

文章编号:1004-4213(2011)04-0607-6

耗散腔中双原子与光场的纠缠演化特性

张立辉¹, 李高翔²

(1 江汉大学 物理与信息工程学院, 武汉 430056)

(2 华中师范大学 物理科学与技术学院, 武汉 430079)

摘 要:采用全量子理论方法,研究了处于耗散腔中的双原子与单模相干光场相互作用系统,分析了双原子与光场之间以及两原子之间的纠缠演化特性,讨论了腔场的衰减以及原子与光场间的失谐量对双原子与光场之间以及两原子之间纠缠演化特性的影响.结果表明,当腔场存在损耗时,原子与光场之间可出现纠缠,但在长时极限下,纠缠逐渐消灭;而失谐量对原子与光场间的纠缠存在着显著影响;初始处于最大纠缠的两原子之间的纠缠,由于光场的衰变而逐渐减弱,但原子-光场之间的失谐可抑制这一衰减.

关键词:耗散腔;量子纠缠;部分转置矩阵负本征值

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20114004.0607

0 引言

量子纠缠是量子力学的本质特征,是量子信息领域中一个非常重要的问题.量子纠缠态的制备,对于实现量子计算、量子通信、量子隐形传态等有着现实而深远的意义,而在量子信息处理过程中,对于给定的纠缠态,量化它的纠缠程度是十分重要的,这已成为研究的热点之一,现已提出了不少度量纠缠的方法,如 Von Neumann 熵、形成纠缠度、密度算符间距、部分转置负本征值等^[1-7].原子与光场的纠缠最初只是考虑了系统处于纯态的情况,但系统难免与外界环境发生相互作用,因此,研究混合态的纠缠会更有意义.近年来,向少华等^[8]研究了推广的 Jaynes-Cummings 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态,宋军等^[9]研究了两纠缠原子与二项式光场相互作用动力学,黄春佳等^[10]研究了光场与纠缠双原子相互作用过程中的熵演化特性,张英杰等^[11]对多光子 Tavis-Cummings 模型中两纠缠原子之间纠缠演化进行了研究.但纠缠双原子与单模光场相互作用系统,在非共振条件下,腔场存在损耗时两纠缠原子与相干光场间的纠缠演化特性,并未多见.而腔场损耗及失谐量对光场与原子相互作用系统的动力学性质^[12-13]的影响是明显的,因此,深入研究腔场的损耗及失谐量对双原子与光场的纠缠演化特性的影

响是十分有意义的.

本文考虑在外场驱动下,耗散腔中两纠缠原子与处于相干态的单膜光场相互作用系统,在共振及非共振的情况下,研究了双原子与光场间及两纠缠原子间的纠缠演化特性,分析表明,其纠缠特性与光场-原子耦合程度、腔场的耗散以及失谐量有关.

1 理论模型及密度算符

在外场驱动下,两全同二能级原子与单膜光场相互作用,其系统哈密顿量为($\hbar=1$)

$$H = \frac{\omega_a}{2} \sum_{j=1}^2 \sigma_j^z + \omega_f a^\dagger a + \Omega \sum_{j=1}^2 (e^{-i\omega_D t} \sigma_j^+ + e^{i\omega_D t} \sigma_j^-) + g \sum_{j=1}^2 (\sigma_j^+ a + \sigma_j^- a^\dagger) \quad (1)$$

式中, a^\dagger (a)为光场的产生(湮灭)算符, σ_j^z 、 σ_j^+ 、 σ_j^- ($j=1,2$)为第 j 个原子的赝自旋算符, ω_a 为两原子的本征跃迁频率, ω_f 为单膜腔场频率, ω_D 为外驱动场频率, Ω 为 Rabi 频率, g 为原子与光场的耦合系数.考虑旋波近似及两原子与外驱动场的共振,即 $\omega_a = \omega_D$,且 $\Omega \gg g$ 的情形下,则在相互作用绘景中,系统的有效哈密顿量^[14]为

$$H_{\text{eff}} = \frac{g}{2} \sum_{j=1}^2 (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) (a e^{i\delta t} + a^\dagger e^{-i\delta t}) \quad (2)$$

式中 $\delta = \omega_a - \omega_f$.

