

doi: 10. 3788/gzxb20124110. 1211

# 单幅条纹图相位解调的小波分析方法

杨初平, 翁嘉文, 李海, 谭穗妍

(华南农业大学 理学院应用物理系, 广州 510642)

**摘 要:** 相位解调是条纹相位分析的关键问题. 本文提出一种应用小波频率估计联合频率导数对变形条纹进行瞬时频率分析, 从中提取参考基频, 从而依靠单一变形条纹实现相位解调的方法. 首先, 理论上证明了当变形条纹瞬时频率空间导数等于零, 该空间点的瞬时频率等于参考基频频率; 其次, 引入 Gabor 小波提取变形条纹的瞬时频率空间分布, 利用变形条纹瞬时频率的空间导数分布识别提取参考基频, 从而实现相位解调. 利用该方法进行了三维形貌测量的实验, 结果表明该方法在实现相位解调中效果良好.

**关键词:** 光学测量; 条纹传感; 小波变换; 瞬时频率估计; 频率导数; 相位解调

**中图分类号:** O439

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2012)10-1211-6

## 0 引言

在条纹传感技术中, 相位测量轮廓术和傅里叶变换轮廓术<sup>[1]</sup>是两种重要的条纹三维传感相位分析技术, 已在工业检测、实物仿型、医学诊断等领域获得广泛应用, 其测量原理是利用三维面形高度调制的条纹相位, 通过相位解调获得三维高度分布. 相位解调是条纹传感的关键问题, 为此, 近年来, 出现各种有效的条纹相位解调方法, 如改进的傅里叶变换法<sup>[2-3]</sup>、相移法<sup>[4-7]</sup>、多频条纹<sup>[8]</sup>、多尺度窗口傅里叶变换<sup>[9]</sup>、一维小波变换<sup>[10-14]</sup>和二维小波变换<sup>[15-16]</sup>等. 这些相位解调方法中需要分别采集变形条纹和参考条纹, 通过比较两者的相位差获得对应三维高度. 文献<sup>[17]</sup>进一步提出在一幅变形条纹中同时记录参考条纹方法, 文献<sup>[18]</sup>提出在变形条纹的平坦区域提取参考基频.

依据相位差是变形条纹基频相位减去参考基频相位的思想, 利用单一变形条纹实现相位解调意味着必须从变形条纹的瞬时频率空间分布中提取参考基频. 这种方法的实现将丰富条纹相位分析的相位解调方法, 拓展条纹三维传感的应用领域. 本文在三维传感傅里叶变换轮廓术基础上, 研究从变形条纹的瞬时频率信息中提取参考基频. 理论分析了变形条纹的瞬时频率与高度分布的关系, 当变形条纹瞬时频率分布的空间导数等于零, 该空间点的瞬时频率等于参考基频频率. 采用一维 Gabor 小波变换频

率估计来提取变形条纹各个空间点的瞬时频率信息, 依据该条件从中识别并提取参考基频, 进一步实现相位解调.

## 1 理论分析

### 1.1 条纹相位分析

光路以平行轴测量系统为例, 如图 1. CCD 摄像机和数字投影仪的光轴分别垂直参考平面 ACB, 两

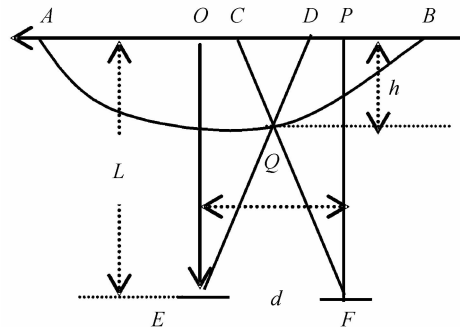


图 1 光路示意图  
Fig. 1 Diagram of optical path

者的出瞳连线 EF 平行参考平面. 一个纵向正弦条纹投射到测量物体表面, 参考平面上的参考条纹和物面上的变形条纹分别表示为<sup>[1]</sup>

$$g_r(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp \{j[2\pi n f_0 x + \varphi_n(x, y)]\} \quad (1)$$

$$g_d(x, y) = r(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{dn} \exp \{j[2\pi n f_0 x + \varphi_{dn}(x, y)]\} \quad (2)$$

