

doi: 10.3788/gzxb20124110.1217

基于弱选择正则化正交匹配追踪的图像重构算法

刘哲, 张鹤妮, 张永亮, 郝珉慧

(西北工业大学 理学院, 西安 710129)

摘 要: 正则化正交匹配追踪算法由于重构效率高在信号重构中得到广泛应用, 然而该算法需要以信号稀疏度为先验条件, 若稀疏度水平估计不合适会造成重构结果不稳定. 针对该问题, 提出了一种基于弱选择正则化的正交匹配追踪算法. 该算法可以实现在信号稀疏度未知的条件下, 根据弱选择标准对算法中每次迭代产生的余量与观测矩阵之间的相关性进行判定, 并且自适应地确定表示原信号的原子数目和原子候选集, 进而通过正则化原则从候选集中快速有效地挑选出完成信号重构的最优原子组. 数值实验表明, 所提出算法和其它贪婪算法相比较, 峰值信噪比提高 0.5~1.5 dB, 最小均方差也明显降低, 图像信号重构效果优于其它同类算法.

关键词: 压缩感知; 弱选择; 正则化; 匹配追踪; 信号重构

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2012)10-1217-5

0 引言

随着信息技术产业的迅猛发展, 人们对信息的需求量与日俱增. 依照传统的奈奎斯特采样定律进行信号采样, 使得数据的获取、存储和传输效率很低, 并且增大了信息处理的硬件设施的压力. 而近些年出现的压缩感知理论有效缓解了上述难题, 并广泛应用于信号处理领域. 为信号的采样^[1]、稀疏表示^[2]以及各类语音和图像等信号处理的反问题^[3-4]提供了新思路. 该理论表明, 通过采集少量的信号值就可实现稀疏或可压缩信号的精确重构.

作为该理论关键的一部分, 重构算法对于压缩后信号的精确重构以及采样过程的准确性验证均有着重要的意义. 目前已有的重构方法包括组合优化、非凸优化、凸优化、贪婪算法等, 其中贪婪算法重构效率较高. 经典贪婪算法有正交匹配追踪^[5], 而由于该算法的贪婪性, 导致信号重构出现过匹配现象. 随后的改进算法有分段正交匹配追踪^[6]、正则化正交匹配追踪^[7]. 文献[6]的算法中阈值的选取直接影响重构效果. 特别地, 在重构图像信号时, 如果阈值选择不合适, 就会出现未完全重构的块状区域, 使得重构效果明显降低. 之后又提出引入回溯思想的子空间匹配追踪^[8]和压缩采样匹配追踪^[9], 这两种算法类似, 较之前的算法最大区别在于对挑选出的候选集中原子组应用回溯思想剔除多余原子, 得到表

示原信号的最优原子组. 综合比较已有贪婪算法的优劣, 为提升基于压缩感知理论的信号重构效果, 针对重构效率较高的正则化正交匹配追踪 (Regularized Orthogonal Match Pursuit, ROMP) 算法受信号稀疏度影响而导致重构效果不稳定等缺点, 本文提出了一种基于弱选择正则化的正交匹配追踪图像重构算法. 该算法根据原子的弱选择标准^[10], 自适应地确定每次迭代的原子数目并更灵活地选择相应的原子组构成候选集, 然后通过正则化原则快速有效地在候选集中挑选出表示原信号的最优原子组. 这样的原子选择方式使得在信号稀疏度未知的条件下, 仍能完成稀疏信号的精确重构.

1 压缩感知信号重构

1.1 压缩感知信号重构模型

压缩感知理论指出: 对可压缩的信号通过远低于奈奎斯特采样率进行采样后, 仍能精确地恢复出原始信号. 即在 N 维原信号 $x \in R^N$ 是稀疏或可压缩的前提下, 为有效地从 M 维观测信号 $y \in R^M$ 中重建出 x , 一般情况下, $M \ll N$, 可通过求解如下最小 l_0 范数问题

$$\min \| \Psi^T x \|_{0} \text{ s. t. } y = A^{\text{CS}} x = \Phi \Psi^T x \quad (1)$$

然而, 该数学模型的求解需要列出 x 中所有非零项位置 C_N^K 种可能的线性组合, 其中 K 是信号稀疏度, 才能得到最优解. 故求解式(1)的数值计算极

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61071170)和教育部新世纪优秀人才支持计划资助

第一作者: 刘哲(1970-), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为压缩感知理论、信息融合、计算智能等. Email: 495454116@qq.com

收稿日期: 2012-05-07; 修回日期: 2012-07-19

不稳定并且是一个欠定多项式 (Nondeterministic Polynomial, NP) 难题^[11].

