

文章编号:1004-4213(2011)06-0949-6

确定性相位掩膜可压缩双透镜成像

张成, 杨海蓉, 韦穗

(安徽大学 计算智能与信号处理重点实验室 合肥 230039)

摘 要: 压缩成像是压缩传感理论的一个重要应用领域. 本文将确定性测量引入压缩成像, 提出一种确定性相位掩膜可压缩双透镜成像方法. 模拟实验结果表明, 新的成像方法可以在显著地降低物理实现成本的同时, 有效地捕获图像信息来重建原始图像. 此方法改变了经典的模拟-数字转换的光学成像思路, 减少模数转换开销, 并有利于图像的传输和存储, 可以为照相机的设计提供若干理论、计算和技术支撑.

关键词: 压缩传感; 压缩成像; 成像系统; 相位掩膜; 确定性测量

中图分类号: TN911.74

文献标识码: A

doi: 10.3788/gzxb20114006.0949

0 引言

压缩传感(Compressive Sensing, CS)是信号获取和处理的一个新领域. 它寻求从少量数目的线性和非适应性测量中准确恢复一个稀疏信号. 在模拟-数字转换应用领域, 压缩传感已经改变了相关人员关于信号获取的思考方式. 压缩成像(Compressive Imaging, CI)是压缩传感理论的一个重要研究领域, 比较重要的研究有单像素摄像机^[1-2]、单视点压缩成像^[3]、压缩编码孔径成像^[4-5]和压缩雷达成像^[6-9]等.

目前, 压缩成像研究中多采用随机投影作为测量矩阵, 如 Gaussian 或 Bernoulli 矩阵. 但在不少应用中, 由于物理条件的限制, 在测量矩阵中降低随机性非常迫切. 文献[10-13]提出了部分有效的确定性测量法作为压缩传感测量.

本文提出了一种可压缩双透镜成像法并引入确定性光学相位掩膜法, 比较了本文提出的 CI 系统在不同分布的光学相位掩膜和单次曝光条件下的成像效果比较以及测试了该系统在不同噪音条件下的成像效果, 对于压缩成像理论的研究与实际应用具有重要的意义.

1 双透镜相位掩膜压缩成像

对于在某一个基上稀疏或可压缩的信号 f , 可

以通过计算最小化问题估计系数 θ

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} \|\theta\|_1, g = \Phi f = \Phi \Psi \theta \quad (1)$$

式中 $\theta_i = \sum_{i=1}^N |\theta_i|$, Φ 是测量矩阵, Ψ 是稀疏基, $g = \Phi f$ 是测量向量. 因此通过从所有的系数向量 θ 中选择发现具有最小 l_1 范数的 $\hat{\theta}$, 最终通过 $f = \Psi \hat{\theta}$ 重建原图像.

实际测量中, 需要考虑到各种误差对成像模型的影响, 此时, 式(1)可改写为

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} \|\theta\|_1, \|g - \Phi \Psi \theta\|_2 \leq \epsilon \quad (2)$$

图 1 给出一种利用光学相位掩膜实现压缩成像的系统, 其原理是通过光学相位掩膜对光的不同相位延时实现压缩传感测量中的随机投影算子 Φ ^[3]. 系统中, 物体被放在距离透镜 z_1 的位置处, 在两透镜中间紧贴的是一个满足特定分布的光学相位掩

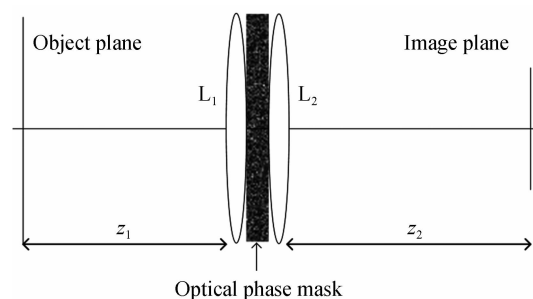


图 1 一个实现 CS 图像采集的光学系统
Fig. 1 One optical setup to implement image acquisition using CS