基金项目: 广东省自然科学基金项目(No. 9151064201000035)资助

第一作者: 杨初平(1970-), 男, 副教授, 主要研究方向为光信息处理. Email: yangchp@scau.edu.cn

收稿日期: 2012-04-16; 修回日期: 2012-06-27

式中  $f_0$  是条纹的基频频率,  $n$  是整数,  $A_m$ 、 $A_{dn}$  分别是参考条纹和变形条纹傅里叶级数的振幅,  $\varphi_m(x, y)$ 、 $\varphi_{dn}(x, y)$  分别是参考条纹和变形条纹沿  $x$  轴方向的初始调制相位,  $r(x, y)$  表示物面的归一化反射率. 分别滤波、逆傅里叶变换得到参考基频和变形条纹的基频, 得到<sup>[1]</sup>

$$g_{r_1}(x, y) = A_{r_1} \exp \{j[\phi_{r_1}(x, y)]\} = A_{r_1} \exp \{j[2\pi f_0 x + \varphi_{r_1}(x, y)]\} \quad (3)$$

$$g_{d_1}(x, y) = r(x, y) A_{d_1} \exp \{j[\phi_{d_1}(x, y)]\} = r(x, y) A_{d_1} \exp \{j[2\pi f_0 x + \varphi_{d_1}(x, y)]\} \quad (4)$$

式(3)和(4)的虚部相减, 得到相位差

$$\Delta\varphi_1(x, y) = \phi_{d_1}(x, y) - \phi_{r_1}(x, y) = 2\pi f_0 x + \varphi_{d_1}(x, y) - 2\pi f_0 x - \varphi_{r_1}(x, y) = 2\pi f_0 \overline{CD} \quad (5)$$

式(5)中  $\overline{CD}$  表示由于高度调制而产生条纹位移. 该相位差经过相位展开可得到  $Q$  点的调制相位.

从变形条纹提取的参考基频与原来参考基频相比可能产生一个整体的相位平移  $\delta$ , 因而提取的参考基频可表示为

$$g'_{r_1}(x, y) = A_{r_1} \exp \{j[2\pi f_0 x + \varphi_{r_1}(x, y) + \delta]\} \quad (6)$$

则相应  $Q$  点的调制相位为

$$\Delta\varphi_2(x, y) = 2\pi f_0 x + \varphi_{d_1}(x, y) - 2\pi f_0 x - [\varphi_{r_1}(x, y) + \delta] = \Delta\varphi_1(x, y) - \delta \quad (7)$$

显然, 三维物体表面上的每个测量点都产生一个相同的相位移  $\delta$ , 但任意两个高度点的相位差

$$\Delta\varphi(x, y) = \Delta\varphi_2(x_2, y) - \Delta\varphi_2(x_1, y) = \Delta\varphi_1(x_2, y) - \Delta\varphi_1(x_1, y)$$

依然保持不变. 按照高度  $h(x, y)$  与相位差  $\Delta\varphi(x, y)$  的转换公式<sup>[1]</sup>

$$\Delta\varphi(x, y) = -\frac{2\pi f_0 dh(x, y)}{L - h(x, y)} \quad (8)$$

计算出来的高度保持不变.

