneling through an epsilon-near-zero metamaterial at microwave frequencies[J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(2): 023903-1-023903-4.
- [12] TRETYAKOV S, NEFEDOV I, SIHVOLA A, *et al.* Waves and energy in chiral nihility[J]. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2003, **17**(5): 695-706.
- [13] TERRIS B D, MAMIN H J, RUGAR D, *et al.* Near-field optical data storage using a solid immersion lens[J]. *Applied Physics Letters*, 1994, **65**(4): 388-390.
- [14] GHISLAIN L P, ELINGS V B, CROZIER K B, *et al.* Near-field photolithography with a solid immersion lens [J]. *Applied Physics Letters*, 1999, **74**(4): 501-503.
- [15] MA C B, LIU Z W. Focusing light into deep subwavelength using metamaterial immersion lenses [J]. *Optics Express*, 2010, **18**(5): 4838-4844.
- [16] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(18): 3966-3969.
- [17] HU X H, CHAN C T. Photonic crystals with silver nanowires as a near-infrared superlens[J]. *Applied Physics Letters*, 2004, **85**(9): 1520-1523.
- [18] FANG N, LEE H, SUN C, *et al.* Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens[J]. *Science*, 2005, **308**(5721): 534-537.
- [19] TAUBNER T, KOROBIKIN D, URZHUMOV Y, *et al.* Near-field microscopy through a SiC superlens[J]. *Science*, 2006, **313**(5793): 1595-1595.
- [20] YAN Ai-min, LIU Li-ren, LIU De-an. Design and application of volume holographic grating lenses[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(2): 280-283.  
闫爱民, 刘立人, 刘德安. 体全息光栅透镜的设计和应用[J]. *光子学报*, 2005, **34**(2): 280-283.
- [21] YANG Cheng-fu, YANG Jing-jing, HUANG Ming, *et al.* Design of the elliptical electromagnetic wave concentrator using meta materials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(7): 1023-1027.  
杨成福, 杨晶晶, 黄铭, 等. 基于超材料的椭圆形电磁波聚焦器设计[J]. *光子学报*, 2010, **39**(7): 1023-1027.
- [22] HAN Yan-ling, LIU De-sen, JIANG Xiao-ping. Square self-focusing lens array and its image [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(2): 221-223.  
韩艳玲, 刘德森, 蒋小平. 方形自聚焦透镜元阵列及其成像[J]. *光子学报*, 2007, **36**(2): 221-223.
- [23] WU Y, LI J, ZHANG Z Q, *et al.* Effective medium theory for magnetodielectric composites: Beyond the long-wavelength limit [J]. *Physical Review B*, 2006, **74**(8): 085111-1-085111-9.
- [24] SAKODA K. Optical properties of photonic crystals[M]. 2nd ed. Berlin: Springer series in optical sciences, 2005.
- [25] LEE S G, CHOI J S, KIM J E, *et al.* Reflection minimization at two-dimensional photonic crystal interfaces [J]. *Optics Express*, 2008, **16**(6): 4270-4277.

## Zero Index Characteristic of Hexagonal Lattice Photonic Crystals and Its Optical Application

CHENG Xing-liang, CHENG Li-bin, DOU Zhen-ling, ZHANG Guan-mao

(Institute of Modern Communication Technology, School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Based on the method of dispersion characteristics analysis, the Dirac point was found at the center of the Brillion zone in the band structure of the hexagonal lattice photonic crystals, and the phenomenon that both the effective permittivity and permeability approach zero simultaneously at the Dirac point was verified by using the effective medium theory, so that the zero index material can be achieved by the hexagonal lattice photonic crystals at that point. Then, by using the finite element method to perform the numerical simulation, the zero index characteristic presented at or near the Dirac point of the hexagonal lattice photonic crystals was studied. In addition, by designing the concave lens which is made from the hexagonal lattice photonic crystals properly, the results of the sub-wavelength and far-field focusing can be obtained. It is useful to improve the focusing by introducing an antireflection structure to the incident interface of the concave lens, and can improve the effect of focusing and increase the resolution to some extent.

**Key words:** Hexagonal lattice photonic crystal; Dirac point; Zero index; Concave lens; Sub-wavelength focusing