

doi: 10.3788/gzxb20124110.1251

基于纠缠交换的量子信令中继网络模型及仿真

连涛, 聂敏

(西安邮电大学 通信与信息工程学院, 西安 710061)

摘 要:针对多用户量子信令网络的中继模型,本文研究了环境量子噪音对信令远程传输的影响,分析了量子交换原理,在此基础上提出了基于纠缠交换的量子信令中继策略,给出了总线型信令中继网络模型,并对量子信令远程传输成功率进行了仿真研究.结果表明:量子信令远程传输成功率与噪音功率谱密度、传输距离和中继次数三个因素密切相关;当噪音功率谱密度一定时,随着传输距离的增大,信令传输成功率呈准平抛型曲线下降;在噪音功率谱密度和总的传输距离两个因素都确定的情况下,随着中继次数的增加,信令传输成功率显著增大.因此,为了实现量子信令的可靠传输,在背景噪音一定时,必须准确设计传输距离和中继次数.

关键词:量子通信;总线型网络;纠缠信令;量子中继;量子纠缠

中图分类号:G301

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2012)10-1251-5

0 引言

量子通信是当前通信和信息学领域的研究热点和前沿技术,研究焦点主要集中在量子纠缠分发、量子态的制备和存储,以及相关的量子通信协议等.随着相关研究的不断深入,目前点到点的通信必然要发展到点对多点的多用户通信.对于多用户量子通信网络而言,量子纠缠信令必不可少.

然而,关于量子信令中继的研究,目前尚未全面展开.在量子信令的传输过程中,信道的特性非常重要.文献[1]给出了局部量子关联产生的充分必要条件,即一个局部保迹信道产生量子关联的充分必要条件是此信道不是一个交换性保持的信道.文献[2]提出了在两体纠缠系统中,一个子系统纠缠状态进入随机噪音信道后,此系统纠缠度的变化规律.此时系统纠缠度取决于信道对最大纯纠缠态的影响.文献[3]研究了当纠缠子系统通过带有噪音的信道后,辅助纠缠度随时间的变化关系,提出了一个系统纠缠度变化方程.文献[4]提出了外部磁场对纠缠度的影响.其研究成果揭示了这样一个规律,当纠缠系统处于指数型变化的磁场中时,系统最终的纠缠度可以维持和保存.文献[5]给出了辅助型纠缠度的上下边界和约束条件.

在此基础上,本文首先分析了环境量子噪音对

量子远程传输信令的影响^[6-8].为解决该问题本文在研究了量子纠缠交换^[9-11]原理后,提出总线型量子信令中继网络模型^[12-16],通过仿真,探讨了信令远程传输成功率与噪音功率谱密度、传输距离以及中继次数的关系.

1 环境量子噪音对量子信令的影响

在纠缠信令的传输过程中,携带信令信息的纠缠光子不可避免地将与环境发生作用,导致三种消相干现象^[9-10].

1.1 自发幅度衰变

设环境量子态为 $|e_x\rangle$,由于辐射场真空涨落经过一段时间后,量子位以概率 p 从 $|1\rangle$ 态跃迁到 $|0\rangle$ 态,环境量子态以概率 p 从真空态跃迁到有一个光子的状态 $|e_x\rangle$,这个过程中量子位与环境组成的复合系统么正演化可表示为

$$U: \begin{cases} |0\rangle|e_t\rangle \rightarrow |0\rangle|e_t\rangle \\ |1\rangle|e_t\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle|e_t\rangle + \sqrt{p}|0\rangle|e_x\rangle \end{cases} \quad (1)$$

即

$$U(|\varphi_A\rangle|e_t\rangle) = (\alpha|0\rangle + \sqrt{1-p}\beta|1\rangle)|e_t\rangle + \sqrt{p}\beta|0\rangle|e_x\rangle \quad (2)$$

对环境态求偏迹可得

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

基金项目:国家自然科学基金(No. 61172071, No. 61072067)、陕西省自然科学基金(No. 2010JM8021)、陕西省教育厅自然科学研究项目(No. 2010JK834, No. 2011JK1017)和西安邮电学院青年教师科研基金(No. ZL2010-05)资助