## 1.2 变形条纹瞬时频率和频率导数

从式(5)可知, 需要变形条纹基频相位与参考基频相位比较才能获得调制相位. 依据这种方法, 要采用单一变形条纹实现相位解调, 必须从变形条纹的瞬时频率分布中找到参考基频. 为此, 下面分析变形条纹瞬时频率与参考基频和高度分布的关系. 根据式(4)、(5)、(8), 变形条纹第  $y$  行的相位函数可以表示为

$$\phi_{d_1}(x, y) = 2\pi f_0 x + \varphi_{d_1}(x, y) = 2\pi f_0 x + \varphi_{r_1}(x, y) + \Delta\varphi_1(x, y) = 2\pi f_0 x + \varphi_{r_1}(x, y) - \frac{2\pi f_0 h(x, y)d}{L - h(x, y)} \quad (9)$$

相位函数的导数等于瞬时频率, 式(9)对  $x$  进行一次求导运算, 得第  $y$  行瞬时频率函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi_{d_1}(x, y)}{\partial x} = f_0 - \frac{f_0 L}{[L - h(x, y)]^2} \cdot$$

$$\frac{\partial h(x, y)d}{\partial x} \quad (10)$$

式(10)显示由于受到高度的调制, 瞬时频率在参考基频的基础上随着高度分布函数的导数  $\frac{\partial h(x, y)}{\partial x}$  发生变化. 如果物体面形第  $y$  行的局部区间  $(a, b)$  高度分布满足 Fermat 定理, 则在物体面形第  $y$  行的局部区间  $(a, b)$  高度分布中一定存在一个空间点(局部极值点)  $x_0$  满足  $\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$ , 该点的瞬时频率  $f(x, y) = f_0 - \frac{f_0 L}{[L - h(x, y)]^2} \frac{\partial h(x, y)d}{\partial x} = f_0$ , 等于参考基频频率.

为了在瞬时频率分布曲线上识别参考基频频率, 对式(10)进行一次  $x$  求导, 得瞬时频率函数的导数为

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{df_0 L [h''(x, y) [L - h(x, y)]^2]}{[L - h(x, y)]^4} + \frac{df_0 L [2[h'(x, y)]^2 [L - h(x, y)]]}{[L - h(x, y)]^4} \quad (11)$$

对某一行高度分布函数中存在极值点  $x = x_0$  的局部区域, 如图 2(a)、(b)所示, 局部高度分布可以近似表示为  $h(x, y) = a_m(x - x_0)^{2m} + h_m$ ,  $a_m$ 、 $h_m$  是系数,  $a_m \neq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . 若  $m \geq 2$ , 在局部极值点  $x = x_0$  处有  $h'(x_0, y) = h''(x_0, y) = 0$ , 依据式(11),  $f'(x, y) = 0$ . 若  $m = 1$ , 局部高度分布是二次函数曲线, 虽然  $h'(x_0, y) = 0$ , 但  $h''(x_0, y) \neq 0$ , 因此  $f'(x, y) \neq 0$ .

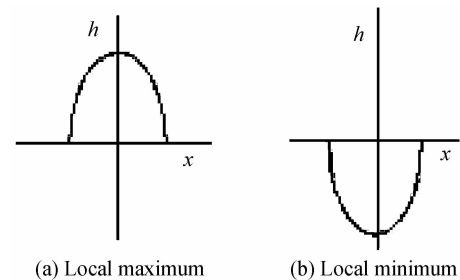


图2 局部高度分布

Fig. 2 Local height distributions

虽然知道满足 Fermat 定理的局部区间  $(a, b)$  高度分布的极值点  $x_0$  满足  $\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$ , 可是对变形条纹的某一行事先无法了解高度分布, 但能获得瞬时频率分布, 因而需要对该局部区间  $(a, b)$  的瞬时频率分布特点进行分析, 依据  $f'(x, y) = 0$  识别  $\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$  的空间点.

接下来分析存在高度极值点的局部区域的瞬时

频率分布特点和瞬时频率导数特点. 局部区域高度分布函数满足  $m \geq 2$  的情况.