在考虑腔场损耗时,系统的密度算符满足

基金项目:国家自然科学基金(No. 60878004)和湖北省自然科学基金(No. 2008CDZ095)资助

第一作者:张立辉(1963-),男,教授,主要研究方向为量子光学. Email:lhzhang@jhun.edu.cn

收稿日期:2010-11-23;修回日期:2011-01-18

$$\frac{d\rho}{dt} = -i(H_{\text{eff}}, \rho) + L_i\rho \quad (3)$$

式中 $L_i\rho$ 描述腔中光场能量损耗, 可写为

$$L_i\rho = \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \quad (4)$$

式中 κ 为衰减常量.

设初始时刻 ($t=0$), 两原子处于纠缠态, 光场处于相干态, 系统的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, e\rangle + |g, g\rangle) \otimes |\alpha\rangle \quad (5)$$

取 $|\pm\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle_j \pm |e\rangle_j)$, 则初始时刻系统的密度算符为

$$\rho(0) = \frac{1}{2}(|++\alpha\rangle\langle++\alpha| + |++\alpha\rangle\langle--\alpha| + |--\alpha\rangle\langle++\alpha| + |--\alpha\rangle\langle--\alpha|) \quad (6)$$

由式(3)~(6)不难求得 t 时刻系统的密度算符满足

$$\begin{aligned} \rho(t) = & C_{11}|+, +, \alpha_1(t)\rangle\langle+, +, \alpha_1(t)| + \\ & C_{14}|+, +, \alpha_1(t)\rangle\langle-, -, \alpha_2(t)| + \\ & C_{41}|-, -, \alpha_2(t)\rangle\langle+, +, \alpha_1(t)| + \\ & C_{44}|-, -, \alpha_2(t)\rangle\langle-, -, \alpha_2(t)| \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (\alpha + \beta)e^{-\kappa t + i\delta t} \\ \alpha_2(t) &= (\alpha - \beta)e^{-\kappa t + i\delta t} \\ \beta &= \frac{g}{\kappa^2 + \delta^2} \{ [\delta(e^{\kappa t} \cos \delta t - 1) - \kappa e^{\kappa t} \sin \delta t] + \\ & \quad i[\kappa(e^{\kappa t} \cos \delta t - 1) + \delta e^{\kappa t} \sin \delta t] \} \\ C_{11} &= C_{44} = \frac{1}{2} \\ C_{14} &= C_{41}^* = \frac{1}{2} \exp[f(t)] \exp\{-|\beta|^2(1 - \\ & \quad 2e^{-2\kappa t}) + (\beta\alpha^* - \alpha\beta^*)(1 - e^{-2\kappa t}) + i\frac{2g}{\kappa^2 + \delta^2} \cdot \\ & \quad [\kappa(2e^{-\kappa t} + e^{\kappa t}) \cos \delta t - \delta(2e^{-\kappa t} - e^{\kappa t}) \sin \delta t - 3\kappa]\} \\ f(t) &= -\frac{g^2}{\kappa^2 + \delta^2} \{ 1 + 4\kappa t - e^{2\kappa t} + \frac{2}{\kappa^2 + \delta^2} [2(\kappa^2 - \\ & \quad \delta^2)e^{-\kappa t} + (\kappa^2 + \delta^2)e^{\kappa t}] \cos \delta t - \frac{8\kappa\delta}{\kappa^2 + \delta^2} \cdot \\ & \quad e^{-\kappa t} \sin \delta t - \frac{6\kappa^2}{\kappa^2 + \delta^2} + \frac{2\delta^2}{\kappa^2 + \delta^2} \} \end{aligned}$$

由此可见, 系统的密度算符随时间的演化仅与光场的两个非正交分量 $|\alpha_1(t)\rangle$ 和 $|\alpha_2(t)\rangle$ 有关, 选取

$$|\alpha_1(t)\rangle = |+\rangle_f, |\alpha_2(t)\rangle = A|+\rangle_f + B|-\rangle_f$$

