

doi:10.3788/gzxb20124112.1394

# 光子四维量子态隐形传输

陆晨, 张炜, 刘欢, 贾蕾, 田秀劳

(西安邮电大学 理学院, 西安 710061)

**摘 要:** 多维量子纠缠态比二维纠缠态可加载更多的信息, 多维量子系统是量子信息处理中一个很重要的资源. 本文采用已实现的光子四维纠缠态, 给出了光子四维量子态的张量表达式, 并描述了四维量子态隐形传输的一般表示方法; 通过讨论光子四维量子态系统的量子通道参数矩阵和测量矩阵的特性, 得到实现完全传输和非零概率传输的充要条件. 最后, 本文给出在多种量子通道下的四维态的量子隐形传态方案, 这一过程在张量分析表示下十分清晰明了.

**关键词:** 隐形传态; 四维态; 通道参数矩阵; 测量矩阵

**中图分类号:** O437.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2012)12-1394-6

## 0 引言

量子通信具有巨大的优越性, 已成为国内外研究的热点. 1935 年, Einstein、Podolsky、Rosen 发表了一篇文章<sup>[1]</sup>提及纠缠态, 后来被称为 EPR 佯谬. 同年, E Schrödinger 在他的著名文章中定义了纠缠态(entangled state)的概念<sup>[2]</sup>. 1993 年 Bennett 等人发表了一篇传输未知量子态的开创性文章<sup>[3]</sup>, 量子隐形传态就引起了人们很大的兴趣. 1997 年潘建伟等人采用光子纠缠态首次成功地实现了量子态隐形传送的实验<sup>[4]</sup>. 在过去十几年的研究中, 已经有多种方法, 如腔 QED、离子阱、量子点和光子等用来研究纠缠态产生和隐形传态, 且实现了原子能级与光场的相互作用制备了连续变量的光场纠缠态和光子纠缠态的量子存储<sup>[5-9]</sup>.

由于多维量子系统可加载更多的信息, 因而成为量子信息处理技术中一个很重要的资源. 近年来, 人们对多能级量子态隐形传输研究得到更多的关注<sup>[10-16]</sup>. 多能级量子隐形传态比二能级量子隐形传态具有更多的参量, 无论在理论的研究或是在实验实现的时候也更加的复杂, 张量分析在实现多参量问题时是很有用的数学工具. 本文采用张量分析的方法, 给出光子四维量子态隐形传输方案的一般表示, 并通过讨论多粒子光子四维量子态系统的量子通道参数矩阵和测量矩阵的特性, 得到实现完全传输和非零概率传输的充要条件. 这里, 本文将讨论实现完全传输和概率传输的充要条件, 这个条件依赖于测量矩阵  $T$  和量子通道参数  $X$ . 基于一般贝尔基测量, 量子通道参数  $X$  可用来判断一个量子纠缠

态是否能够作为量子通道去传输多维量子态. 用张量表示法来描述量子态和参数矩阵之间的计算, 更加清晰明了, 对比之前的研究, 用张量表示法不仅仅是一个简单紧凑的量子传态表示方法, 更重要的是为选择量子通道提供了一般方法.

本文采用双光子制备成光子四维量子纠缠态, 研究了光子四维量子态系统的传输特性, 提出了关于四维量子态传输的方案, 在此本文将用张量表示法来介绍二粒子光子四维量子态传输和三粒子光子四维量子态传输方案.

## 1 光子四维量子态隐形传态的方法

本文引用腔 QED 制备纠缠态的方法, 传输一个编码于两个独立原子系综上的量子态.