1) 若  $x_0$  是局部区域的高度极大值位置, 则该点满足  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$ ,  $x_0$  的左、右侧近邻点分别满足  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x < x_0} > 0$  和  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x > x_0} < 0$ , 根据式 (10) 可知此局部区域瞬时频率分布满足  $f(x, y)|_{x < x_0} < f(x, y)|_{x=x_0} = f_0 < f(x, y)|_{x > x_0}$ , 相应地  $x_0$  左侧瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x < x_0} > 0$ , 而  $x_0$  右侧瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x > x_0} > 0$ , 在  $x_0$  有  $f'(x, y)|_{x=x_0} = 0$ , 则所找瞬时频率等于参考基频频率的位置  $x_0$  的瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x=x_0} = 0$  是极小值.

2) 若  $x_0$  是局部区域的高度极小值位置, 则该点满足  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$ ,  $x_0$  的左、右侧近邻点分别满足  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x < x_0} < 0$  和  $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x > x_0} > 0$ , 根据式 (10) 可知此局部区域瞬时频率分布满足  $f(x, y)|_{x < x_0} > f(x, y)|_{x=x_0} = f_0 > f(x, y)|_{x > x_0}$ , 相应地  $x_0$  左侧瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x < x_0} < 0$ , 而  $x_0$  右侧瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x > x_0} < 0$ , 在  $x_0$  有  $f'(x, y)|_{x=x_0} = 0$ , 则所找瞬时频率等于参考基频频率的位置  $x_0$  的瞬时频率导数  $f'(x, y)|_{x=x_0} = 0$  是极大值.

### 1.3 Gabor 小波变换频率估计

应用 Gabor 小波变换频率估计提取变形条纹各个空间点的瞬时频率. Gabor 小波变换的定义为<sup>[10]</sup>

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi_{a,b}^*(x) dx \quad (12)$$

式中  $W_f(a, b)$  小波系数,  $g(x)$  是某行条纹的灰度分布,  $\psi_{a,b}^*(x) = \frac{1}{a} \psi \left[ \frac{x-b}{a} \right]$  是小波函数,  $a$  是尺度因子,  $b$  是位置因子. 母小波函数表示为<sup>[10]</sup>

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \exp \left[ -\frac{(2\pi/\gamma)^2 x^2}{2} + j2\pi x \right] \\ \gamma = \pi \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \end{cases} \quad (13)$$

小波系数  $W_f(a, b)$  的振幅和相位定义为<sup>[13]</sup>

$$A(a, b) = \sqrt{\{\operatorname{Re}[W_f(a, b)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[W_f(a, b)]\}^2} \quad (14)$$

$$\varphi(a, b) = \arctan \left[ \frac{\operatorname{Im}[W_f(a, b)]}{\operatorname{Re}[W_f(a, b)]} \right] \quad (15)$$

通过检测每个空间点不同尺度因子小波变换系数的最大值, 即小波脊<sup>[10-14]</sup>, 可以获得该点的瞬时频率  $f_b$  和相位  $\varphi(a_m(b), b)$ , 分别表示为

$$f_b = 1/a_m(b) \quad (16)$$

$$\varphi(a_m(b), b) = 2\pi f_b b + \varphi_b \quad (17)$$

式中系数  $a_m(b)$  是与小波脊对应的尺度因子,  $\varphi_b$  是初始相位.

应用小波频率估计提取变形条纹某一行瞬时频率分布, 依据  $f'(x, y) = 0$ , 可以识别瞬时频率等于参考基频频率的空间点  $x = b$ , 提取相应的瞬时频率  $f_0 = f_b$  和相位, 重构参考基频为

$$g_{\text{rec}}(x, y) = A(x, y) \exp \{j[2\pi f_0 x + \varphi_b]\} \quad (18)$$

应用式 (18)、(4)、(7), 可以计算每个测量点的调制相位.