随后, Chen, Donoho 和 Saunders 指出, 当观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$ 满足有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP)^[12] 时, 求解一个更加简单的最小 l_1 范数优化问题会得到与式(1)等价的解^[13].

$$\min \|\Psi^T x\|_{1, s. t. y = A^{CS} x = \Phi \Psi^T x \quad (2)$$

1.2 压缩感知信号重构算法

基于压缩感知理论的信号重构算法中, 由于贪婪算法重构信号效率相对较高, 从而被广泛应用于信号处理领域.

传统的贪婪追踪算法完成稀疏信号的精确重构即通过求解式(2)的最小 l_1 范数问题, 综合考虑已有贪婪算法的不同特点, 本文将重点讨论重构效率较高的 ROMP 算法. 标准 ROMP 算法完成信号重构是基于上述数学模型中式(2)的求解来获得原信号的最优逼近. 具体过程是: 首先计算迭代余量 r 与压缩观测矩阵 Φ 中原子的相关性, 根据相关性大小从 Φ 中挑选出与信号稀疏度 K 数目相同的一组对应原子, 将它们相应的角标作为候选集 J ; 然后将候选集 J 中的原子组按照正则化原则比较, 选出重构原信号误差最小的原子组, 将其并入最终的支撑集 J_0 ; 最后由支撑集 J_0 中角标对应的原子构成的线性组合完成对原信号的逼近. 这一算法重构信号效率很高, 并且当信号的稀疏度 K 选择合适时, 重构效果也比较理想. 然而, 若待重构信号的稀疏度未知, 通过选定稀疏度的某一估计值, 采用此算法完成信号重构, 效果不稳定. 即当稀疏度的估计值选取合适时, 重构效果较为理想, 反之则不然. 针对标准的正则化正交匹配追踪算法这一不足, 本文引入原子的弱选择标准, 提出了一种基于弱选择正则化的正交匹配追踪图像重构算法, 使得当信号稀疏度未知时, 仍能够完成原信号的精确重构.

2 弱选择正则化正交匹配追踪信号重构

2.1 原子的弱选择标准

标准 ROMP 算法在重构信号的过程中, 算法的每次迭代是根据迭代余量 r 与观测矩阵 Φ 中原子的相关性, 挑选与信号稀疏度数目相同, 即 K 个原子的角标作为候选集 J , 那么如何选定此算法的稀疏度 K 直接影响原信号的重构效果. 此外, 对于图像信号重构问题, 这种固定数目的原子选择方式未能充分体现不同迭代余量 r 与观测矩阵 Φ 中各原子相关性的差异. 而且一般情况下, 图像信号稀疏变换后的稀疏度通常是未知的. 因此, 针对标准 ROMP 算法在信号重构中受信号稀疏度 K 影响这一不足, 对其引入原子的弱选择标准, 即

$$\{i | |g_i| \geq \alpha \cdot \max_j |g_j|\} \quad (3)$$

其中 $i \in J, \alpha \in (0, 1]$.

将迭代余量 r 与观测矩阵 Φ 中原子的相关性即内积值 g 满足式(3)的所有原子对应的角标 i 并入候选集 J 中, 则完成了一次原子的弱选择. 特别地, 当弱选择标准因子 $\alpha=1$ 时, 表示只选择一个相关性最大的原子.

将弱选择标准引入 ROMP 算法中, 目的是使原算法在信号重构过程中不受稀疏度的影响, 并且根据不同迭代余量 r 与观测矩阵 Φ 中各原子相关性的差异, 自适应地确定表示原信号的原子数目, 更灵活地挑选出表示原信号的原子候选集, 进而提升信号重构效果及稳定性.

2.2 弱选择正则化正交匹配追踪算法

在 ROMP 算法中引入原子的弱选择标准, 可以实现当原信号稀疏度未知时, 完成对原稀疏信号的精确重构. 以下是弱选择正则化正交匹配追踪算法的基本步骤:

输入: 观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$, 原稀疏信号观测值 y , 算法最大迭代次数 L , 重构的误差限 ϵ ;

1) 初始化: 初始余量 $r_0 = y$, 迭代次数初始值 $n=1$, 算法最大迭代次数 L , 信号重构的误差限 ϵ , 原子的角标集合 $\Lambda = \phi, J = \phi$;

2) 弱选择: 计算迭代余量和观测矩阵的内积值 $\{g_j | g_j = \langle r, \varphi_j \rangle\} (j=1, \dots, N)$, 并从其中找出满足式(3)的观测矩阵 Φ 中原子 φ_i 对应的角标值 i , 将其存入角标集 J 中;