设两个系综分别标注为 L 和 R, 由三能级原子组成的  $\Delta$  型配置, 有激发态  $|a\rangle$  和基态  $|b\rangle$  和  $|c\rangle$ , 量子态编码成原子基态可以表示为<sup>[17]</sup>

$$|\psi\rangle = C_0 |c_L c_R\rangle + C_1 |b_L c_R\rangle + C_2 |c_L b_R\rangle + C_3 |b_L b_R\rangle \quad (1)$$

此处  $\sum_i |C_i|^2 = 1$ . 在制备此类型量子态时, 首先生成光子四维量子纠缠态, 然后把这种态映射到绝热通道的系综下. 系综通过运用适当的控制, 可以实现下面的映射

$$\begin{aligned} |c_L c_R\rangle |0_L 0_R\rangle &\rightarrow |c_L c_R\rangle |0_L 0_R\rangle \\ |b_L c_R\rangle |0_L 0_R\rangle &\rightarrow |c_L c_R\rangle |1_L 0_R\rangle \\ |c_L b_R\rangle |0_L 0_R\rangle &\rightarrow |c_L c_R\rangle |0_L 1_R\rangle \\ |b_L b_R\rangle |0_L 0_R\rangle &\rightarrow |c_L c_R\rangle |1_L 1_R\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

这样, 系综态映射到腔场态为

基金项目: 陕西省教育厅专项基金(No. 12JK0992)资助

第一作者: 陆晨(1987-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为量子通信. Email: lcb2003@yahoo.com.cn

导师: 田秀劳(1956-), 男, 教授, 硕士, 主要研究方向为量子通信、新型纳米材料. Email: txl@xupt.edu.cn

收稿日期: 2012-09-26; 修回日期: 2012-11-14

$$|\psi\rangle = (C_0|0_L0_R\rangle + C_1|1_L0_R\rangle + C_2|0_L1_R\rangle + C_3|1_L1_R\rangle) |c_Lc_R\rangle \quad (3)$$

在此,将式(3)的光子四维量子态采用张量形式表示为

$$|\varphi\rangle = X^{ij} |ij\rangle = X^{00} |00\rangle + X^{01} |01\rangle + X^{10} |10\rangle + X^{11} |11\rangle \quad (4)$$

为了构建一个四维量子态传输的通道,在此先考虑单个未知光子四维量子态隐形传输.假设发送者 Alice 处有一个未知的光子四维量子态  $|\varphi\rangle_A$ , Alice 想要将此量子态通过一对非最大纠缠的四维态形成的量子通道  $|\varphi\rangle_{AB}$  传送给接收者 Bob.

$$|\varphi\rangle_A = R^i |i\rangle = R^0 |0\rangle + R^1 |1\rangle + R^2 |2\rangle + R^3 |3\rangle \quad (5)$$

$$|\varphi\rangle_{AB} = X^{jk} |jk\rangle = X^{00} |00\rangle + X^{01} |01\rangle + X^{02} |02\rangle + X^{03} |03\rangle + X^{10} |10\rangle + X^{11} |11\rangle + X^{12} |12\rangle + X^{13} |13\rangle + X^{20} |20\rangle + X^{21} |21\rangle + X^{22} |22\rangle + X^{23} |23\rangle + X^{30} |30\rangle + X^{31} |31\rangle + X^{32} |32\rangle + X^{33} |33\rangle \quad (6)$$

传输系统总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_{AB} = R^i X^{jk} |ijk\rangle \quad (7)$$

设发送者 Alice 要对系统总态  $|\psi\rangle_{\text{tot}}$  采用四维贝尔基的投影测量,四维贝尔基  $\varphi^\alpha$  为

$$\varphi^\alpha = \varphi_{mn} = (e^{2n\pi i/4} |j, (j+m), \text{mod}4\rangle) / \sqrt{4} \quad (8)$$

这里的  $n, m, i, j, k = 0, 1, 2, 3$  且  $\alpha = 1, 2, \dots,$

16,公式展开为

$$\varphi^1 = |\varphi_{00}\rangle = (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle) / 2,$$

$$\varphi^2 = |\varphi_{10}\rangle = (|00\rangle + e^{\pi i/2} |11\rangle + e^{\pi i} |22\rangle + e^{3\pi i/2} |33\rangle) / 2,$$

$$\varphi^3 = |\varphi_{20}\rangle = (|00\rangle + e^{\pi i} |11\rangle + |22\rangle + e^{\pi i} |33\rangle) / 2,$$