## 2 相位解调的算法步骤

综合 1.2 和 1.3 节所述, 在变形条纹某行瞬时频率分布曲线上, 寻找某个空间点  $x_0$  的瞬时频率满足  $f(x, y) = f_0$  的算法步骤可以归纳为

1) 先用小波变换对变形条纹某行进行瞬时频率, 获得瞬时频率分布曲线;

2) 在瞬时频率分布曲线上寻找频率逐渐增大或逐渐减小的局部区间;

3) 考虑到瞬时频率的不连续性, 可对这些局部区间瞬时频率分布进行多项式拟合, 再计算这些区间瞬时频率导数, 找出  $f'(x, y) = 0$  的空间点, 则该空间点的瞬时频率一定满足  $f(x, y) = f_0$ . 提取该点的频率和相位;

4) 重建参考基频并与变形条纹一起计算调制相位.

## 3 实验

图 1 中  $L = 230 \text{ cm}$ ,  $d = 24 \text{ cm}$  且  $h < 30 \text{ cm}$ . 数字投影仪把一个周期为 4 pixels 纵向正弦条纹投射到物体表面, 变形条纹通过 CCD 摄像机采集, 尺寸为  $640 \times 480 \text{ pixels}$ .

测试物体是一张石膏脸, 参考条纹和变形条纹分别如图 3、图 4 所示. 按照第 2 节提出的算法步骤, 首先采用 Gabor 小波变换对变形条纹第 240 行进行瞬时频率分析, 获得瞬时频率分布如图 5(全图)、图 6(部分), 图 5 中有五个频率逐渐增大或减

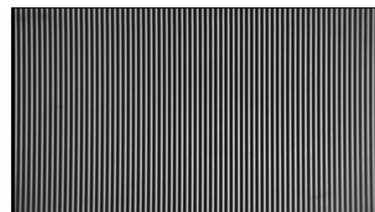


图 3 参考条纹

Fig. 3 Original fringe pattern

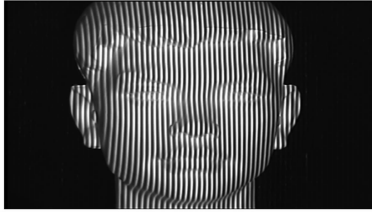


图4 变形条纹  
Fig. 4 Deformed fringe pattern

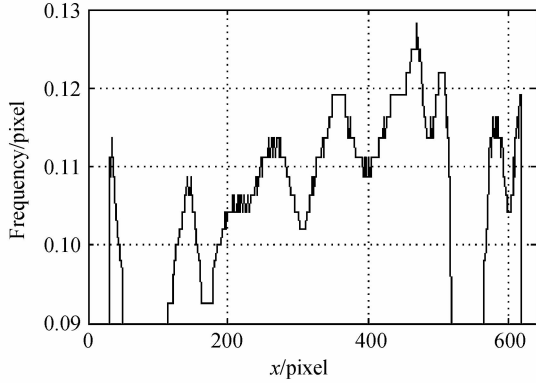


图5 变形条纹 240<sup>th</sup>行瞬时频率分布  
Fig. 5 Instantaneous frequency distribution of row 240 of deformed fringe pattern

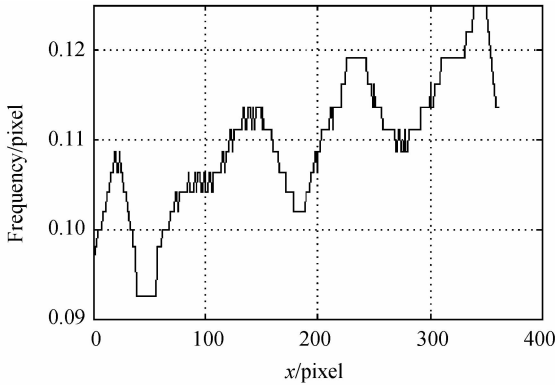


图6 图5的部分  
Fig. 6 Part of Fig. 5

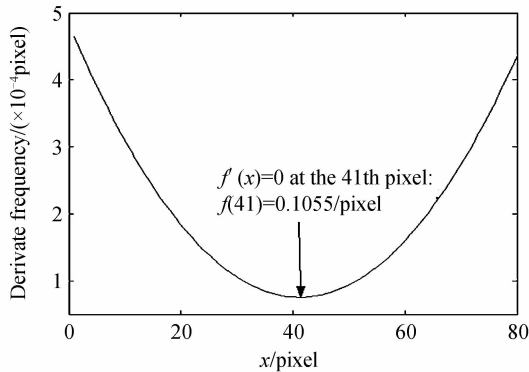


图7 第180~260像素瞬时频率拟合数据的导数频率分布  
Fig. 7 Derivative frequency distribution based on the fitting data from the 180<sup>th</sup> pixel to the 260<sup>th</sup> pixel