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60473102)、“新一代宽带无线移动通信网”国家科技重大专项(No. 2009ZX03006-001-02)和安徽高校省级自然科学研究项目(No. KJ2011B131) 资助

第一作者: 张成(1984.10-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为光学成像与相位恢复. Email: question1996@163.com

导 师: 韦穗(1946.02-), 女, 教授, 博导, 主要研究方向为图像处理与三维全息显示. Email: swei@ahu.edu.cn

收稿日期: 2011-01-11; **修回日期:** 2011-02-24

膜,物体发射出来的光经过直径为 D_1 、焦距为 f_{L_1} 的透镜 L_1 聚焦,再经过光学相位掩膜进行随机调制后经过直径为 D_2 、焦距为 f_{L_2} 的透镜 L_2 聚集,到达透镜后面距离为 z_2 的一个 CCD 检测阵列.值得注意的是,这个系统获得的压缩图像是通过单次曝光拍照获取的.

物体平面上的点 r_o 与图像平面上的点 r_i 之间的关系可以用式(3)描述

$$u(r_i, r_o) = \kappa_0 \int \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda z_1} (r_o - r_\varphi)^2 \right] \cdot \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_1}} r_\varphi^2 \right] \exp [j\varphi(r_\varphi)] \cdot \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_2}} r_\varphi^2 \right] \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda z_2} (r_i - r_\varphi)^2 \right] dr_\varphi \quad (3)$$

式中, λ 是波长, $\varphi(r_\varphi)$ 是满足一定分布的光学相位掩膜, f_{L_1} 和 f_{L_2} 分别是透镜 L_1 和 L_2 的焦距, κ_0 是一个固定的乘法系数. 式(3)定义了输入输出场之间的相互关系. 在 CS 测量模型中, 式(3)定义了连续随机投影算符 Φ . 文献[3]表明如果相关长度 ρ 关于成像系统的其他维足够小, 离散算符 $u(r_i, r_o)$ 就是需要的随机投影[3].

在实际处理中, 需要对系统进行离散化处理. $f(x_o)$ 在点 $x_o = n\Delta_o$, $-N/2 \leq n \leq N/2$, $n \in Z$ 处的采样和 $g(x_i)$ 在点 $x_i = m\Delta_i$, $-M/2 \leq m \leq M/2$, $m \in Z$ 之间的关系通过式(4)的离散形式给出

$$u(m\Delta_i, n\Delta_o) = K_0 \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z_1} (n\Delta_o - \xi)^2 \right] \cdot \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_1}} \xi^2 \right] \exp [j\varphi(\xi)] \cdot \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_2}} \xi^2 \right] \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z_2} (m\Delta_i - \xi)^2 \right] d\xi \quad (4)$$

式中, $-N/2 \leq n \leq N/2$, $-M/2 \leq m \leq M/2$, L 是光学相位掩膜的大小, 因此由 M 个 $g(x_i)$ 采样组成的向量 g 和由 N 个 $f(x_o)$ 采样组成的向量 f 的关系通过线性方程 $g = \Phi f$ 描述, 测量矩阵 Φ 是 $M \times N$ 大小的矩阵, 其中的元可以表示为

$$\Phi_{m,n} = u(m\Delta_i, n\Delta_o) \quad (5)$$

当 Φ 的列非相关时, 可实现非相关随机投影, 即任意两个物体点的点冲激响应被 $k\Delta_o$, $k \in Z$ 分开.

2 确定性光学相位掩膜

目前研究压缩传感中使用最多的是采用随机投影进行测量, 也就是说测量矩阵 Φ 是 $M \times N$ 大小的随机 Gauss 矩阵, 其中的元素 $a_{i,j} \sim N(0, 1)$. 矩阵 φ_{Gauss} 有 MN 个自由元素, 文献[12-15]提出某些确定性矩阵 $\varphi_{\text{Toeplitz}}$ 和 $\varphi_{\text{Circulant}}$ 也可以用来作为测量矩