第一作者(通信作者):连涛(1987-),男,硕士研究生,主要研究方向为量子通信、移动通信. Email: tomliantao@126.com

导 师:聂敏(1964-),男,教授,主要研究方向为量子通信、移动通信、现代通信网理论和关键技术. Email: niem@xupt.edu.cn

收稿日期:2012-05-31; **修回日期:**2012-07-02

代入 Kraus 表示式计算可得任意 t 时刻描述量子位的密度算子为

$$\rho_A(t) = \sum_{p=0}^1 A_p \rho_A(t_0) A_p^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (4)$$

设 γ 是单位时间内的错误率, 当 $p = \gamma\Delta t, t = n\Delta t \gg \Delta t, \Delta t \rightarrow 0$ 时, 推导可得

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} + (1 - e^{-\gamma t})\rho_{11} & e^{-\frac{\gamma}{2}t}\rho_{01} \\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\rho_{10} & e^{-\gamma t}\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (5)$$

当 $t \gg \gamma^{-1}$ 时

$$p \rightarrow 1, \rho_A(t \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} \rho_{00} + \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

即相互作用使得量子位从 $|1\rangle$ 态跃迁到 $|0\rangle$ 态。

1.2 退极化

一个量子位的密度算子可以通过其自旋极化适量 \mathbf{P} 描述, 即

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (7)$$

由于量子位与环境的相互作用导致极化矢量 \mathbf{P} 退极化, 从而量子态消相干。量子位和环境构成的复合系统么正演化可以表示为

$$U: |\varphi\rangle|e_1\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}I|\varphi\rangle \otimes |e_1\rangle + \sqrt{\frac{p}{3}}X|\varphi\rangle \otimes |e_1\rangle + \sqrt{\frac{p}{3}}[Y|\varphi\rangle \otimes |e_Y\rangle + Z|\varphi\rangle \otimes |e_Z\rangle] \quad (8)$$

对由环境初态 $|e_X\rangle$ 演化来的正交基 $\{|e_1\rangle, |e_X\rangle, |e_Y\rangle, |e_Z\rangle\}$ 求偏迹, 得到这种情况下的四个 Kraus 算子元素为

$$A_0 = \sqrt{1-p}I, A_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}X, A_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}Y, A_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}Z \quad (9)$$

故 t 时刻量子位的密度算子是

$$\rho_A(t) = \sum_{p=0}^1 A_p \rho_A(t_0) A_p^\dagger = [I + (1 - 4p/3) \cdot \mathbf{P}(0) \cdot \boldsymbol{\sigma}] / 2 \quad (10)$$

可见自旋极化矢量的大小变为原来的 $1 - 4p/3$ 倍, 方向不发生改变。即极化矢量 $\mathbf{P}(0)$ 变成了 $\mathbf{P}' = 0$ 。

1.3 相位阻尼

消相干过程还可以是量子位两个能态之间无跃迁, 但相对相位改变。此时量子位与环境相互作用, 量子位以概率 p 和环境态发生完全弹性散射, 当量子态处于 $|0\rangle$ 态时, 散射环境为 $|e_X\rangle$ 态, 当量子位处在 $|1\rangle$ 态时, 散射环境为 $|e_Y\rangle$ 态, 复合系统的么正演化为

$$U: \begin{cases} |0\rangle|e_1\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|0\rangle|e_1\rangle + \sqrt{p}|0\rangle|e_X\rangle \\ |1\rangle|e_1\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle|e_1\rangle + \sqrt{p}|1\rangle|e_Y\rangle \end{cases} \quad (11)$$

从而

$$U(|\varphi_A\rangle|e_1\rangle) = \sqrt{1-p}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|e_1\rangle + \sqrt{p}(\alpha|0\rangle|e_X\rangle + \beta|1\rangle|e_Y\rangle) \quad (12)$$

此时

$$A_0 = \sqrt{1-p}I, A_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

因此

$$\rho_A(t) = \sum_{p=0}^1 A_p \rho_A(t_0) A_p^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)\rho_{01} \\ (1-p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (14)$$