小像素区间:第180~260 pixels、第270~300 pixels、第310~350 pixels、第365~395 pixels、第400~465 pixels,分别对它们进行多项式拟合,再从拟合数据计算瞬时频率导数分布,依据  $f'(x,y)=0$  识别得

到五个参考基频频率(注意,这些频率点虽然位于局部高度分布的极值点,但不是位于瞬时频率分布曲线的局部极值点)分别为0.105 5/pixel、0.108 1/pixel、0.111 5/pixel、0.112 3/pixel、0.117 4/pixel,它们的平均值为0.110 96/pixel.图7是第180~260 pixel区间的瞬时频率导数分布图.

为了把获得的参考基频与参考条纹的实际频率比较,也采用小波变换分析参考条纹的瞬时频率分布,参考条纹第240行之第140~400个像素的瞬时频率分布如图8(折线是 Gabor 小波变换频率估计得到的数据,光滑线是零次多项拟合数据),频率起伏范围约是0.002/pixel,零次多项式拟合得到的参考条纹频率为0.110 65/pixel.与上述的平均值很接近.图9是应用变形条纹和重建参考条纹提取的调制相位.

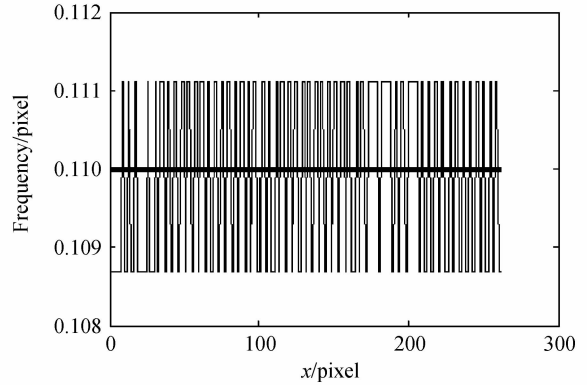


图8 参考条纹 240<sup>th</sup>行瞬时频率分布  
Fig. 8 Instantaneous frequency distribution of row 240<sup>th</sup> row of original fringe pattern (thick line is the fitting data, folding line the measuring data)

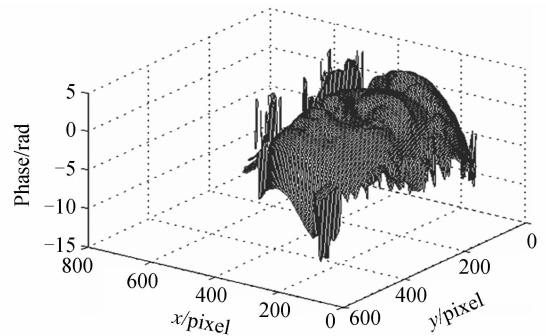


图9 展开相位  
Fig. 9 Unwrapped phase distribution

从上述实验数据可见,从变形条纹瞬时频率空间分布中提取出来的五个参考基频呈现逐渐上升的现象,其原因可以分析如下:理论上投影光轴严格垂直参考平面,实际上投影光轴会偏离垂直方向,就导致这种现象.为了减少这种因素对参考基频的影响,可以把提取的若干个参考基频进行平均运算.

