

文章编号:1004-4213(2011)09-1392-5

无相互作用费米量子信道直积态容量研究

彭永刚, 巩龙

(南京邮电大学 理学院 应用物理系, 南京 210003)

摘 要:用费米线性光学方法,提出无相互作用费米量子信道物理模型.用平稳量子高斯态协方差矩阵性质及 Majorization 不等式理论,推导出在平稳高斯输入态下费米量子信道最小输出熵的表达式.利用在 n 模费米系统添加一个额外模的方法,得到平稳高斯态和高斯态输出熵的关系;利用此关系式,借助在高斯输入态下费米信道最小输出熵值是可达的猜测,推导出无相互作用费米信道直积态容量的表达式.最后,用最小输出熵的迭代算法验证已推出的费米信道最小输出熵表达式正确性,数值计算结果表明:对于带噪声的无相互作用费米量子信道,已推出最小输出熵与数值计算结果的吻合度可以达到 $10e-9$.

关键词:量子信道;无相互作用费米系统;直积态容量;量子高斯态;最小输出熵

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20114009.1392

0 引言

通过量子信道传输经典信息是量子信息论研究的基本问题之一,它受到广泛关注^[1-12],目前已经知道如何计算量子信道 ϕ 直积态容量,直积态容量的上限由 Holevo-Schumacher-Westmoreland 定理^[1]给出,Holevo-Schumacher-Westmoreland 定理为特定的带噪声量子信道 ϕ 的直积态容量提供了有效计算方法,在某些情况下允许导出精确的表达式,但计算起来比较困难.2001年,A. S. Holevo 和 R. F. Werner^[2]导出玻色衰减量子信道直积态容量的表示式.2004年,John Cortese^[3]推导出一类么正信道的直积态容量.2007年,Aditi Sen(De)^[4]等比较了全同玻色子和费米子无记忆量子信道的直积态容量.2009年,T. Dorlas^[5]等研究了有记忆量子信道的直积态容量.2010年,F. Caruso^[6]等提出在通信网中噪声能提高信道直积态容量.

2001年,E. Knill^[7]等提出了用费米线性光学方法实现通用量子计算.2002年,B. Terhal^[8]等分别用费米线性光学方法研究了无相互作用电子系统的量子计算能力,本文用费米线性光学方法提出了无相互作用费米量子信道的物理模型,利用该信道的协方差对称性,借助在高斯输入态下费米信道最小输出熵值是可达的猜测,从理论上推导出无相互作用费米量子信道直积态容量表达式,再用最小输出熵迭代算法来验证这个直积态容量表达式的正

确性.

1 无相互作用费米量子信道物理模型

在费米线性光学^[7-9]中,无相互作用 n 费米模组成系统可由产生算符 \hat{a}_j^\dagger 和湮灭算符 \hat{a}_j 描述, $j=1, \dots, n$,系统的演化由二次型哈密顿量^[9]描述:

$$H = \sum_{j=1}^n \kappa_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + H_t + H_s \quad (1)$$

κ_j 表示第 j 费米模的能量,

$$H_t = \sum_{1 \leq j < k \leq n} t_{jk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \bar{t}_{jk} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j \quad (2)$$

表示隧穿过程,

$$H_s = \sum_{1 \leq j < k \leq n} s_{jk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger + \bar{s}_{jk} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j \quad (3)$$

如果费米子是电子, H_s 描述系统和 p -体波超导体之间的相互作用.

无相互作用费米系统和环境相互作用随时间的演化可看作量子信道,例如,单费米模系统,它由产生和湮灭算符 \hat{a}^\dagger, \hat{a} 描述,假设与系统相互作用的环境也由产生和湮灭算符 $\hat{a}_e^\dagger, \hat{a}_e$ 描述,这样系统与环境的作用由跃迁哈密顿量表示

$$H_{\text{int}} = g(\hat{a}^\dagger \hat{a}_e + \hat{a}_e^\dagger \hat{a}) \quad (4)$$