阵, 它们分别有 $N+M-1$ 和 N 个自由元素. 理论上, Gauss 矩阵随机性最好, 由于自由元素太多, 不能实现或实现成本太高, 不利于广泛使用, 因此改用自由元素较少, 相对比较“确定”的矩阵易于实现满足特定分布的光学相位掩膜(如 Toeplitz 或 Circulant), 其具体形式分别如式(6)~(8)所示.

$$\varphi_{\text{Gauss}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\varphi_{\text{Toeplitz}} = \begin{bmatrix} a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 \\ a_{N+1} & a_N & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N+M-1} & a_{N+M-2} & \cdots & a_M \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\varphi_{\text{Circulant}} = \begin{bmatrix} a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_N & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

压缩传感的重建算法有很多[14-15], 本文选用子空间追踪算法(Subspace Pursuit, SP)[16]. SP 算法是目前求解式(1)和式(2)的最有效算法之一, 无论是在重建概率和重建速度方面都有良好的性能表现.

图 2 是一维信号的 CS 重建实验, 测试信号的长度 $N = 256$, 稀疏度 $K = 40$, 测量次数 $M = 128$, 为了简单起见, 假定稀疏矩阵 Ψ 是单位矩阵(也就是信号 x 本身稀疏, 该假定不影响最终结果), K 个非零值的大小是 ± 1 , 图 2(a) 是原始信号, 图 2(b)~

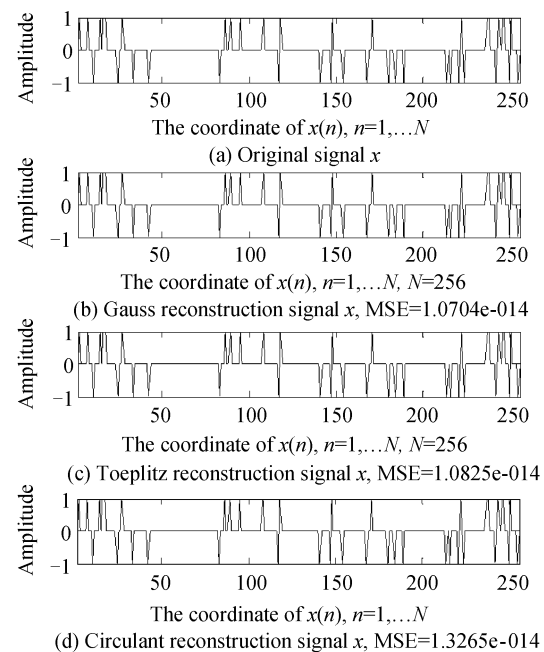


图 2 一维信号 CS 重建

Fig. 2 CS reconstruction for one dimensional signal

(d)分别是采用 Gauss、Toeplitz 和 Circulant 测量矩阵的重建结果,从最小均方差来看,重建结果是精确地。

3 种测量矩阵重建效果的比较如图 3 和图 4,其中图 3 中信号长度 $N=256$,固定稀疏度 $K=30$,测量次数 M 从 70 逐渐变化到 140,测量次数每次增