式中

$$\begin{aligned} A &= \exp[(-2|\beta|^2 + \beta^* \alpha - \beta \alpha^*)e^{-2\kappa t}] \\ B &= [1 - \exp(-4|\beta|^2 e^{-2\kappa t})]^{1/2} \cdot \\ & \quad \exp[(\beta^* \alpha - \beta \alpha^*)e^{-2\kappa t}] \end{aligned}$$

显然 $|+\rangle_f$ 与 $|-\rangle_f$ 正交归一, 利用 $|\pm\rangle_f$ 可将密

度算符改写为

$$\begin{aligned} \rho(t) = & C_{11}|+, +, +\rangle_f\langle+, +, +\rangle_f + C_{14}A^* \\ & |+, +, +\rangle_f\langle-, -, +\rangle_f + C_{14}B^*|+, +, \\ & +\rangle_f\langle-, -, -\rangle_f + C_{41}A|-, -, +\rangle_f\langle+, +, \\ & +\rangle_f + C_{44}|A|^2|-, -, +\rangle_f\langle-, -, +\rangle_f + \\ & C_{44}AB^*|-, -, +\rangle_f\langle-, -, -\rangle_f + C_{41}B|-, -, \\ & -\rangle_f\langle+, +, +\rangle_f + C_{44}A^*B|-, -, -\rangle_f\langle-, \\ & -, +\rangle_f + C_{44}|B|^2|-, -, -\rangle_f\langle-, -, -\rangle_f \end{aligned} \quad (8)$$

从式(8)可以看出, 光场与原子相互作用系统可看作为三个两态系统, 这样我们可以采用 A. Press 提出的用部分转置矩阵的负本征值判断纠缠的方法来研究原子与光场、原子与原子间的纠缠.

由式(8)对光场求迹, 从而得到描述原子系统演化的约化密度算符

$$\rho_a(t) = C_{11}|++\rangle\langle++| + A^*C_{14}|++\rangle\langle--| \\ + AC_{41}|--\rangle\langle++| + C_{44}|--\rangle\langle--| \quad (9)$$

2 结果分析及讨论

本文采用 A. Press 提出的用部分转置矩阵的负本征值判断纠缠的方法, 即对于用密度矩阵 ρ 表示的两子系统中, 纠缠可用其密度算符的部分转置矩阵的负本征值^[15]来定义

$$E = -2 \sum_i \mu_i \quad (10)$$

式中 μ_i 是部分转置矩阵 $\bar{\rho}$ 的负本征值. 当 $E=0$ 时, 两系统是分离的, 当 $E=1$ 时, 两系统处于最大纠缠, 当 $0 < E < 1$ 时, 两子系统是纠缠的.

对式(8)中光场作转置可得部分转置矩阵 $\bar{\rho}$, 可易求得本征值满足方程

$$\lambda^4 - \lambda^3 + \frac{1}{4}(1-a)\lambda^2 + \frac{1}{4}ab\lambda - \frac{1}{16}ab^2 = 0 \quad (11)$$