用 ρ 和 ρ_e 表示单费米模系统和环境的密度算子,如果环境的初始态是最大混合态,即

$$\rho_e = (1/2)I \quad (5)$$

那么描述系统末态的密度算子 ρ' 等于总密度算子对环境希尔伯特空间求偏迹

基金项目:国家自然科学基金(No. 10904074)资助

第一作者:彭永刚(1964-),男,副教授,主要研究方向为量子信息. Email: pengyg@njupt.edu.cn

收稿日期:2011-02-16;修回日期:2011-04-29

$$\rho' = \phi(\rho) = \text{Tr}_c(U\rho \otimes \rho_c U^+) \quad (6)$$

其中,

$$U = \exp(-iH_{\text{int}}t) \quad (7)$$

容易验证

$$\phi(I) = I \quad (8)$$

$$\phi(\hat{a}) = \lambda \hat{a} \quad (9)$$

$$\phi(\hat{a}^+ \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^+) = \lambda^2 (\hat{a}^+ \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^+) \quad (10)$$

式中 $\lambda = \cos(gt)$, 引进马约拉纳费米算符 \hat{c}

$$\hat{c}_1 = \hat{a}_1^+ + \hat{a}_1 \quad (11)$$

$$\hat{c}_2 = (-i)(\hat{a}_1^+ - \hat{a}_1) \quad (12)$$

映射 ϕ 改写为

$$\phi(\hat{c}_j) = \lambda \hat{c}_j \quad (13)$$

$$\phi(\hat{c}_1 \hat{c}_2) = \lambda^2 \hat{c}_1 \hat{c}_2 \quad (14)$$

一般地,无相互作用 n 费米模系统可由马约拉纳费

米算符 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{2n}$ 描述

$$\hat{c}_{2j-1} = \hat{a}_j^+ + \hat{a}_j \quad (15)$$

$$\hat{c}_{2j} = (-i)(\hat{a}_j^+ - \hat{a}_j) \quad (16)$$

式中 $1 \leq j \leq n$, 马约拉纳费米算符 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{2n}$ 遵守费米-狄拉克对易法则

$$\hat{c}_p \hat{c}_q + \hat{c}_q \hat{c}_p = 2\delta_{pq} \hat{I} \quad (17)$$

无相互作用 n 费米模系统的哈密顿量式(3)可由马

约拉纳费米算符 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{2n}$ 表示为

$$H = \frac{i}{4} \sum_{p,q=1}^{2n} H_{pq} \hat{c}_p \hat{c}_q \quad (18)$$

式中 $\{H_{pq}\}$ 是任意反对称 $2n \times 2n$ 的实矩阵.

作用在 n 量子比特上的一个任意线性算子,可

以唯一地用 4^n 单项式 \hat{c}_j^{\pm} 的线性组合表示为

$$\hat{c}(\mathbf{x}) = \hat{c}_1^{x_1} \hat{c}_2^{x_2} \dots \hat{c}_{2n}^{x_{2n}} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$ 是一个 $2n$ 比特的二进制串.

无相互作用 n 费米模系统与环境的随时间演化,描述系统末态的密度算子 ρ' 等于总密度算子对环境希尔伯特空间求偏迹

$$\rho' = \phi(\rho) = \text{Tr}(U\rho \otimes \rho_c U^+) \quad (20)$$

此映射 ϕ 可作为量子信道.

$$\phi(I) = I \quad (21)$$

$$\phi(\hat{c}_p) = b_p \hat{c}_p, p=1, \dots, 2n \quad (22)$$

$$\phi(\hat{c}(\mathbf{x})) = \prod_{p: x_p=1} b_p \hat{c}(\mathbf{x}) \quad (23)$$

式中 $0 \leq b_1, \dots, b_{2n} \leq 1$ 是表示信道衰减系数的实参数,称由式(21)~(23)定义的信道为无相互作用费米带噪声量子信道.

2 无相互作用费米量子信道直积态容量

2.1 无相互作用费米量子信道协方差对称性

无相互作用费米量子信道拥有协方差对称性,

即对于任何算符 \hat{A} ,有

$$\phi(\hat{c}(\mathbf{x}) \hat{A} \hat{c}(\mathbf{x})^+) = \hat{c}(\mathbf{x}) \phi(\hat{A}) \hat{c}(\mathbf{x})^+ \quad (24)$$

因此, ϕ 是共变(covariant)信道.