3) 正则化过程: 对 J 中角标对应原子的相关系数进行正则化测试, 即该集中原子的相关系数必须满足 $|g_i| \leq 2 |g_j| (i, j \in J)$, 然后将正则化结果存入集合 J_0 中;

4) 更新表示原信号的原子支撑集 Φ_Λ , 其中 $\Lambda = \Lambda \cup J_0$;

5) 采用最小二乘法进行信号逼近并更新余量 $\hat{x} = \operatorname{argmin}_{i \in R^\Lambda} \|y - \Phi_\Lambda x\|_2, r_n = y - \Phi_\Lambda \hat{x}$;

6) 算法迭代判定: 若 $n \geq L$ 或 $|x - \hat{x}| \leq \epsilon$ 时, 停止迭代; 否则, 令 $r = r_n, n = n + 1$ 转至步骤 2).

输出: 重构信号的原子支撑集 Φ_Λ , 即由 Φ_Λ 中原子的线性组合表示原稀疏信号.

由上述步骤可以看出, 弱选择正则化正交匹配追踪算法完成稀疏信号的重构不依赖于原信号的稀疏度, 避免了标准 ROMP 算法中因信号稀疏度选择不合适而导致信号重构效果不理想. 另外, 较之其它同类算法中的固定数目原子选择方式, 本文算法中步骤 2) 的原子弱选择标准在结合不同迭代余量 r 与观测矩阵 Φ 中各原子相关性差异的情况下, 能够

灵活地确定表示原信号原子的数目,更好地挑选出表示原信号的候选集中的原子组,从而改善原稀疏信号的重构效果,增强算法的稳定性.

3 数值仿真及结果分析

以下实验都是在 Matlab7.0 环境下完成的,实验中利用小波变换对原图像进行稀疏分解,将傅里叶矩阵作为观测矩阵.

3.1 弱选择标准参量 α 的选取

为了确定本文算法中的参量 α ,实验一对大小均为 256×256 的不同类型图像:低频信息较多的

Bear 图像和低频信息较多的 Boat 图像应用该算法进行压缩感知重构.由于观测矩阵的随机性,实验中将程序运行多次并取其结果的平均值.为定量评价图像重构效果,本文采用峰值信噪比 PSNR 和最小均方差 MSE 作为客观评价指标.设 M 是压缩观测数目, N 是原图像信号的维数.当图像信号采样率 $M/N=0.2,0.3,0.4,0.5$ 时,即依次取压缩观测数目 $M=52,77,102,128$ 时,随着本文算法中弱选择标准参量 α 的线性变化,得到对应的图像重构结果.仿真实验结果如表 1.

表 1 不同压缩观测数目 M 随参量 α 线性变化重构效果比较

Table 1 Reconstruction performance of different measurements number M with the change of linear alpha

Images	M	52		77		102		128	
		PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE
Bear	0.15	17.84	1 067.6	27.97	103.7	32.93	33.14	34.94	20.87
	0.3	19.78	684.6	31.30	48.34	33.13	31.72	35.04	20.36
	0.45	21.79	430.9	29.45	73.75	33.02	32.43	34.99	20.60
	0.6	23.35	300.9	31.28	48.42	33.37	29.91	35.06	20.30
	0.75	22.31	382.4	30.79	54.19	33.20	31.08	35.05	20.35
	0.9	18.98	822.3	30.36	59.87	32.89	33.45	34.89	21.07
Boat	0.15	15.58	1 799	23.79	271.4	28.41	93.80	30.35	59.93
	0.3	15.06	2 026	24.40	236.3	28.52	91.39	30.42	58.98
	0.45	17.75	1 091	25.35	189.6	28.56	91.27	30.45	58.68
	0.6	19.25	772.8	25.31	191.3	28.49	92.05	30.49	58.18
	0.75	18.24	974.9	24.43	234.2	28.73	87.20	30.37	59.81
	0.9	16.49	1 459	24.26	244.4	28.45	92.91	30.28	60.98

由表 1 可以看出,当采样率 $M/N=0.2$ 时,选择不同的参量 α 重构结果差异较大,而随着采样率的增加,重构差距逐渐变小.此外,对图像 House 和 Barbara 进行同样的实验,可得到与表 1 一致的结论:当参量 $\alpha \in [0.3,0.75]$ 时,本文算法的压缩感知重构效果较优.