应用小波变换提取某个空间点的瞬时频率时,需要用不同尺度对该点的信号进行小波变换,然后

寻找小波脊,为了提高频率提取准确度,尺度参量的合理选择也是一个需要注意的问题<sup>[19]</sup>.提取瞬时频率的误差可以分析如下:实验中采用的小波尺度间隔是 $\Delta a$ ,假设空间点瞬时频率对应的小波尺度是 $a_0$ ,实际提取得到的小波尺度是 $a = a_0 \pm \Delta a$ ,频率误差等于 $\Delta f = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0 \pm \Delta a} \approx \pm \frac{\Delta a}{a_0^2}$ ,实验中 $\Delta a = 0.2, a_0 \approx 10$ ,因此 $\Delta f \approx \pm \frac{0.2}{100} = \pm 0.002/\text{pixel}$ .

对于复杂面形的瞬时频率分布,由于小波尺度的离散特点,提取的各个空间点瞬时频率是不连续的,必须进行分段拟合,才能准确反映各段瞬时频率分布并找到参考基频.要寻找变形条纹瞬时频率等于参考基频的空间点,虽然理论分析结果是要找满足 $f'(x, y) = 0$ 的空间点,但由于离散数据处理结果,实际上只能在 $f'(x, y) \approx 0$ 处找.

本文目前仅针对局部高度分布存在极值点的三维形貌的情况(满足二次函数曲线的局部高度分布虽然存在瞬时频率等于参考基频的极值点(因为 $\left. \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$ ),但不满足 $f'(x, y) = 0$ ,因而无法识别),对不具有这种特点的高度分布,如何实现仅采集单一变形条纹实现相位解调还需要进一步研究.

## 4 结论

针对局部高度分布存在极值点的三维形貌,提出小波分析与频率导数联合,从变形条纹瞬时频率空间分布中提取参考基频,从而依靠单一变形条纹实现相位解调.给出变形条纹瞬时频率与高度分布函数的关系,获得从变形条纹瞬时频率空间分布中识别参考基频的条件是瞬时频率导数等于零.本文的分析目前仅针对局部高度分布存在极值的三维形貌情况,对不具有这种特点的高度分布,如何实现仅采集单一变形条纹实现相位解调还需要进一步研究.

### 参考文献

[1] TAKETA M, MUTOH K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes[J]. *Applied Optics*, 1983, **22**(24): 3977-3982.

[2] LIU Da-hai; LIN Bin. Fourier transform profilometry using zero frequency elimination based on gray modulation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(11): 1697-1701.  
刘大海,林斌.利用强度调制消除零频的傅里叶变换轮廓测量[J].*光子学报*, 2011, **40**(11): 1697-1701.

[3] YANG Chu-ping; WENG Jia-wen; WANG Jian-wei. Distortion measurement and calibration technique based on phase analysis for carrier-fringe pattern[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(2): 317-319.

杨初平;翁嘉文;王健伟.基于载频条纹相位分析的畸变测量和校正[J].*光子学报*, 2010, **39**(2): 317-319.

[4] XUE Lian, SU Xian-yu. Phase-unwrapping algorithm based frequency analysis for measurement of a complex object by the phase measuring profilometry method[J]. *Applied Optics*, 2001, **40**(8): 1207-1215.

[5] TAO Xian, SU Xian-yu. Area modulation grating for sinusoidal structure illumination on phase measuring profilometry[J]. *Applied Optics*, 2001, **40**(8): 1201-1206.

[6] ZHENG Rui-hua, WANG Yu-xiao, ZHANG Xue-ru, et al. Two-dimensional phase-measuring profilometry[J]. *Applied Optics*, 2005, **44**(6): 954-958.

[7] YANG Fu-jun HE Xiao-yuan. Two-step phase-shifting fringe projection profilometry: intensity derivative approach [J]. *Applied Optics*, 2007, **46**(29): 7172-7178.

[8] HAO Yu-ding, ZHAO Yang, LI Da-sheng. Multifrequency grating projection profilometry based on the nonlinear excess fraction method[J]. *Applied Optics*, 1999, **38**(19): 4106-4110.