对于 n 量子比特共变(covariant)信道,它的直积态容量^[3]为

$$C_1(\phi) = n - S_{\min}(\phi) \quad (25)$$

其中

$$S_{\min}(\phi) = \min_{\rho} S(\phi(\rho)) \quad (26)$$

是共变信道最小输出熵(Von Neumann 熵).

2.2 无相互作用费米量子信道直积态容量

2.2.1 量子高斯态和平稳量子高斯态

2004年, Giovannetti V 等人^[10] 推导出了玻色量子信道的最小输出熵(Von Neumann 熵),并且猜测:在高斯输入态的情况下,玻色量子信道输出熵的全局最小是可达的,假设这个猜测对费米量子信道也成立,那么无相互作用费米量子信道直积态容量计算可化为在高斯输入态下最小输出熵的计算.

通过正则变换,量子高斯态^[9]可表示为乘积形式 ρ_{λ}

$$\rho_{\lambda} = \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n (I + i\lambda_j \hat{c}_{2j-1} \hat{c}_{2j}) \quad (27)$$

定义 1: 态 ρ 是量子高斯态,当且仅当它可以表示为

$$\rho = U\rho_{\lambda}U^+ \quad (28)$$

$$U = \exp(iH_2 + iH_1) \quad (29)$$

这里 H_2 和 H_1 分别是算符 $\hat{c}_p \hat{c}_q$ 和 \hat{c}_p 的厄米线性组合.

定义 2: 态 ρ 是平稳量子高斯态,当且仅当它可以表示为

$$\rho = U\rho_{\lambda}U^+ \quad (30)$$

$$U = \exp(iH_2) \quad (31)$$

式中 H_2 是 $\hat{c}_p \hat{c}_q$ 的厄米线性组合.

2.2.2 在平稳量子高斯态下无相互作用费米量子信道最小输出熵

一个平稳量子高斯态 ρ 完全由其协方差矩阵表征

$$M_{pq} = -\frac{i}{2} \text{Tr}[\rho(\hat{c}_p \hat{c}_q - \hat{c}_q \hat{c}_p)] \quad (32)$$

由于矩阵 M 是一个实反对称矩阵,它的谱可表示为 n 对共轭特征值 $\pm i\lambda_j$, $\lambda_j \geq 0$, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 M 的奇异值,即 M 的奇异值 λ_j 完全决定了平稳量子

高斯态的谱, 平稳量子高斯态的谱是 n 项二元谱 $(1/2)(1 \pm \lambda_j)$ 的乘积, 相应地, Von Neumann 熵 $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ 可表示为

$$S(\rho) = \sum_{j=1}^n H\left(\frac{1+\lambda_j}{2}\right) \quad (33)$$

令 ρ 为一个具有方差矩阵 M 的平稳量子高斯态, ϕ 为具有衰减系数 b_1, \dots, b_{2n} 的无相互作用费米量子信道, 将衰减系数 b_1, \dots, b_{2n} 以递减形式排列, 即 $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2n}$, 那么, 输入态 ρ 的一阶矩与输出态 $\phi(\rho)$ 的一阶矩具有以下关系

$$\text{Tr}(\phi(\rho) \hat{c}(\mathbf{x})) = \left(\prod_{p: x_p=1} b_p\right) \text{Tr}(\rho \hat{c}(\mathbf{x})) \quad (34)$$

且

$$\phi(M) = BMB^+ \quad (35)$$

式中 B 是一个元素为 b_1, \dots, b_{2n} 的对角矩阵,

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}, b_{2n}) \quad (36)$$

令 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 $\phi(M)$ 的奇异值 (其特征值是 $\pm i\lambda_j$).

由式(33), 得到在平稳量子高斯输入态下费米量子信道的最小输出熵

$$S_{\min, \epsilon} = \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sum_{j=1}^n H\left(\frac{1+\lambda_j}{2}\right) \quad (37)$$

其中最小值是在所有奇异值串 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 上获取的.