$$\varphi^4 = |\varphi_{30}\rangle = (|00\rangle + e^{3\pi i/2} |11\rangle + e^{\pi i} |22\rangle + e^{\pi i/2} |33\rangle) / 2,$$

$$\varphi^5 = |\varphi_{01}\rangle = (|01\rangle + |12\rangle + |23\rangle + |30\rangle) / 2,$$

$$\varphi^6 = |\varphi_{11}\rangle = (|01\rangle + e^{\pi i/2} |12\rangle + e^{\pi i} |23\rangle + e^{3\pi i/2} |30\rangle) / 2,$$

$$\varphi^7 = |\varphi_{21}\rangle = (|01\rangle + e^{\pi i} |12\rangle + |23\rangle + e^{\pi i} |30\rangle) / 2,$$

(9)

$$\varphi^8 = |\varphi_{31}\rangle = (|01\rangle + e^{3\pi i/2} |12\rangle + e^{\pi i} |23\rangle + e^{\pi i/2} |30\rangle) / 2,$$

$$\varphi^9 = |\varphi_{02}\rangle = (|02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{10} = |\varphi_{12}\rangle = (|02\rangle + e^{\pi i/2} |13\rangle + e^{\pi i} |20\rangle + e^{3\pi i/2} |31\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{11} = |\varphi_{22}\rangle = (|02\rangle + e^{\pi i} |13\rangle + |20\rangle + e^{\pi i} |31\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{12} = |\varphi_{32}\rangle = (|02\rangle + e^{3\pi i/2} |13\rangle + e^{\pi i} |20\rangle + e^{\pi i/2} |31\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{13} = |\varphi_{03}\rangle = (|03\rangle + |10\rangle + |21\rangle + |32\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{14} = |\varphi_{13}\rangle = (|03\rangle + e^{\pi i/2} |10\rangle + e^{\pi i} |21\rangle + e^{3\pi i/2} |32\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{15} = |\varphi_{23}\rangle = (|03\rangle + e^{\pi i} |10\rangle + |21\rangle + e^{\pi i} |32\rangle) / 2,$$

$$\varphi^{16} = |\varphi_{33}\rangle = (|03\rangle + e^{3\pi i/2} |10\rangle + e^{\pi i} |21\rangle + e^{\pi i/2} |32\rangle) / 2$$

设计算基  $|ij\rangle$  和 Bell 基  $\varphi^\alpha$  的转换矩阵为

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

将总态转化为 Bell 基形式的表示为

$$|\psi^\alpha\rangle_{\text{tot}} = R^i X^{jk} T_{ij}^\alpha | \alpha k \rangle = \frac{1}{2} R^i \sigma_i^{(\alpha)k} | \alpha k \rangle \quad (11)$$

此处  $\sigma_i^{(\alpha)k} = 2X^{jk} T_{ij}^\alpha$  且

$$\sigma^\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_0^{\alpha 0} & \sigma_1^{\alpha 0} & \sigma_2^{\alpha 0} & \sigma_3^{\alpha 0} \\ \sigma_0^{\alpha 1} & \sigma_1^{\alpha 1} & \sigma_2^{\alpha 1} & \sigma_3^{\alpha 1} \\ \sigma_0^{\alpha 2} & \sigma_1^{\alpha 2} & \sigma_2^{\alpha 2} & \sigma_3^{\alpha 2} \\ \sigma_0^{\alpha 3} & \sigma_1^{\alpha 3} & \sigma_2^{\alpha 3} & \sigma_3^{\alpha 3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X^{00} & X^{10} & X^{20} & X^{30} \\ X^{01} & X^{11} & X^{21} & X^{31} \\ X^{02} & X^{12} & X^{22} & X^{32} \\ X^{03} & X^{13} & X^{23} & X^{33} \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{00}^\alpha & T_{10}^\alpha & T_{20}^\alpha & T_{30}^\alpha \\ T_{01}^\alpha & T_{11}^\alpha & T_{21}^\alpha & T_{31}^\alpha \\ T_{02}^\alpha & T_{12}^\alpha & T_{22}^\alpha & T_{32}^\alpha \\ T_{03}^\alpha & T_{13}^\alpha & T_{23}^\alpha & T_{33}^\alpha \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\sigma^\alpha = 2XT^\alpha \quad (13)$$

式中  $\sigma$  是传输矩阵,  $X$  是通道参数矩阵,  $T$  是测量矩阵<sup>[18]</sup>.