显然对角元素没有改变, 但反映干涉作用的对角元素发生衰变, 在有限的时间间隔 $t = n\Delta t$ 内, $\Delta t \rightarrow 0$ 时推导可得演化结果

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{-\gamma t}\rho_{01} \\ e^{-\gamma t}\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (15)$$

λ^{-1} 是非对角元素衰减特征时间, $t \gg \gamma^{-1}$ 时, $e^{-\gamma t} \rightarrow 0, e^{-\gamma t}\rho_{01} \rightarrow 0, e^{-\gamma t}\rho_{10} \rightarrow 0$ 。原来的相干叠加态将会由于非对角元素衰变为零而变成完全混合态。

这些由噪音引起的消相干现象使得随着通信距离的增加, 信令传输成功率下降, 故量子信令中继必不可少。

2 量子纠缠交换原理

如图 1, 假设由 6 个纠缠粒子组成的纠缠对 EPR-1、EPR-2、EPR-3 构成的系统状态为

$$|\Psi\rangle_{123456} = |\Psi\rangle_{12} \otimes |\Psi\rangle_{34} \otimes |\Psi\rangle_{56} \quad (16)$$

式中 $|\varphi\rangle_{ij}$ 表示一纠缠对, 即

$$|\Psi\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_i|V\rangle_j + |V\rangle_i|H\rangle_j) \quad (17)$$

式中 $|H\rangle_i, |V\rangle_j$ 分别代表纠缠粒子水平和垂直极化状态。粒子对 1-2、3-4、5-6 分别构成 EPR 对, 显然不属于同组的粒子是独立无关的两个粒子。

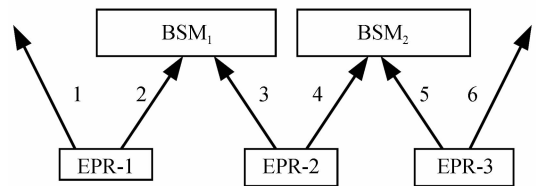


图 1 量子纠缠交换过程

Fig. 1 Quantum entanglement swapping process

首先对粒子 2 和 3 作贝尔基测量 BSM₁ (即将粒子 2 和 3 投影到这两个粒子构成的四个贝尔基中

的一个上). 选取测量基

$$|\Psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2|V\rangle_3 + |V\rangle_2|H\rangle_3) \quad (18)$$

测量后得到

$$|\Psi\rangle_{1456} = \langle\Psi\rangle_{23} [|\Psi\rangle_{12} \otimes |\Psi\rangle_{34} \otimes |\Psi\rangle_{56}] = |\Psi\rangle_{14} \otimes |\Psi\rangle_{56} \quad (19)$$

同理对粒子 4 和 5 作贝尔基测量 BSM₂ 选取测量基

$$|\Psi\rangle_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_4|V\rangle_5 + |V\rangle_5|H\rangle_4) \quad (20)$$

测量后得到

$$|\Psi\rangle_{16} = \langle\Psi\rangle_{45} [|\Psi\rangle_{14} \otimes |\Psi\rangle_{56}] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_6 + |V\rangle_1|H\rangle_6) \quad (21)$$

式(21)表明, 尽管粒子 1 和 6 初始时相互独立无关, 但是经过纠缠交换后建立起了新的纠缠关系, 形成新的纠缠对 EPR-4.

3 基于纠缠交换的量子信令中继策略及网络模型

3.1 基于纠缠交换的量子信令中继策略

根据纠缠交换原理, 本文提出以下量子纠缠信令的中继策略. 如图 2 所示, 假设 Alice 和 Bob 之间要实现量子纠缠信令的传输, 它们之间没有纠缠对, 只分别拥有与中间节点 Candy 共享纠缠对 EPR-1, EPR-2 中的粒子 1, 4; 而 Candy 拥有纠缠对的其他两个粒子 2, 3, 则可以通过对此处的粒子 2, 3 做贝尔基测量 BSM 在 Alice 和 Bob 间建立起新的纠缠对 EPR-3 完成纠缠交换进行通信, Candy 处是传输中继站.