令 λ_j^\downarrow 为奇异值 λ_j 以递减方式排列的序列, 考虑

$$D_l(B) = D_l(B^T) = \prod_{j=1}^l b_j \quad (38)$$

$$D_l(M) = 1 \quad (39)$$

$D_l(B)$ 表示矩阵 B 的 l 个最大奇异值乘积, 根据 Horn-Visser-Zaanen 定理有

$$D_{2k}(BMB^T) \leq D_{2k}(B)D_{2k}(M)D_{2k}(B^T) \quad (40)$$

另外

$$\prod_{j=1}^k (\lambda_j^\downarrow) \leq \prod_{p=1}^{2k} b_p \quad (41)$$

式(41)等号在 $k=n$ 时等式成立. 引进辅助变量 $y_j = \log(\lambda_j^\downarrow)$ 和 $z_j = \log(b_{2j-1}b_{2j})$, 辅助变量 y_j 和 z_j 在区间 $(-\infty, 0]$ 上取值, 显然, $y_1 \geq \dots \geq y_n, z_1 \geq \dots \geq z_n$, 这样不等式(41)等价于控制 (Majorization) 不等式^[1]

$$(y_1, \dots, y_n) \prec (z_1, \dots, z_n) \quad (42)$$

于是输出态的 Von Neumann 熵为

$$S(\phi(\rho)) = \sum_{j=1}^n f(y_j) \quad (43)$$

式中

$$f(y_j) = H\left(\frac{1-e^{y_j}}{2}\right) \quad (44)$$

令 $f(x) = H(g(x))$, 其中 $g(x) = (1/2)(1 - e^x)$, 显

然, $g(x)$ 是凹函数, 且映射区间 $(-\infty, 0]$ 到区间 $[0, 1/2]$, 即函数 $H(x)$ 是凹函数, 且在区间 $[0, 1/2]$ 上单调递增, 于是 $H(g(x))$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上也是凹函数, 因此

$$S(\phi(\rho)) = \sum_{j=1}^n f(y_j) \geq \sum_{j=1}^n f(z_j) = \sum_{j=1}^n H\left(\frac{1+b_{2j-1}b_{2j}}{2}\right) \quad (45)$$

如果输入态 ρ 是 Fock 真空态, 即

$$\rho = \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n (I - i \hat{c}_{2j-1} \hat{c}_{2j}) = |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| \quad (46)$$

输出熵的最小值是可达的.

2.2.3 量子高斯态和平稳量子高斯态输出熵关系

设 ρ 是一个 n 量子比特高斯态, 考虑一个线性映射 ϵ , 按下列方法映射 n 量子比特系统到 $n+1$ 量子位系统, 构造出 $n+1$ 费米模量子信道

$$\epsilon(\rho) = V\rho \otimes (I/2)V^+ \quad (47)$$

$$V = \exp\left(i \frac{\pi}{4} \hat{c}_{2n+1}\right) \quad (48)$$

式中 $I/2$ 表示标记为 $n+1$ 的量子比特是最大混合态, 由于 V 是么正算符, 对于任意量子态 ρ , 有

$$S(\epsilon(\rho)) = S(\rho) + 1 \quad (49)$$

可以证明, 对于任何高斯态 ρ , $\epsilon(\rho)$ 是平稳高斯; 反之, 如果 $\epsilon(\rho)$ 是平稳高斯态, 那么, ρ 是高斯态, 这意味着 $\epsilon(\rho)$ 的 M 矩阵的第 $2n+2$ 行和 $2n+2$ 列上的所有元素是零, 即

$$M_{p, 2n+2} = M_{2n+2, p} = 0 \quad (50)$$

上述方法定义无相互作用 $n+1$ 费米模量子信道 ϕ

$$\phi(\hat{c}_p) = b_p \hat{c}_p \quad (p=1, \dots, 2n) \quad (51)$$

$$\phi(\hat{c}_{2n+1}) = \hat{c}_{2n+1} \quad (52)$$

$$\phi(\hat{c}_{2n+2}) = 0 \quad (53)$$

容易验证 ϵ 与 ϕ 对易

$$(\epsilon \circ \phi)(\rho) = (\phi \circ \epsilon)(\rho) \quad (54)$$

即 $(\phi \circ \epsilon)(\rho)$ 是一个平稳高斯态, 那么 $(\epsilon \circ \phi)(\rho)$ 也是一个平稳高斯态.