选取测量矩阵的时候, 如果用一般的 Bell 基来测量将得到测量矩阵  $T^\alpha$  为

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} \end{pmatrix}, T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} \end{pmatrix}, \\ T^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} \end{pmatrix}, T^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T^6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \end{pmatrix}, \\ T^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T^8 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \end{pmatrix}, T^9 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T^{10} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T^{13} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^{15} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\pi i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T^{16} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{3\pi i/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i/2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Alice 对系统量子态做广义贝尔基测量 (Generalized Bell Measurement, GBM) 后, Bob 这边的量子态塌缩为

$$|\psi^\alpha\rangle_B = R^i \sigma_i^{(\alpha)k} | k \rangle \quad (15)$$

显然, 当所有  $\alpha$  情况的  $\sigma^\alpha$  都为么正的矩阵 (U 阵), 则 Bob 这边只需要做  $\sigma^\alpha$  的逆变换, 就可以得到原态; 当  $\sigma^\alpha$  可逆但不为么正的矩阵, 则 Bob 做适当的操作可成功实现非零的量子态概率传输; 当  $\sigma^\alpha$  不可逆, 则 Bob 无法还原到最初的量子态  $|\psi^\alpha\rangle_A$ .

因此, 得到实现量子态非零概率传输的充要条

件: 转换矩阵  $\sigma^\alpha$  的行列式不为零, 公式如下

$$\det(X) \neq 0, \forall \alpha, \det(2T^\alpha) \neq 0 \quad (16)$$

此外, 很容易写出量子态完全传输的充要条件: 转换矩阵  $\sigma^\alpha$  必须为么正矩阵, 这就要求其所有子矩阵必须为么正矩阵, 公式如下

$$(2T^\alpha)^{-1} = (2T^\alpha)^+ \text{ 且 } X^{-1} = X^+ \quad (17)$$

到此, 通过张量表示法研究得到一个光子四维态 (类比于单粒子四维态) 的隐形传输. 结果表明, 转换矩阵  $\sigma^\alpha$  在传态处理时很关键, 因为它决定了隐形传态是否成功.  $\sigma^\alpha$  由测量矩阵  $T^\alpha$  和参数矩阵  $X$  相

乘得到. 如果仅考虑 GBM, 则  $2T^a$  必然是幺正矩阵, 那么传输的模式(这里的模式表示完全传输或者概率传输)仅由参数矩阵  $X$  来决定; 幺正的矩阵  $X$  能够实现量子态完全传输, 可逆但不为幺正的矩阵  $X$  能够实现量子态概率传输. 参数矩阵  $X$  的可逆性和幺正性被用来判定它是否能作为一个光子四维量子态隐形传输的通道.

在此, 选择一个幺正通道参数矩阵来实现量子态完全传输, 则通道参数矩阵  $X$  为

$$X = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

那么量子通道  $|\varphi\rangle_{AB}$  为

$$|\varphi\rangle_{AB} = X^{ij} |ij\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |01\rangle - \sin \theta |10\rangle + \cos \theta |11\rangle + \cos \theta |22\rangle + \sin \theta |23\rangle - \sin \theta |32\rangle + \cos \theta |33\rangle \quad (19)$$

## 2 不同通道的二粒子光子四维量子态隐形传输

假设 Alice 处有两个未知的光子四维量子态  $|\varphi\rangle_{12}$ , 即二粒子光子四维量子态. Alice 想要将此量子态由四个四维态粒子纠缠态  $|\varphi\rangle_{3456}$  作为通道传送给 Bob.

$$|\varphi\rangle_{12} = R^r |rt\rangle = R^{00} |00\rangle + R^{01} |01\rangle + R^{02} |02\rangle + R^{03} |03\rangle + R^{10} |10\rangle + R^{11} |11\rangle + R^{12} |12\rangle + R^{13} |13\rangle + R^{20} |20\rangle + R^{21} |21\rangle + R^{22} |22\rangle + R^{23} |23\rangle + R^{30} |30\rangle + R^{31} |31\rangle + R^{32} |32\rangle + R^{33} |33\rangle \quad (20)$$

这里有两种通道来传输量子态, 如图 1 所示, 单通道(a)和双通道(b).