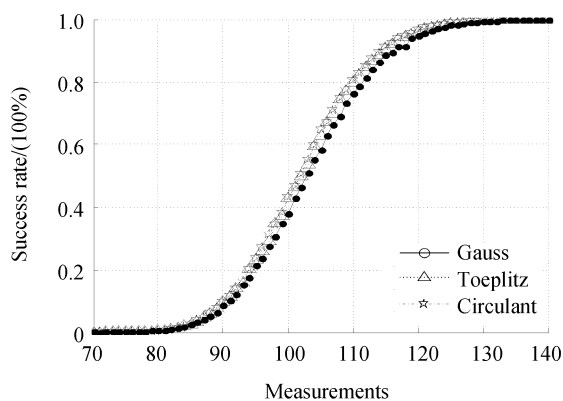


图 3 重建成功概率与测量次数 M 之间的关系

Fig. 3 Probability of success rate as a function of the number of measurements M

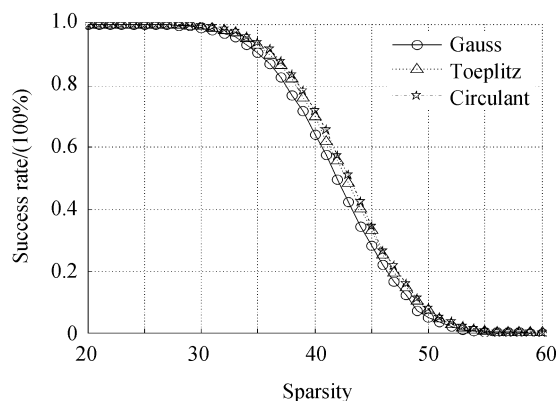


图 4 重建成功概率与稀疏度 K 之间的关系

Fig. 4 Probability of success as a function of sparsity level K

加 2. 图 4 的实验中信号长度 $N=256$,固定测量次数 $M=128$,稀疏度 K 从 20 逐渐增加到 60,每次增加 2. 对每一组固定的参量 (N, M, K) 分别测试 10 000 次,计算其重建成功率,从图 3 和图 4 的实验结果可以看出,Toeplitz 和 Circulant 分布完全可以满足测量随机性的要求,因此可以选用 Toeplitz 和 Circulant 作为光学相位掩膜的分布。

3 模拟实验

根据 Fresnel 理论采用 Matlab 软件模拟实现 2D 场从物体平面到图像平面的传播. 模拟中,设物体的像素大小为 1 mm, CCD 像素大小为 $100 \mu\text{m}$,中心波长为 $\lambda_0=0.55 \mu\text{m}$, $z_1=z_2=140 \text{ mm}$, $f_{1_2}=f_{1_2}=280 \text{ mm}$. 光学相位掩膜的分布分别是 Gauss、Toeplitz 和 Circulant,其相干波长为 $\rho=5 \mu\text{m}$;透镜的直径是 $D_1=D_2=50 \text{ mm}$. 模拟系统的条件满足文献[3]中所列的随机投影矩阵的要求. 由于计算机资源的限制,限定物体有 $64 \times 64 \text{ pixel}$. 对应于这种大小的物体,矩阵 Φ 和 Ψ 的大小是 4096×4096 . 其中, Φ 的每行表示一个大小为 4096 的移变点扩散函数,选 Φ 的前 M 行作为测量矩阵.

图 5 是 Lena 图像在不同分布的相位掩膜下的重建结果,其中图 5 (a) 是原始图像,采用 Daubechies5 小波作为稀疏基,对应的稀疏度 $K=868$,测量次数 M 分别是 2163, 2336, 2595,是原有总像素数目的 52.81%, 57.03% 和 63.35%. 图 5 (a) 原始图像,图 5 (b)~(d) 是 Gauss 掩膜重建结果,图 5 (e)~(g) 是 Toeplitz 掩膜重建结果,图 5 (h)~(j) 是 Circulant 掩膜重建结果,不同测量次数 M 下的重建效果采用信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 衡量,具体数据如表 1.