2.2.4 无相互作用费米量子信道容量

令 G_n 和 G_n^c 分别为 n 量子比特高斯态和平稳高斯态的集合, 用 $S_{\min, g}$ 表示在高斯输入态下最小输出熵

$$S_{\min, g} = \min_{\rho \in G_n} S(\phi(\rho)) \quad (55)$$

利用式(47)和(48)定义的线性映射 ϵ 给 n 量子比特系统增加一个量子比特, 由式(49)得到

$$S_{\min, g} = \min_{\rho \in G_n} S((\epsilon \circ \phi)(\rho)) - 1 \quad (56)$$

应用对易式(54), 得到

$$S_{\min, g} = \min_{\rho \in G_n} S((\phi \circ \epsilon)(\rho)) - 1 \quad (57)$$

由于 $\epsilon(\rho)$ 是一个平稳高斯态, 因此

$$S_{\min, g} \geq \min_{\eta \in G_{n+1}^c} S(\phi(\eta)) - 1 \quad (58)$$

由式(37)得

$$S_{\min, g} \geq \sum_{j=1}^{n-1} H\left(\frac{1+b_{2j-1}^{\downarrow} b_{2j}^{\downarrow}}{2}\right) - 1 \quad (59)$$

式中 b_1, \dots, b_{2n+2} 是信道 ϕ 的衰减系数, 参见式(51)~(53), 显然, 它们中的最小值是 $b_{2n+2}^{\downarrow} = b_{2n+2} = 0$, 最大值是 $b_{2n+1}^{\downarrow} = b_{2n+1} = 1$, 因此, 得到

$$S_{\min, g} \geq H\left(\frac{1+b_1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} H\left(\frac{1+b_{2j} b_{2j+1}}{2}\right) \quad (60)$$

在态

$$\rho_* = \frac{1}{2^n} (I + \hat{c}_1)(I - i \hat{c}_2 \hat{c}_3) \cdots (I - i \hat{c}_{2n-2} \hat{c}_{2n-1}) \quad (61)$$

上, 这个下限是可达的, 这样, 得到无相互作用费米量子信道直积态容量的表达式

$$C_1(\phi) = C_1^{\text{F}}(\phi) = n - H\left(\frac{1+b_1}{2}\right) - \sum_{j=1}^{n-1} H\left(\frac{1+b_{2j} b_{2j+1}}{2}\right) \quad (62)$$

式中 $C_1(\phi)$ 表示费米量子信道直积态容量, $C_1^{\text{F}}(\phi)$ 表示在高斯输入态费米量子信道直积态容量.

2.2.5 最小输出熵迭代算法

引进一个恒等式

$$h(\rho, \eta) = S(\phi(\rho)) + S(\phi(\rho) \parallel \phi(\eta)) \quad (63)$$

式中 $S(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$ 是相对熵, 相对熵是非负的, 对于任何态 ρ 和 σ , $S(\rho \parallel \sigma) \geq 0$, 当且仅当 $\rho = \sigma$ 时, $S(\rho \parallel \sigma) = 0$, 由此得出

$$S_{\min}(\phi) = \min_{\rho, \eta} h(\rho, \eta) \quad (64)$$

为了求 $h(\rho, \eta)$ 的最小值, 固定 η 不变, 那么

$$\begin{aligned} \min_{\rho} h(\rho, \eta) &= -\max_{\rho} \text{Tr}[\rho \phi^*(\log \phi(\eta))] \\ &= -\lambda_{\max}(\phi^*(\log \phi(\eta))) \end{aligned} \quad (65)$$

其中 ϕ^* 是与 ϕ 共轭的线性映射, λ_{\max} 是算符 A 的最大本征值, 最优态 ρ 显然是 $\phi^*(\log \phi(\eta))$ 的最高本征矢量. 另一方面, 固定 ρ 不变, 在 η 上最小化 $h(\rho, \eta)$, 从式(63)知, 绝对最小值会在 $\rho = \eta$ 处得到.