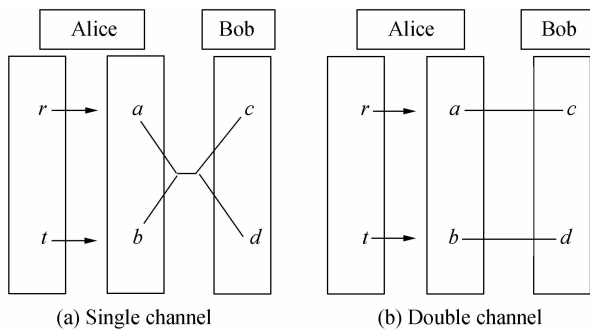


图 1 二粒子四维量子态的两种传输通道  
Fig. 1 Two kinds of quantum channel for the teleportation of two-ququart state

### 2.1 单通道传输二粒子光子四维量子态

如图 1 中的(a)所示, 单通道是由四个相互纠缠的粒子组成的通道, 将其表示为

$$|\varphi\rangle_{3456} = X^{abcd} |abcd\rangle = X^{0000} |0000\rangle + X^{0001} |0001\rangle + X^{0002} |0002\rangle + X^{0003} |0003\rangle + \dots + X^{3330} |3330\rangle +$$

$$X^{3331} |3331\rangle + X^{3332} |3332\rangle + X^{3333} |3333\rangle \quad (21)$$

则结合了 Bell 基  $\varphi^a \varphi^b$  转换之后的总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_{12} \otimes |\varphi\rangle_{3456} = R^r X^{abcd} |rtabcd\rangle = R^r X^{abcd} T_{ra}^a T_{rb}^b |\alpha\beta cd\rangle = R^r X^{abcd} T_{rta}^a |\alpha\beta cd\rangle = R^r \sigma_r^{(a)\beta cd} |\alpha\beta cd\rangle \quad (22)$$

$$\sigma_r^{(a)\beta cd} = X^{abcd} T_{rta}^a \quad (23)$$

$$\sigma^{a\beta} = X T^{a\beta} = X (T^a \otimes T^\beta) =$$

$$\begin{bmatrix} X^{0000} & X^{0100} & \dots & X^{3300} \\ X^{0001} & X^{0101} & \dots & X^{3301} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{0033} & X^{0133} & \dots & X^{3333} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{00}^a & T_{10}^a & T_{20}^a & T_{30}^a \\ T_{01}^a & T_{11}^a & T_{21}^a & T_{31}^a \\ T_{02}^a & T_{12}^a & T_{22}^a & T_{32}^a \\ T_{03}^a & T_{13}^a & T_{23}^a & T_{33}^a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} T_{00}^b & T_{10}^b & T_{20}^b & T_{30}^b \\ T_{01}^b & T_{11}^b & T_{21}^b & T_{31}^b \\ T_{02}^b & T_{12}^b & T_{22}^b & T_{32}^b \\ T_{03}^b & T_{13}^b & T_{23}^b & T_{33}^b \end{bmatrix} \quad (24)$$

这里  $T^a$  和  $T^\beta$  与式(12)的形式相同. 因此, 当参数矩阵  $X$  是幺正矩阵, 则接收者 Bob 可以用  $(\sigma^{a\beta})$  的逆矩阵对  $|\psi^a\rangle_B$  变换即可得到原态.