[9] QIN Ke-mao, WANG Hai-xia, GAO Wen-jing. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: theoretical analyses[J]. *Applied Optics*, 2008, **47**(29): 5408-5419.

[10] ZHONG Jin-gang, WENG Jia-wen. Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform[J]. *Optics Letters*, 2005, **30**(19): 2560-2562.

[11] QUAN Chen-gen, TAY Cho-Jui, CHEN Lu-jie. Fringe-density estimation by continuous wavelet transform [J]. *Applied Optics*, 2005, **44**(12): 2359-2365.

[12] UPPUTURI Paul Kumar, NANDIGMA Krishna Mohan, MAHENDA Prasad Kothiyal. Time average vibration fringe analysis using Hilbert transformation[J]. *Applied Optics*, 2010, **49**(30): 5777-5786.

[13] XIONG Liu-dong, JIA Shu-hai. Phase-error analysis and elimination for nonsinusoidal waveforms in Hilbert transform digital-fringe projection profilometry [J]. *Optics Letters*, 2009, **34**(15): 2363-2365.

[14] LI Si-kun, SU Xian-yu, CHEN Wen-jing. Wavelet ridge techniques in optical fringe pattern analysis[J]. *Journal of Optical Society of America A*, 2010, **27**(6): 1245-1254.

[15] ABID A Z, GDEISAT M A, BURDON D R, et al. Spatial fringe pattern analysis using the two-dimensional continuous wavelet transform employing a cost function[J]. *Applied Optics*, 2007, **46**(24): 6120-6126.

[16] GDEISAT M A, BURDON D R, LALOR M J. Spatial carrier fringe pattern demodulation by use of a two-dimensional continuous wavelet transform [J]. *Applied Optics*, 2006, **45**(34): 8722-8732.

[17] YANG Chu-ping, WENG Jia-wen. Fourier transform profilometry by original fringe reconstruction from deformed fringe pattern[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1287-1290.  
杨初平,翁嘉文.基准光栅重构傅里叶变换轮廓术[J].*光学学报*, 2008, **28**(7): 1287-1290.

[18] YANG Chu-ping, WENG Jia-wen, ZHAO Jing, et al. Extract original fringe information from deformed fringe pattern[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3078-3041.  
杨初平,翁嘉文,赵静,等.从变形条纹提取基准光栅信息[J].*光学学报*, 2009, **29**(11): 3078-3041.

[19] WENG Jia-wen, ZHONG Jin-gang. Scale value decision method for discrete grid gabor wavelet transform[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2006, **11**(9): 1266-1270.  
翁嘉文,钟金钢.离散栅格 Gabor 小波变换的尺度参量取值方法[J].*中国图象图形学报*, 2006, **11**(9): 1266-1270.

## Phase Demodulation Using a Single Deformed Fringe Pattern by Wavelet Analysis

YANG Chu-ping, WENG Jia-wen, LI Hai, TAN Sui-yan

*(Department of Physics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)*

**Abstract:** To realize phase demodulation using a single deformed fringe pattern in 3D fringe sensing, a method is proposed. In the method, instantaneous frequency estimation of wavelet transform is applied to the deformed fringe pattern, and derivative frequency is used to directly extract the fundamental spectrum of the original fringe pattern from the instantaneous spectrum of its deformed fringe pattern. Firstly, theoretical analysis shows that if the instantaneous frequency at a certain position of the deformed fringe pattern is equal to the fundamental frequency of its original fringe pattern, the derivative frequency at such position is zero. Secondly, the instantaneous spectrum of the deformed fringe pattern is experimentally estimated by Gabor wavelet transform. Finally, the fundamental spectrum of the original fringe pattern is identified and obtained from the above instantaneous spectrum. It means that a single deformed fringe pattern is enough to realize phase demodulation. Experimental results of 3D shape measurement show the good effect of the proposed method in phase modulation.

**Key words:** Optical measurement; Fringe sensing; Gabor wavelet transform; Instantaneous frequency estimation; Derivative frequency; Phase demodulation