通过执行单变量迭代算法求 $h(\rho, \eta)$ 的最小值时, 这个迭代最小化算法是产生一个纯态 $|\Psi_0\rangle, |\Psi_1\rangle, \dots$ 序列, 其步骤是:

1) 随机选取初始态 $|\Psi_0\rangle$;

2) $|\Psi_{k+1}\rangle$ 是算符 $\phi^*(\log \phi(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|))$ 的最高本征矢量(如果最高本征值是简并的, $|\Psi_{k+1}\rangle$ 是从相应本征矢量空间随机选取的), 考虑序列

$$S_k = S(\phi(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|)) \quad (k=1, 2, \dots, \infty) \quad (66)$$

由于单变量最小化方法不会使目标函数值增大, 所以有 $S_{k+1} \leq S_k$, 即序列 $\{S_k\}$ 是单调递减的.

记 $S_* = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$, 令 $|\Psi_*\rangle$ 为序列 $\{|\Psi_k\rangle\}$ 的任

一极限点, 令 $\rho_* = |\Psi_*\rangle\langle\Psi_*|$, 显然, 对任意量子态 ρ 和 η , 有

$$h(\rho_*, \rho_*) \leq h(\rho, \rho_*) \quad (67)$$

$$h(\rho_*, \rho_*) \leq h(\rho_*, \eta) \quad (68)$$

因此, 点 $\rho = \eta = \rho_*$ 是 $S(\phi(\rho)) = h(\rho, \eta)$ 的极小值点.

2.2.6 三量子比特费米信道最小输出熵数值比较

对于三量子比特无相互作用费米量子衰减信道

$$\phi(\hat{c}_p) = b^{p/3} \quad (p=1, \dots, 6) \quad (70)$$

式中 $0 \leq b \leq 1$ 是指定信道的参数, 利用迭代算法算出最小输出熵, 再利用高斯输入态算出最小输出熵, 将迭代算法算出的最小输出熵与高斯输入态算出最小输出熵之差取 10 为底的对数 $\lg(S_{\min} - S_{\min, g})$ 作为纵坐标, 信道衰减参数 b 为横坐标, 画出两最小输出熵之差取 10 为底的对数 $\lg(S_{\min} - S_{\min, g})$ 与信道衰减参数 b 之间的关系, 如图 1 所示: 当 $0 \leq b \leq 0.7$ 时, $S_{\min} - S_{\min, g}$ 小于 10^{-9} , 当 $b > 0.7$ 时, $S_{\min} - S_{\min, g}$ 增大, 但总是小于 0.01. 数值计算结果表明: 对于三量子比特无相互作用费米信道, 最小输出熵在高斯输入态下是可达的猜测^[10] 是正确的, 即 $S_{\min}(\phi) = S_{\min, g}(\phi)$ 是正确的.

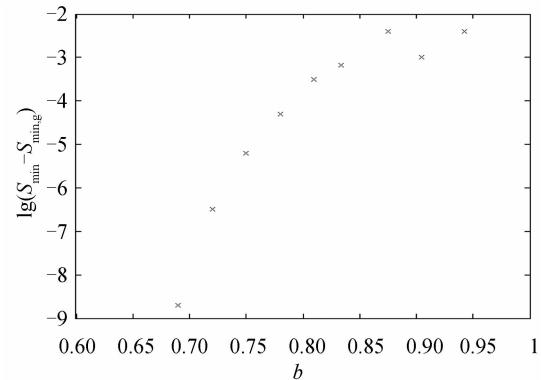


图 1 偏差的对数 $\lg(S_{\min} - S_{\min, g})$ 与信道衰减参数 b 之间的关系

Fig. 1 The relationship between logarithm of deviation $\lg(S_{\min} - S_{\min, g})$ and attenuation coefficient b

3 结论

本文用费米线性光学方法, 提出无相互作用费米信道物理模型, 提出在 n 模费米系统添加一个额外模的方法, 得出平稳高斯态和高斯态输出熵的关系, 借助在高斯输入态下费米信道最小输出熵值是可达的猜测, 用平稳量子高斯态协方差矩阵性质及 Majorization 不等式理论, 推导出无相互作用费米量子信道直积态容量的表达式, 这有助于理解一般费米量子信道的性质, 这种研究方法为量子信道直积态容量计算提供了一种新手段, 获得的费米量子信道直积态容量表达式有助于量子信道容量的进一

步研究.