### 2.2 双通道传输二粒子光子四维量子态

如图 1 中的(b)所示, 双通道由两两纠缠的两个量子通道组成, 这里两个通道可以表示为

$$|\varphi\rangle_{34} = Y^{ac} |ac\rangle \quad (25)$$

$$|\varphi\rangle_{56} = Z^{bd} |bd\rangle$$

则结合了 Bell 基  $\varphi^a \varphi^b$  转换之后的总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_{12} \otimes |\varphi\rangle_{34} \otimes |\varphi\rangle_{56} = R^r Y^{ac} Z^{bd} |rtabcd\rangle = R^r Y^{ac} Z^{bd} T_{ra}^a T_{rb}^b |\alpha\beta cd\rangle = R^r \sigma_r^{(a)c} \sigma_r^{(b)d} |\alpha\beta cd\rangle, \quad (26)$$

$$\sigma_r^{(a)c} = Y^{rc} T_{ra}^a, \sigma_r^{(b)d} = Z^{rd} T_{rb}^b, \sigma_r^{(a\beta)cd} = \sigma_r^{(a)c} \sigma_r^{(b)d}$$

它们对应的矩阵表达式为

$$\sigma^{a\beta} = \sigma^a \otimes \sigma^b = (Y T^a) \otimes (Z T^b) = (Y \otimes Z) (T^a \otimes T^b) \quad (27)$$

这里的  $Y, Z$  和  $T^a, T^b$  同式(12). 因此, 当参数矩阵  $Y$  和  $Z$  都是幺正矩阵, 则 Bob 可以用  $(\sigma^{a\beta})$  的逆矩阵对  $|\psi^a\rangle_B$  进行变换即可得到原态.

在 Bell 基的测量条件下, 若选取的通道参数矩阵都是幺正的, 即可实现一个完全的量子态隐形传输. 四粒子纠缠单通道取决于通道参数矩阵  $X$ , 如果  $X$  是不可约的, 也就是说它不能由任意的两个矩阵直积得到, 则这个单通道是一个真正的纠缠通道<sup>[19]</sup>. 双通道只是单通道的一种可约的特殊形式, 当单通道参数矩阵可约时, 即为双通道.

## 3 不同通道的三粒子光子四维量子态隐形传输

假设 Alice 处有三个未知的四维量子态  $|\varphi\rangle_{123}$ , Alice 想要将此量子态传送给 Bob.

$$|\varphi\rangle_{123} = R^{ijk} |ijk\rangle = R^{000} |000\rangle + R^{001} |001\rangle + R^{002} |002\rangle + R^{003} |003\rangle + \dots + R^{333} |333\rangle \quad (28)$$

对三粒子光子四维量子态的传输,可以选择三

种量子通道如图 2 所示,分别是单通道(a)、双通道(b)以及三通道(c).

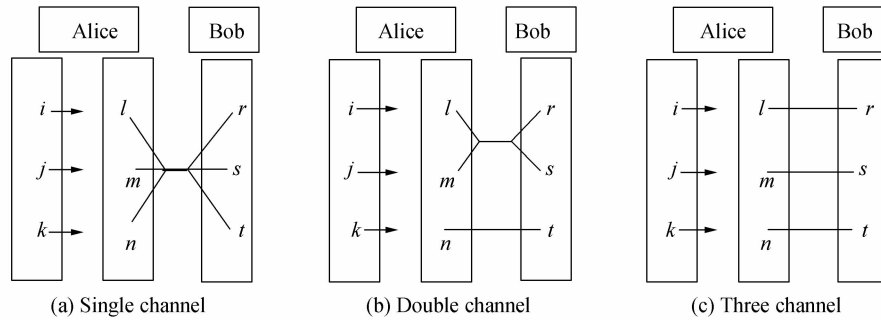


图 2 三粒子四维量子态的三种传输通道

Fig. 2 Three kinds of quantum channel for the teleportation of three-quart state

### 3.1 单通道传输三粒子光子四维量子态

如图 2 中的 (a) 所示单通道,则结合了 Bell 基  $\varphi^a \varphi^b \varphi^c$  转换之后的总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_{123} \otimes |\varphi\rangle_{456789} = R^{ijk} X^{lmnrst} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c \cdot |\alpha\beta\gamma rst\rangle \quad (29)$$

$$\sigma_{ijk}^{(a\beta\gamma)rst} = X^{lmnrst} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c \quad (30)$$

相应的矩阵表达式为

$$\sigma^{a\beta\gamma} = \sigma^a \otimes \sigma^b \otimes \sigma^c = X(T^a \otimes T^b \otimes T^c) \quad (31)$$

这里的  $T^a T^b$  和  $T^c$  同式(12),  $X$  是一个  $64 \times 64$  的复数矩阵.