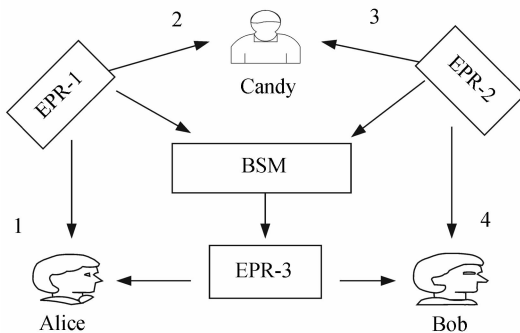


图 2 中继策略模型
Fig. 2 Repeater strategy model

3.2 量子信令中继网络模型

由于总线型网络拓扑结构简单灵活, 非常便于扩充, 信道利用率高, 各节点之间相互独立, 所以本文给出了总线型量子纠缠信令中继网络模型, 如图 3 所示, 其中 RS(repeater station) 表示中继站. 假设西安和北京之间有一条量子信令中继网, 沿途渭南、

运城、临汾、太原、石家庄、保定分别建有量子中继站, 各中继站之间都共享纠缠对, 则可采用本文 4.1 节提出的基于纠缠交换的量子信令中继策略进行信令的中继. 若渭南的 Alice 想和保定的 Bob 间传递信令, 则只需 Alice 与渭南中继站共享纠缠对, Bob 与保定中继站共享纠缠对即可. 经过沿途中继站临汾、太原的中继, Alice 与 Bob 之间的纠缠信令就可以准确传输.

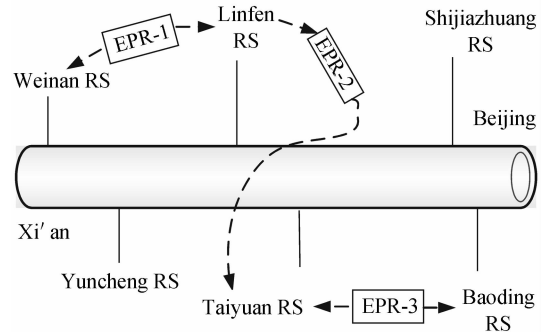


图 3 总线型量子纠缠信令中继网络模型
Fig. 3 A bus network model of quantum entanglement repeater

4 量子信令传输成功率仿真

自由空间中量子信令的传输会受到各种噪音的影响, 使处于纠缠状态的粒子状态发生改变. 主要考虑高斯白噪音, 信令传输成功率用 P_s 表示, 则如式 (22).

$$P_s = 1 - \frac{[L/(n+1)]^2 \lambda^2}{D_T^2 D_R^2} \frac{\sigma^2}{T_T (1-L_P) T_R} \quad (22)$$

式中 L 为信令在自由空间的传输距离, n 为中继的次数, λ 为光子的波长, D_T 和 D_R 分别为发送端和接收端的望远镜孔径, T_T 和 T_R 分别为发、收望远镜的传输因子, L_P 为定位损耗, σ^2 为高斯白噪音的平均功率谱密度.

4.1 量子信令远程传输成功率与距离的关系

根据式(22)得到在无需中继且噪音功率谱密度一定的情况下, 量子信令远程传输成功率与距离关系的仿真结果, 参量设置为: 中继次数恒为 $n=0$, 即无中继; 接、发两端望远镜的孔径为 $D_T = D_R = 30 \text{ mm}$; 传输因子为 $T_T = T_R = 1$; 光子波长 $\lambda = 200 \text{ nm}$; 定位损耗 $L_P = 5\%$; 错误率门限值 $P_f = 0.003$.

图 4 中, 横坐标为量子信令传输距离, 纵坐标为远程传输成功率, 三条曲线噪音功率谱密度分别为 1、2、3 dB/km. 可见总的传输距离一定时, 传输成功率随着噪音功率谱密度的减小而增大; 在噪音功率谱密度一定且无需中继的情况下, 传输成功率随着距离的增加呈弧形曲线逐渐减小. $A(5\ 000, 0.996\ 8)$