式中

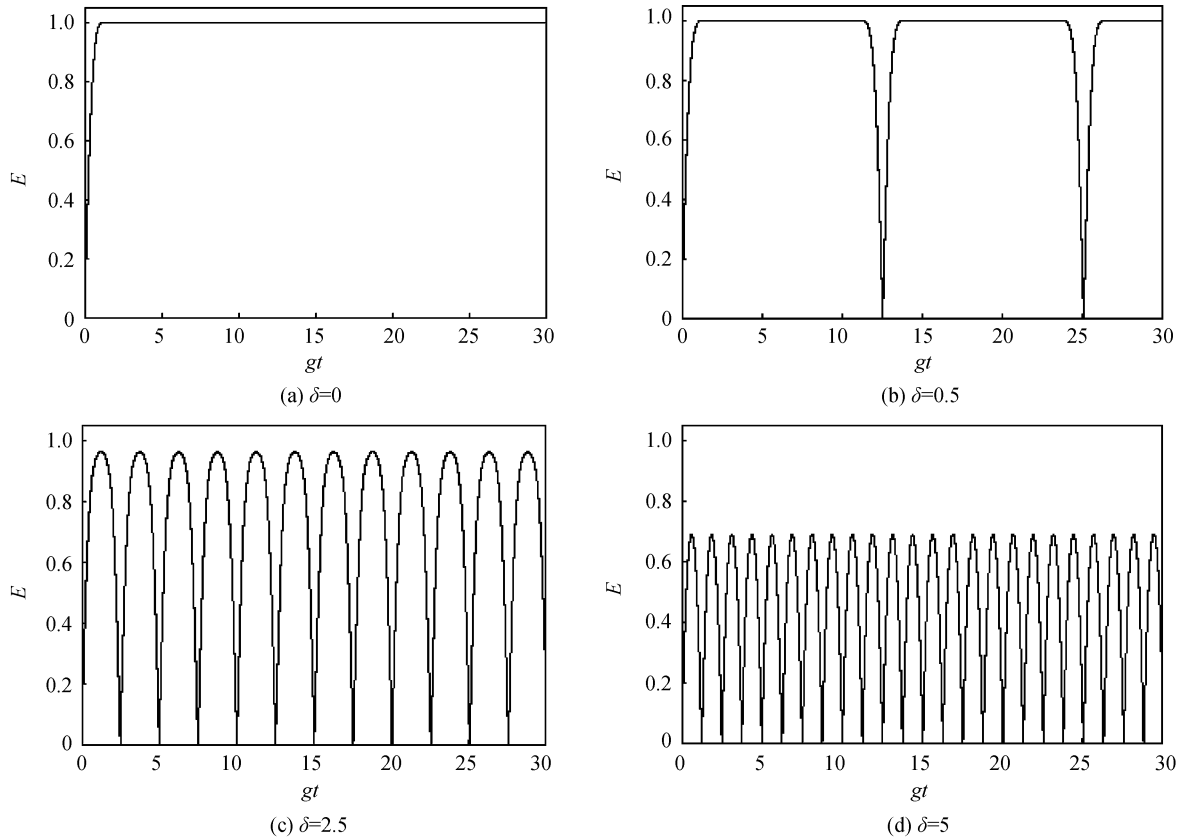
$$\begin{aligned} a &= \exp[2f(t)] \exp[-2|\beta|^2(1 + 2e^{-2\kappa t})] \\ b &= 1 - \exp(-4|\beta|^2 e^{-2\kappa t})^2 \end{aligned}$$

若不考虑腔场耗散, 即 $\kappa=0$, 由式(10)~(11)不难得到原子与光场之间的纠缠量为

$$E = \{1 - \exp[-\frac{8g^2}{\delta^2}(1 - \cos \delta t)]\}^{1/2} \quad (12)$$

由式(12)可得原子与光场之间的纠缠量 E 随时间的演化规律(如图 1).

从图 1(a) 可看出, 在原子与腔场发生共振时, 初始时刻, 原子与光场处于分离态, 随着时间的演化, 原子与光场间的纠缠量越来越大, 当 t 较大时, 其纠缠量趋于最大值. 这是因为随着时间的演化, 原子与光场相互作用系统中光场出现了 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 两分量, 且两分量与原子间的纠缠逐渐增强, 当演化时间较长时, $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 近于正交, 于是光场与原子处

图1 原子与光场纠缠量随时间的演化($\kappa=0$)Fig.1 The time evolution of the entanglement between two entangled atoms with field for $\kappa=0$