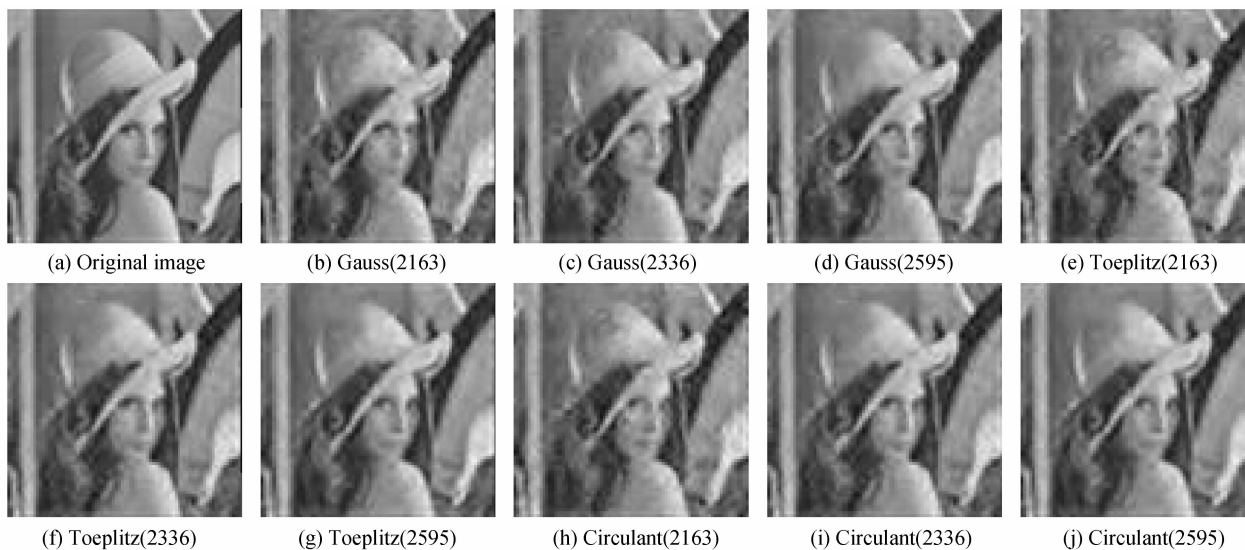


图 5 Lena 图像重建

Fig. 5 Reconstruction of Lena image

表 1 Lena 图像在不同测量次数下的重建信噪比
Table 1 SNR of reconstruction image of Lena with the different number of measurements M

Phase mask	Measurements	SNR/dB
Gauss	2163	26.87
Gauss	2336	28.91
Gauss	2595	29.94
Toeplitz	2163	28.13
Toeplitz	2336	29.07
Toeplitz	2595	30.18
Circulant	2163	27.73
Circulant	2336	29.26
Circulant	2595	30.21