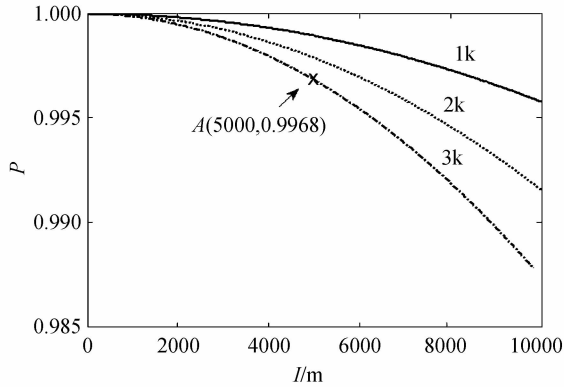


图4 传输成功率与距离的关系

Fig. 4 The relationship between success rate of transmission and distance

点说明在传输距离5 km时传输错误率已经超过了门限值 $P_f=0.003$,故要保证传输成功率,此距离必须加中继。

4.2 量子信令远程传输成功率与中继次数的关系

同理根据式(22)得到在噪音功率谱密度和总的传输距离都一定时,量子信令远程传输成功率与中继次数关系的仿真结果,参量设置为:传输距离 l 不变,恒为 $l=10$ km;接、发两端望远镜的孔径为 $D_T=D_R=30$ mm;传输因子为 $T_T=T_R=1$;光子波长 $\lambda=200$ nm;定位损耗 $L_P=5\%$;错误率门限值 $P_f=0.003$ 。如图5所示,横坐标表示量子信令在传输过程中加的中继次数,纵坐标表示量子信令传输成功率,三条曲线噪音功率谱密度分别为1、2、3 dB/km。可见传输成功率随着中继次数的增加显著增加。点 $B(2,0.9986)$ 表示当中继2次时完全达到了正确传输的要求,错误门限值 $P_f=0.003$ 。当中继次数 $n>2$ 后曲线趋于平滑,逐渐逼近于1,即此时中继次数的增加不会大幅度提升传输成功率。故在实际的建网过程中为了量子信令的可靠传输,在最大噪音功率谱密度的前提下,必须恰当的选择中继站个数。

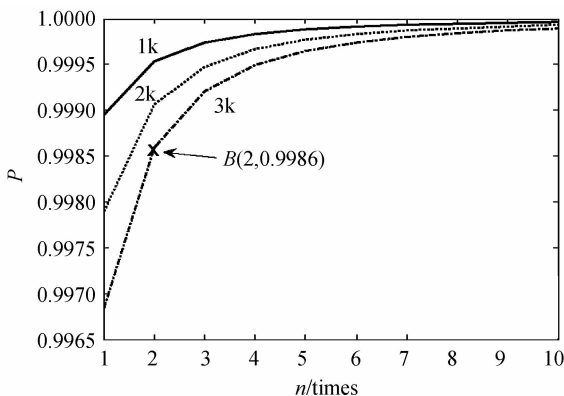


图5 传输成功率与中继次数的关系

Fig. 5 The relationship between success rate of transmission and times of repeater

5 结论

针对噪音背景下量子信令的远程传输问题,本文首先分析了量子噪音对信令的各种影响,然后提出了基于纠缠交换的中继策略和总线型,最后通过仿真,探讨了传输成功率与噪音、中继距离和中继次数的关系。结果表明,当噪音功率谱密度一定时,传输距离的增大,导致成功率急剧下降,因此,量子中继必不可少。但是,过多的中继次数,反而增加了建网成本和维护工作量。所以,为了量子信令的可靠传输,在最大噪音功率谱密度的前提下,必须在中继距离与中继次数之间进行折中选择。