参考文献

- [1] NELSEN M A, CHUANG I. Quantum computation and quantum information[M]. Combridge University Press, 2000; 528-607.
- [2] HOLEVO A S, WERNER R F. Evaluating capacities of bosonic Gaussian channels [J]. *Phys Rev A*, 2001, **63**(3): 032312-1-032312-14.
- [3] CORTESE J. Holevo-Schumacher-Westmoreland channel capacity for a class of qudit unital channels[J]. *Phy Rev A*, 2004, **69**(2):022302-1-022302-8.
- [4] SEN(DE) A, SEN U, GROMEK B, *et al.* Capacities quantum channels for massive indistinguishable particles; Bosons versus fermions[J]. *Phy Rev A*, 2007, **75**(2):022331-1-022331-13.
- [5] DORLAS T, MORGAN C. Classical capacity of quantum channels with memory[J]. *Phy Rev A*, 2009, **79**(3):032320-1-032320-5.
- [6] CARUSO F, HUELGA S F, PLENIO M B. Noise-Enhanced Classical and Quantum Capacities in Communication Networks [J]. *Phy Rev Lett*, 2010, **105**(19):190501-1-190501-4.
- [7] KNILL E, LAFAMME, MIBURN G. A scheme for efficient quantum computation with linear optics[J]. *Nature*, 2001, **409**(1):46-52.
- [8] TERHAL B M, DIVINCENZO D P. Classical simulation of noninteracting π -fermion quantum circuits [J]. *Phys Rev A*, 2002, **65**(3):032325-1-032325-10.
- [9] BRAVYI S. Lagrangian representation for fermionic linear optics[J]. *Quantum Inf and Com*, 2005, **5**(3):216-238.
- [10] GIOVANNETTI V, GUHA S, LLOYD S, *et al.* Minimum output entropy of bosonic channels: A conjecture[J]. *Phy Rev A*, 2004, **70**(3):032315-1-032315-14.
- [11] ZHA Xin-wei, ZHANG Wei. Perfect Teleportation an Arbitrary Three-particle state [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(4):979-982.
查新未, 张炜. 三粒子任意态的量子隐形完全传送[J]. *光子学报*, 2009, **38**(4):979-982.
- [12] LI Zong-guo, ZHAO Ming-jing, LIU Wu-ming, *et al.* Evolution equation for entanglement of assistance [J]. *Phy Rev A*, 2010, **81**(4):042312-1-042312-5.

Tensor Product State Capacity of Non-interacting Fermion Quantum Channel

PENG Yong-gang, GONG Long-yan

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Posts & Technology, Nanjing 210003, China)

Abstract: The physical model of non-interacting fermion quantum channel is proposed by fermionic linear optics. Based on covariance matrix property of even Gaussian state and majorization theory, a formula of fermion quantum channel minimum output entropy for even Gaussian input state is deduced. A output entropy correspondence between Gaussian state and even Gaussian state is established by adding one extra fermionic mode to n -qubit fermion system. A formula of tensor product state capacity for non-interacting fermion channel is deduced according this output entropy correspondence and under assumption that minimum output entropy is achieved on a Gaussian input state. For fermionic channel correct of proposed minimum output entropy formula is confirmed by the iterative minimization algorithm of output entropy. The numerical results is that for non-interacting fermion noisy quantum channel the proposed formula agrees with the numerical results with a precision about $10e-9$.

Key words: Quantum channel; Non-interacting fermions system; The tensor product state capacity; Gaussian quantum state; Minimum output entropy