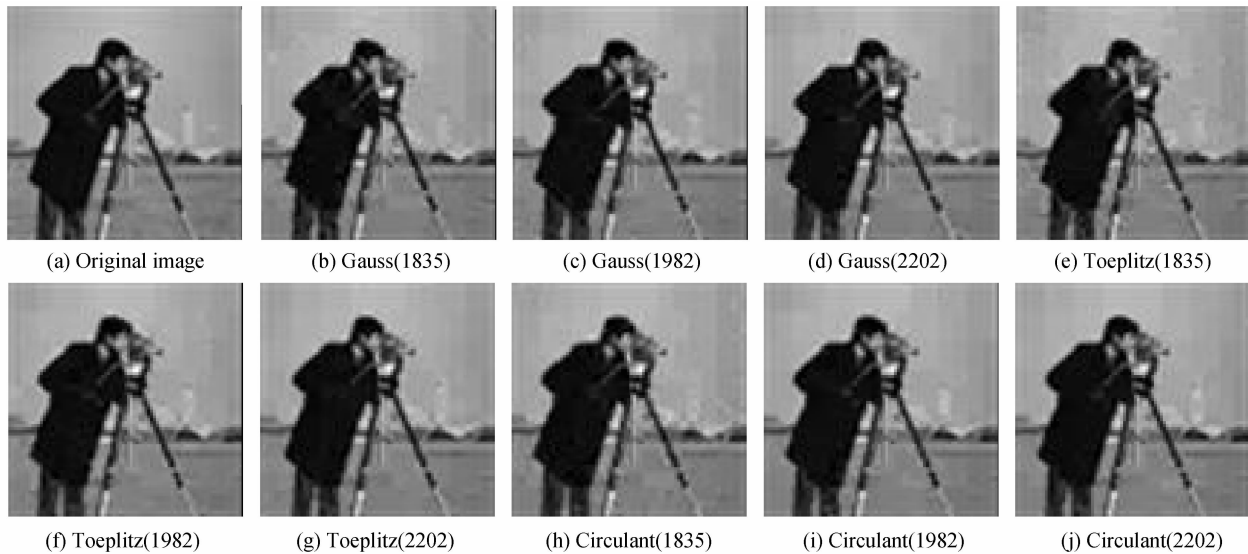


图 6 Cameraman 图像重建
Fig. 6 Reconstruction of Cameraman image

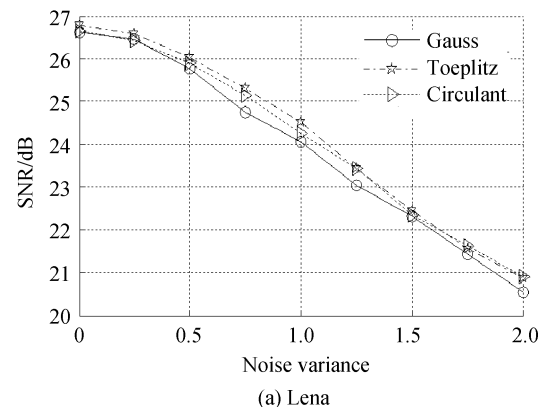
表 2 Cameraman 图像在不同测量次数下的重建信噪比
Table 2 SNR of reconstruction image of Cameraman with the different number of measurements M

Phase mask	Measurements	SNR/dB
Gauss	1835	27.52
Gauss	1982	28.78
Gauss	2202	30.15
Toeplitz	1835	27.94
Toeplitz	1982	29.97
Toeplitz	2202	30.24
Circulant	1835	26.87
Circulant	1982	28.17
Circulant	2202	30.16

实际成像处理中,由于各种因素的影响,往往会引入各种各样噪音,比如成像 CCD 上产生的随机高斯噪音等等.本文出的 CI 系统在随机高斯噪音下重建时,噪音的方差 $\sigma^2 = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0]$.考虑到噪音的随机性,对数据进行归一化处理,如测量矩阵 Φ 的每一行归一化,随机产生的高斯噪音向量 noise 归一化,此时测

图 6 是 Cameraman 图像在不同分布的相位掩膜下的重建结果,其中图 6(a)是原始图像,采用 Daubechies1 小波作为稀疏基,对应的稀疏度 $K = 734$,测量次数 M 分别是 1835,1982,2202,是原有总像素数目的 44.8%,48.39%和 53.76%.图 6(a)是原始图像,图 6(b)~(d)是 Gauss 掩膜重建结果,图 6(e)~(g)是 Toeplitz 掩膜重建,图 6(h)~(j)是 Circulant 掩膜重建结果,不同测量次数 M 下的重建结果评价采用 SNR 衡量,具体数据如表 2.

量值 $g = \Phi f + \text{noise} * \sigma^2$,测量次数 $M = 3K$ (其中 Lena 图像的稀疏度 $K = 868$,Cameraman 图像的稀疏度 $K = 734$),图像像素灰度值归一化到 $[0, 1]$ 之间,每一种方差 σ^2 噪音下测试 10 次,取其信噪比的均值,结果如图 7.图 7(a)和图 7(b)分别是 Lena 图像和 Cameraman 图像重建的信噪比随噪音方差增加的变化趋势,由图 7 可以看出,本文提出的压缩成像系统对噪音具有较好的鲁棒性.



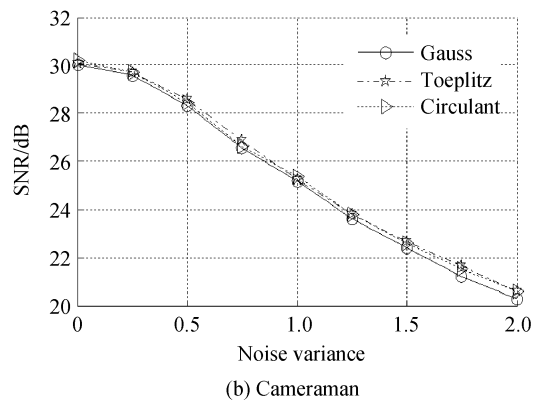


图 7 不同噪音方差下 CS 图像重建

Fig. 7 CS image reconstruction with different noise variances

4 结论

本文给出一种确定性光学相位掩膜可压缩双透镜成像方法,比较了本文的 CI 系统在 Toeplitz 和 Circulant 确定性光学相位掩膜下捕获物体信息的效果.实验结果表明,对于在基 Ψ 上稀疏的图像,本文的 CI 成像系统可以在单次曝光下(一次测量所有值,这一点对物理实现意义重大,可以节约大量的测量时间)从原始图像上捕获比原像素数目小的压缩测量中准确的重建原图像;另外,考虑到实际成像处理中的噪音影响,本文还比较了不同噪音条件下重建图像的效果.实验结果表明,采用新的 Toeplitz 和 Circulant 确定性光学相位掩膜法,可以在同样的重建准确度的情况下有效地降低物理实现成本,获得较好的抗干扰性.