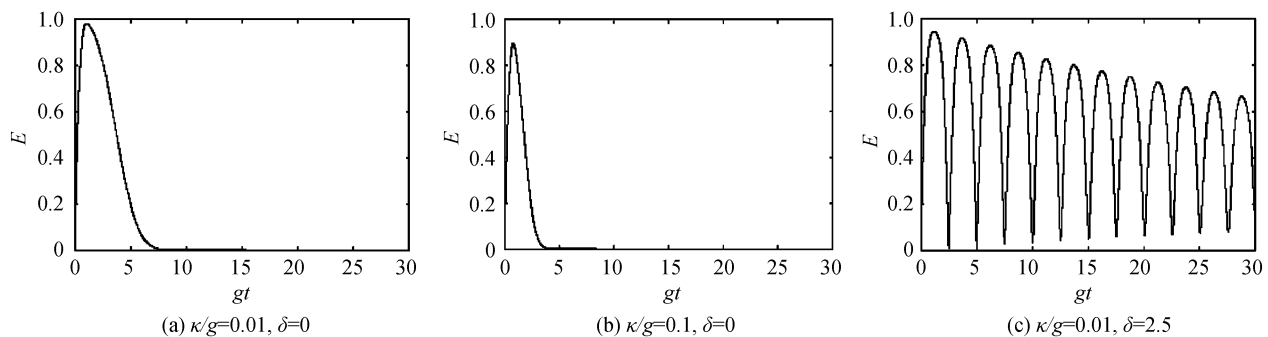
于最大纠缠,且演化时间随原子与光场耦合的增强而缩短.在原子与腔场存在失谐时,原子进入腔场后,原子与光场间的纠缠量的演化从图1(b)~(d)明显可看出,其纠缠量随时间出现周期性演化,周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\delta}$,在 $t_1 = \frac{nT_0}{2}$ 时刻, E 取极大值,且该极大值随失谐量的增加而减小,在 $t_2 = nT_0$ 时刻, $E=0$,表明在 t_1 时刻,原子与光场处于极大纠缠,且纠缠程度随失谐量的增加而减弱,在 t_2 时刻,原子与光场退纠缠.

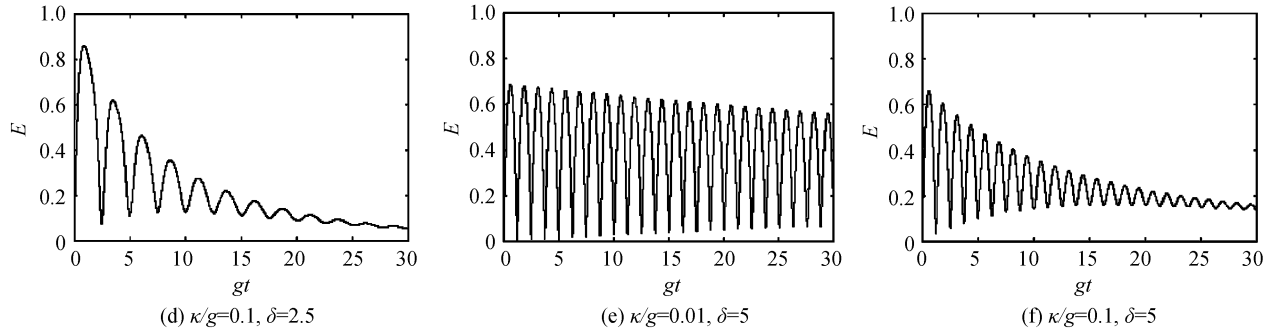
若考虑光腔的耗散,由式(10)~(11)不难求得原子与光场间的纠缠量 E 随时间的演化关系为

$$E = \frac{1}{2} [\sqrt{a} - 1 + \sqrt{(1-\sqrt{a})^2 + 4b\sqrt{a}}] \quad (13)$$

于是可得原子与光场的纠缠量 E 随时间演化规律如图2.