### 3.2 双通道传输三粒子光子四维量子态

如图 2 中的 (b) 所示双通道,则结合了 Bell 基  $\varphi^a \varphi^b \varphi^c$  转换之后的总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_{123} \otimes |\varphi\rangle_{4567} \otimes |\varphi\rangle_{89} = R^{ijk} X^{lmnr} Y^{st} \cdot T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c |\alpha\beta\gamma rst\rangle \quad (32)$$

$$\sigma_{ijk}^{(a\beta\gamma)rst} = X^{lmnr} T_{il}^a T_{jm}^b Y^{st} T_{kn}^c \quad (33)$$

相应的矩阵表达式为

$$\sigma^{a\beta\gamma} = \sigma^a \otimes \sigma^b \otimes \sigma^c = (X \otimes Y)(T^a \otimes T^b \otimes T^c) \quad (34)$$

这里的  $T^a T^b$  和  $T^c$  同式(12),  $X$  是一个  $16 \times 16$  的复杂矩阵,  $Y$  是一个  $4 \times 4$  的复杂矩阵.

### 3.3 三通道传输三粒子光子四维量子态

如图 2 中的 (c) 所示三通道,则结合了 Bell 基  $\varphi^a \varphi^b \varphi^c$  转换之后的总态为

$$|\psi\rangle_{\text{tot}} = |\varphi\rangle_{123} \otimes |\varphi\rangle_{45} \otimes |\varphi\rangle_{67} \otimes |\varphi\rangle_{89} = R^{ijk} X^{lr} \cdot Y^{ms} Z^{nt} T_{il}^a T_{jm}^b T_{kn}^c |\alpha\beta\gamma rst\rangle \quad (35)$$

$$\sigma_{ijk}^{(a\beta\gamma)rst} = X^{lr} T_{il}^a Y^{ms} T_{jm}^b Z^{nt} T_{kn}^c \quad (36)$$

相应的矩阵表达式为

$$\sigma^{a\beta\gamma} = \sigma^a \otimes \sigma^b \otimes \sigma^c = (X \otimes Y \otimes Z)(T^a \otimes T^b \otimes T^c) \quad (37)$$

这里的  $T^a T^b$  和  $T^c$  同式(12),  $X$ ,  $Y$  和  $Z$  都是  $4 \times 4$  的复数矩阵.

三粒子四维量子态传输在 GMB 条件下,通常都可以实现完全传输,或者根据所选通道的么正性和可逆性来判断是否可以实现成功的传输.显然,双

通道和三通道是单通道的特殊形式.

## 4 结论

相比经典二能级的量子隐形传态,多维量子系统可以携带更多的信息而受到越来越多的关注,但其复杂性和多样性对通道的选择更加严谨.本文介绍了光子四维量子态隐形传态的张量表示方法,探讨了量子通道的选择方法,以及不同量子通道实现完全传输或者成功完成传输的充要条件.在 GBM 下,测量矩阵  $2T^a$  就是么正矩阵,通道参数矩阵  $X$  的可逆性和么正性成为判断一个光子四维量子态可否成为量子通道的关键条件.在此本文给出了二粒子光子四维量子态系统和三粒子光子四维量子态系统的隐形传态的一般张量表示方法.单光子二维态隐形传输在实验上已经实现了,如何在实验上实现光子四维量子态系统的隐形传输是以后研究的重要课题.