参考文献

- [1] DUARTE M F, DAVENPORT M A, TAKHAR D, *et al.* Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83-91.
- [2] BOUFONOS P T, BARANIUK R G. 1-Bit compressive sensing[C]. Information Sciences and Systems, 2008. CISS 2008. 42nd Annual Conference on, 16-21, 19-21.
- [3] STERN A, JAVIDI B. Random projections imaging with extended space-bandwidth product [J]. *Journal of Display Technology*, 2007, **3**(3): 315-320.
- [4] MARCIA R F, WILLET R M. Compressive coded aperture superresolution image reconstruction[C]. Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008 ICASSP 2008. IEEE International Conference on, 2008, 833-836.
- [5] MARCIA R F, HARMANY Z T, WILLET R M. Compressive coded apertures for high-resolution imaging[C]. *SPIE*, 2010, **7723**: 772304-772304-11.
- [6] BARANIUK R G, STEEGHS P. Compressive radar imaging [C]. Journal of 2007 IEEE Radar Conference, 2007: 128-133.
- [7] HERMAN M A, STROHMER T. High-resolution radar via compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(6): 2275-2284.
- [8] XIE Xiao-chun, ZHANG Yun-hua. 2D radar imaging scheme based on compressive sensing technique [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, **32**(5): 1234-1238.
谢晓春, 张云华. 基于压缩感知的二维雷达成像算法[J]. 电子与信息学报, 2010, **32**(5): 1234-1238.
- [9] YU Hui-min, FANG Guang-you. Research on compressive sensing based 3D imaging method applied to ground penetrating radar[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, **32**(1): 12-16.
余慧敏, 方广有. 压缩感知理论在探地雷达三维成像中的应用[J]. 电子与信息学报, 2010, **32**(1): 12-16.
- [10] BAJWA W U, HAUPT J D, RAZ G M, *et al.* Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]. Proceedings of the 2007 IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, 2007, 294-298.
- [11] DEVORE R. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. *Journal of Complexity*, 2007, **8**(23): 918-925.
- [12] HAUPT J, BAJWA W U, RAZ G, *et al.* Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(11): 5862-5875.
- [13] WANG Kai, LIU Yu-lin, ZHANG Jian-xin. RIP analysis for quasi-Toeplitz CS matrices [C]. 2010 International Conference on Future Information Technology and Management Engineering (FITME), 2010, 2, 223-226, 9-10.
- [14] SHI Guang-ming, LIU Dan-hua, GAO Da-hua, *et al.* Advance in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Sinica Electronica*, 2009, **37**(5): 1070-1081.
石光明, 刘丹化, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究发展[J]. 电子学报, 2009, **37**(5): 1070-1081.
- [15] LI Shu-tao, WEI Dan. A survey on compressive sensing[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369-1377.
李树涛, 魏丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报, 2009, **35**(11): 1369-1377.
- [16] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2230-2249.

Compressive Double Lens Imaging Using Deterministic Phase Mask

ZHANG Cheng, YANG Hai-rong, WEI Sui

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Compressive imaging is an important application of the theory of compressive sensing. The deterministic measurements were introduced into compressive imaging and a novel method-compressive double lens imaging was proposed using deterministic phase mask. Simulation results show that novel imaging method can effectively capture the information of image, and reduce the difficulty and costs of the hardware implementation significantly. The classical analog-to-digital conversion of optical imaging is changed, the digital conversion costs are reduced, and the image transmission and storage are able to be facilitated by the proposed method, which provides some theoretical, computing and technical support for new design of camera.

Key words: Compressive sensing; Compressive imaging; Imaging system; Phase mask; Deterministic measurements