3.2 不同算法重构图像信号的效果比较

实验二从直观上给出不同算法重构图像的效果对比.对大小为 256×256 的 Boat 和 Bear 图像,当采样率 $M/N=0.5$ 时,分别应用文献[5,7,9]及本文算法进行压缩感知重构实验比较.结果如图 1,从图中可以看出,当采样率相同时,本文算法得到的重

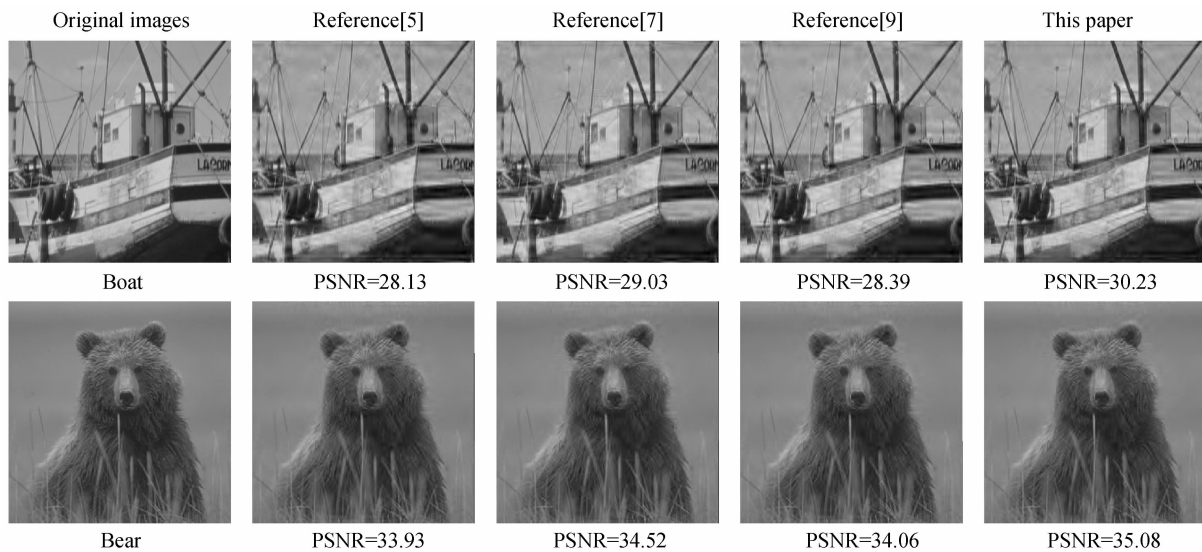


图 1 不同算法重构效果比较
Fig. 1 Reconstruction performance of different algorithms

构图像峰值信噪比 PSNR 均高于其它同类算法. 从视觉上看, Boat 图像中船的白色顶部棱角更清晰, Bear 图像中的左眼和脖子处的毛也更清楚. 另外, 为进一步比较本文算法与其它同类算法的重构效

果, 实验三对大小为 256×256 的不同特点的 Bear、House、Boat 和 Barbara 图像, 当采样率 $M/N = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 时, 分别应用文献[5, 7, 9]及本文算法进行压缩感知重构, 仿真结果如表 2.

表 2 不同压缩观测数目 M 时各算法重构效果比较

Table 2 Reconstruction performance of each algorithm with different measurements number M

Images	Results M	Reference[5]		Reference[7]		Reference[9]		This paper	
		PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE
Boat	52	16.59	1 424.8	21.86	423.81	18.18	988.06	23.35	300.98
	77	29.66	70.37	30.67	55.67	29.93	66.11	31.28	48.42
	102	32.23	38.90	32.83	33.87	32.46	36.93	33.37	29.91
	128	34.21	24.69	34.55	22.83	34.48	23.20	35.06	20.30
House	52	18.28	965.66	20.79	542.36	17.18	1 245.1	21.83	426.51
	77	25.62	178.32	26.02	162.61	25.85	169.02	27.15	125.45
	102	27.77	108.59	28.67	88.36	27.89	105.60	30.05	64.23
	128	30.20	62.02	31.31	48.12	30.40	59.32	32.12	39.92
Boat	52	17.57	1 137.5	18.24	974.98	17.49	1 157.8	19.25	772.80
	77	23.53	288.21	24.40	236.28	23.46	293.39	25.31	191.31
	102	25.83	169.62	27.58	113.64	26.11	159.37	28.49	92.05
	128	28.33	95.46	29.81	67.94	28.60	89.70	30.49	58.18
Barbara	52	16.21	1 557.2	19.66	703.30	17.87	1 062.2	20.76	546.07
	77	24.02	257.47	24.37	237.94	24.27	243.23	25.01	204.99
	102	26.50	145.73	27.68	110.85	26.94	131.55	28.32	95.66
	128	29.11	79.87	29.97	65.45	29.27	76.95	30.44	58.80