### 参考文献

- [1] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete[J]. *Physical Review*, 1935, **47**(10):777-780.
- [2] SCHRODINGER E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik[J]. *Naturwissenschaften*, 1935, **23**(48): 807-812.
- [3] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. *Physical Review Letters*, 1993, **70**(13): 1895-1899.
- [4] BOUWMEESTER D, PAN Jian-wei, MATTLE K, et al. Experimental quantum teleportation[J]. *Nature*, 1997, **390**(6660): 575-579.
- [5] ZHA Xin-wei, ZHANG Wei. Perfect Teleportation an arbitrary three-particle state [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(4): 979-982.
- [6] MA Gang-long, ZHA Xin-wei. Teleportation of four particles W state through two EPR states[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9): 1627-1630.  
马刚龙, 查新未. 利用两个 EPR 态完全隐形传输四粒子 W 态 [J]. *光子学报*, 2010, **39**(9): 1627-1630.

- [7] LIU Jun-chang, LI Yuan-hua, NIE Yi-you. Controlled teleportation of an arbitrary two particle state by using a four qubit cluster state and entanglement swappings [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(11): 2078-2082.  
刘俊昌,李渊华,聂义友. 基于纠缠交换和团簇态实现二粒子任意态的可控隐形传态[J]. *光子学报*, 2010, **39**(11): 2078-2082.
- [8] GUO Guang-can, ZHENG Shi-biao. Preparation of entangled coherent states of the electromagnetic field based on detecting the state of the atom in the Jaynes-Cummings model [J]. *Optics Communications*, 1997, **133**(1-6): 142-146.
- [9] CHOI K S, DENG H, LAURAT J, *et al.* Mapping photonic entanglement into and out of a quantum memory[J]. *Nature*, 2008, **452**(7183): 67-71.
- [10] LANYON B P, BARBIERI M, ALMEIDA M P, *et al.* Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces[J]. *Nature Physics*, 2009, **5**(2): 134-140.
- [11] ZHOU Ping, LI Xi-han, DENG Fu-guo, *et al.* Multiparty-controlled teleportation of an arbitrary m-qudit state with a pure entangled quantum channel[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007, **40**(43): 13121-13130.
- [12] YUAN Hao, LIU Yi-min, ZHANG Zhan-jun. Generalized quantum two-qutrit-state splitting [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2008, **50**(4): 873-878.
- [13] DAI Hong-Yi, ZHANG Ming, KUANG Le-Man. Teleportation of the three-level three-particle entangled state and classical communication cost[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, **387**(14): 3811-3816.
- [14] YANG Jie, LIU Jun. Controlled teleportation of multi-qutrit quantum information by swapping entanglement [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2008, **49**(2): 338-342.
- [15] SHI Jin, ZHAN You-bang. Controlled probabilistic teleportation of an unknown multi-particle high-dimensional entangled state[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, **51**(6): 1027-1032.
- [16] CICCARELLO F, BOSE S, ZARCONI M. Teleportation between distant qudits via scattering of mobile qubits[J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(4): 042318-042326.
- [17] AL-AMRI M, EVERS J, ZUBAURY M S. Quantum teleportation of four-dimensional qudits[J]. *Physical Review A*, 2010, **82**(2): 022329-022336.
- [18] TIAN Xiu-lao, SHI Guo-fang, ZHAO Yong. Quantum channels of the qutrit state teleportation [J]. *International Journal of Quantum Information*, 2011, **9**(3): 893-901.
- [19] TIAN Xiu-lao, XI Xiao-qiang, SHI Guo-fang, *et al.* Tensor representation in teleportation and controlled teleportation [J]. *Optics Communications*, 2009, **282**(24): 4815-4818.

## Ququart State Teleportation

LU Chen, ZHANG Wei, LIU Huan, JIA Lei, TIAN Xiu-lao

(School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** Qudit quantum system can carry more information than that of qubit, so it is an important resource in quantum information processing. The ququart state with the tensor representation is gotten in term of the photon entangled state. The necessary and sufficient condition for realizing a successful or perfect teleportation is obtained, as will be shown, this condition is determined by the measurement matrix and the quantum channel parameter matrix. The general expressions of the measurement matrix are written out and the quantum channel parameter matrix are discussed. Furthermore, the teleportation of ququart state is proposed via different kinds of quantum channels. The description of the teleporting process with the help of tensor analysis is more compact and clear.

**Key words:** Teleportation; Ququart state; Channel parameter matrix; Transformation matrix