从图2(a)、(b)可看出,在共振条件下,原子与光场纠缠程度由弱到强,后由强变弱,最后逐渐消灭,且相互纠缠的时间和程度随光腔损耗的大小而改变.当腔场衰减较小时,原子与光场之间的纠缠时间较长,其纠缠程度相对也较强;当腔场的衰减较大时,原子与光场之间的纠缠存在较短的时间,并较快处于分离,其纠缠程度相对减弱.这是由于,原子与光场相干驱动,让光场建立了两个不同的相干分量,而腔场损耗却抑制这两分量的建立,破坏它们之间的相干性,使得纠缠出现一个最大值,且最大值与 κ/g 的值有关.从图2(c)~(f)可看出,在失谐条件



图2 原子与光场纠缠量随时间的演化($\kappa \neq 0$)Fig. 2 The time evolution of the entanglement between two entangled atoms with field for $\kappa \neq 0$

下,原子与光场间的纠缠量随时间作幅度逐渐减小的周期性振荡,其纠缠时间随失谐量的增大而延长,衰减速率随衰减常量的增大而加快.从而可看出,在较好的光腔中,适当增加失谐量可延长原子与光场纠缠时间,且原子与光场间的纠缠在较长时间内处于一大于零的较为稳定的值上,可以利用这一点得到某种纠缠态,这对制备纠缠态具有一定的价值.

对式(9)中第2原子作转置可得部分转置矩阵

$\bar{\rho}_a$,从而求出其负本征值,再利用式(10)不难算出两原子之间的纠缠量为

$$E_a = \exp \left[-\frac{2g^2}{\kappa^2 + \delta^2} \left(1 + 2\kappa t + \frac{2(\kappa^2 - \delta^2)}{\kappa^2 + \delta^2} e^{-\kappa t} \cdot \cos \delta t - \frac{4\kappa\delta}{\kappa^2 + \delta^2} e^{-\kappa t} \sin \delta t - \frac{3\kappa^2}{\kappa^2 + \delta^2} + \frac{\delta^2}{\kappa^2 + \delta^2} \right) \right] \quad (14)$$

由此可见,初始处于最大纠缠的两原子,其原子与原子间的纠缠量 E_a 随时间的演化规律见图3.

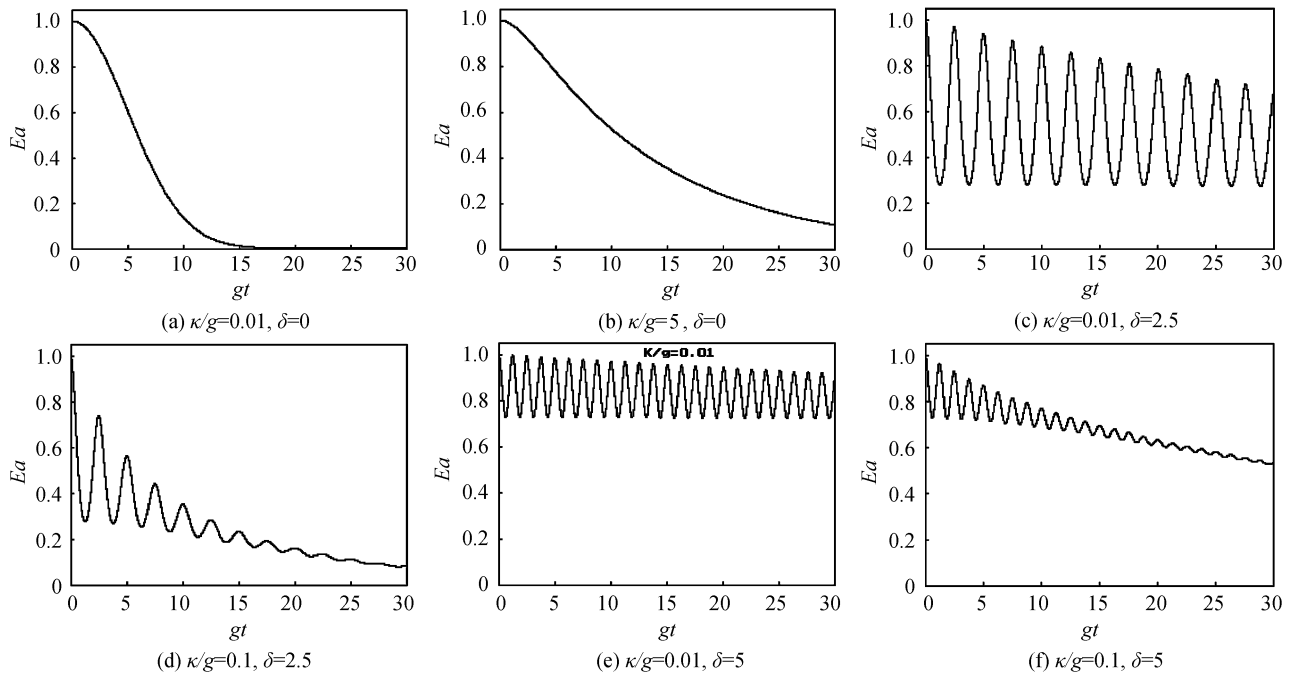
图3 两原子之间的纠缠量随时间的演化($\kappa \neq 0$)