由表 2 可以看出, 随着观测数目的增加, 本文算法重构图像效果越来越好. 对于不同类型的图像, 当观测数目相同时, 本文算法重构图像效果相对文献[5, 9]算法有所提升, 特别当观测数目较小时, 重构结果提升明显. 与三个文献中算法重构效果最优的文献[7]算法比较, 峰值信噪比 PSNR 高出 0.5~1.5 dB, 最小均方差 MSE 也有所下降. 因此, 本文算法重构图像效果优于其它同类算法. 在图像重构的时间效率方面, 对于不同的图像, 随采样率的增加, 重构时间也不断增长. 其中文献[7]算法耗时最短, 在 2~10 s, 文献[5]与本文算法相当, 用时在 5~25 s 之间, 文献[9]算法耗时最长, 在 20~230 s 内.

4 结论

标准的 ROMP 算法需要以信号的稀疏度为先验条件完成信号的精确重构, 并且当稀疏度选取不合适时, 重构效果明显降低. 为克服这些缺点, 本文算法结合原子的弱选择标准, 相对于标准 ROMP 算法每次迭代选择固定数目即 K 个原子作为候选集, 本文算法中的弱选择标准使得每次迭代选取的原子数目因信号的稀疏性而异, 即实现了原子的自适应选定. 改进的算法实现了在稀疏度未知情况下, 稀疏信号的精确重构. 数值实验结果得到当采样率相同时, 本文算法重构效果较之 ROMP 和其它同类算法均有所提升. 然而, 该算法的原子选择方式增加了重

构时的运算量, 使得信号重构效率相比于 ROMP 算法有所下降, 故在这一方面还有待提出改进措施.

参考文献

- [1] HE Jin, ZHANG Qun, YANG Xiao-you, *et al.* Sampling technology of ISAIL[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(7): 1272-1277.
何劲, 张群, 杨小优, 等. 逆合成孔径成像激光雷达数据采样技术[J]. *光子学报*, 2010, **39**(7): 1272-1277.
- [2] XU Jian, CHANG Zhi-guo. Self-adaptive image sparse representation algorithm based on clustering and its application[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(2): 316-320.
徐健, 常志国. 基于聚类的自适应图像稀疏表示算法及其应用[J]. *光子学报*, 2011, **40**(2): 316-320.
- [3] YE Lei, YANG Zhen, WANG Tian-jing, *et al.* Compressed sensing of speech signal based on row echelon measurement matrix and dual affine scaling interior point reconstruction method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, **40**(3): 429-434.
叶蕾, 杨震, 王天荆, 等. 行阶梯观测矩阵、对偶仿射尺度内点重构算法下的语音压缩感知[J]. *电子学报*, 2012, **40**(3): 429-434.
- [4] FU Ran-di, JIN Wei, YE Ming, *et al.* Cloud image fusion using compressed sensing in aliasing-free contourlet domain[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(6): 955-960.
符冉迪, 金炜, 叶明, 等. 抗混叠轮廓波域采用压缩感知的云图融合方法[J]. *光子学报*, 2011, **40**(6): 955-960.
- [5] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655-4666.
- [6] DONOHO D L, TSAIG Y, DROR I, *et al.* Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, **58**(2): 1094-1121.

- [7] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 310-316.
- [8] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2230-2249.
- [9] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Communications of the ACM*, 2010, **53**(12): 93-100.
- [10] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Stagewise weak gradient pursuits[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(11): 4333-4346.
- [11] BARANIUK R. Compressive sensing [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118-126.
- [12] CANDES E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. *AcadèMie des Sciences*, 2008, **346**(9-10): 589-592.
- [13] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(1): 129-159.

Image Reconstruction Based on Weak Selected Regularized Orthogonal Match Pursuit Algorithm

LIU Zhe, ZHANG He-ni, ZHANG Yong-liang, HAO Min-hui

(School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: Regularized Orthogonal Match Pursuit (ROMP) is widely applied as a signal reconstruction algorithm. Despite its high efficiency, ROMP requires the prior knowledge of signal sparsity, and would be unstable if the sparsity level is improperly estimated. To overcome this drawback, a weak selection strategy was introduced to adaptively determine the number of atoms and the candidate atoms by estimating the relevance between iterative residue and measurement matrix of the original ROMP algorithm. Thus, an optimal atom set for the signal reconstruction procedure could be selected from the candidate atoms according to the regularization principle. Numerical results demonstrate that the proposed method outperforms other greedy algorithms with 0.5~1.5 dB higher PSNR and much lower MSE.

Key words: Compressed sensing; Weak selection; Regularize; Match pursuit; Signal reconstruction