参考文献

- [1] HU Xue-yuan, FAN Heng, ZHOU D L, *et al.* Necessary and sufficient conditions for local creation of quantum correlation [J]. *Physical Review A*, 2012, **85**(3): 032102.
- [2] LI Z G, FEI S M, WANG Z D, *et al.* Evolution equation of entanglement for bipartite systems [J]. *Physical Review A*, 2009, **79**(2): 024303.
- [3] LI Z G, ZHAO M J, FEI S M, *et al.* Evolution equation for entanglement of assistance [J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(4): 042312.
- [4] ABLIZ A, GAO H J, XIE X C, *et al.* Entanglement control in an anisotropic two-qubit Heisenberg XYZ model with external magnetic fields [J]. *Physical Review A*, 2006, **74**(5): 052105.
- [5] LI Z G, FEI S M, ALBEVERIO S, *et al.* Bound of entanglement of assistance and monogamy constraints [J]. *Physical Review A*, 2009, **80**(3): 034301.
- [6] MA Bao-ke, GUO Li-xin, ZHANG Qiang, *et al.* Effects of fog on wireless laser communication systems [J]. *Journal of Applied Optics*, 2008, **29**(3): 464-468.
马保科,郭立新,张强,等.雾对无线激光通信系统的影响 [J]. *应用光学*, 2008, **29**(3): 464-468.
- [7] YIN Zhi-gong, HE Jun, HUANG Chang-chun, *et al.* Experiment analysis of influence of atmosphere stochastic channel on laser transmission [J]. *Journal of Applied Optics*, 2005, **26**(4): 33-35.
尹志国,何俊,黄常春,等.用实验方法分析大气随机信道对激光传输的影响 [J]. *应用光学*, 2005, **26**(4): 33-35.
- [8] 尹浩,马怀新.军事量子通信概论 [M].北京:军事科学出版社, 2006: 224-229.
- [9] GOEBEL A M, WAGENKNECHT C, ZHANG Qiang, *et al.* Multistage entanglement swapping [J]. *Physical Review Letters*, 2008, **101**(8): 080403.
- [10] WANG Jian, CHEN Huang-qing, ZHANG Quan, *et al.* Quantum secure communication protocols on the basis of entanglement swapping [J]. *Journal of National University of Defence Technology*, 2007, **29**(2): 56-60.
王剑,陈皇卿,张权,等.基于纠缠交换的量子安全通信协议 [J]. *国防科技大学学报*, 2007, **29**(2): 56-60.
- [11] LIU Rui, ZHAO Hong-li, ZENG De-xian. Free-space laser communication and its key technology [J]. *Journal of Applied Optics*, 2006, **27**(2): 152-154.

- 刘睿,赵洪利,曾德贤. 空间激光通信及其关键技术[J]. 应用光学, 2006, **27**(2):152-154.
- [12] HAN Yu-hong, YANG Shu, MA Hai-qiang. Single photon detection used in quantum communication[J]. *Journal of Applied Optics*, 2010, **31**(2): 322-326.
- 韩宇宏,杨树,马海强. 量子通信中单光子探测器的实验研究[J]. 应用光学, 2010, **31**(2):322-326.
- [13] PEI Chang-xing, YAN Yi, LIU Dan, *et al.* A quantum repeater communication system based on entanglement[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(12): 2422-2426.
- 裴昌幸,阎毅,刘丹,等. 一种基于纠缠态的量子中继通信系统[J]. 光子学报, 2008, **37**(12): 2422-2426.
- [14] VIDAL G, WERNER R F. A computable measure of entanglement[J]. *Physical Review A*, 2002, **65**(3): 032314.
- [15] BENNETT C H, SHOR P W. Quantum information theory[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, **44**(6): 2724-2742.

Model and Simulation of Entanglement Signaling Repeater Network Based on Entanglement Swapping

LIAN Tao, NIE Min

(School of Communication and Information Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

Abstract: Aiming at the quantum signalling repeater network model for multi-user, environment quantum noises effect on remote transmission of signalling was studied. A kind of quantum signaling repeater strategy was purposed after the theory of quantum swapping being analyzed. Then a bus network model was put forward and the success rate of long distance quantum signaling transmission was simulated. The results show that long distance signaling transmission has a close relationship with the noise power spectral density, transmission distance and repeater times. When noise power spectral density is constant and there is no repeater during the transmission process, the success rate declines like plesio-flat-parabola with increasing of the transmission distance. On the condition of constant noise power spectral density and constant transmission distance, the success rate increases obviously while the repeater times is increasing. Therefore, on the behalf of reliable quantum signaling transmission the transmission distance and repeater times should be designed properly under the circumstance of constant background noise.

Key words: Quantum communication; Bus network; Entanglement signaling; Quantum repeater; Quantum entanglement