Fig. 3 The time evolution of the entanglement between two entangled

从图3(a)可以看出,在共振条件下,两原子之间的纠缠程度随着光场的参与而逐渐减弱.当腔场衰减较小时,两原子之间的纠缠程度较快减弱,并在较短的时间内,两原子分离;当腔场衰减较大时,两原子之间的纠缠程度减弱较慢,两原子之间的纠缠在较长的时间内存在.这是由于,腔场的衰减使原子纠缠交换到原子与光场间的纠缠,而腔场越坏原子与光场建立纠缠就越弱,因此原子与原子间的纠缠保留时间就较长.从图3(c)~(f)可看出,在失谐条

件下,处于最大纠缠的两原子进入腔场后,其纠缠量随时间作逐渐衰减的周期性振荡,其周期也为 T_0 ,随着衰减常量的增大,两原子间的纠缠衰减的速率加快,而随着失谐量的增大,两原子间的纠缠时间明显延长,纠缠程度明显增加.这是由于在大失谐的情况下,光场对原子的影响减弱.

3 结论

本文通过对双原子在驱动场作用下与单模相干

光场相互作用系统密度算符的计算,利用密度算符的部分转置矩阵的负本征值方法,分析了双原子与光场之间以及两原子之间的纠缠演化特性,讨论了腔场的衰减以及原子与光场的失谐量对双原子与光场之间以及两原子之间纠缠演化特性的影响.结果表明,初始处于最大纠缠的两全同原子与单模相干光场相互作用系统,当不考虑腔场损耗时,在共振条件下,双原子与光场间的纠缠随时间较快地处于最大纠缠;而存在失谐时,原子与光场间的纠缠出现周期性的振荡,且周期为 T_0 ,在 t_1 时刻,原子与光场处于极大纠缠,且纠缠程度随失谐量的增加而减弱,在 t_2 时刻,原子与光场退纠缠.当腔场存在损耗时,在共振条件下,随着时间的演化,原子与光场较快出现纠缠,其纠缠程度由弱到强,后由强变弱,最后逐渐消失,且相互纠缠的时间随腔场衰减增大而缩短,其纠缠程度随光腔损耗的增大而相对减弱;而存在失谐时,原子与光场间的纠缠量随时间作幅度逐渐减小的周期性振荡,其纠缠时间随失谐量的增大而延长,衰减速率随衰减常量的增大而加快.对初始处于最大纠缠的两原子而言,在共振条件下,两原子间的纠缠随着衰减光场的参与而逐渐减弱,当腔场衰减较大时,两原子之间的纠缠程度减弱较缓,两原子之间的纠缠在较长的时间内存在;当存在失谐时,处于最大纠缠的两原子进入腔场后,其纠缠量随时间作逐渐衰减的周期性振荡,其周期为也 T_0 ,随着衰减常量的增大,两原子间的纠缠衰减的速率加快,随着失谐量的增大,两原子间的纠缠时间明显延长,纠缠程度明显增加.

参考文献

- [1] CHENG Qiu-li, XIE Shuang-yuan, YANG Ya-ping. The influence of the field frequency modulation on quantum entanglement via two-photon process [J]. *Acta Phys Sin* 2008, **57**(11):6968-6975.
成秋丽,谢双媛,羊亚平. 频率变化的光场对双光子过程中量子纠缠的调控[J]. 物理学报, 2008, **57**(11):6968-6975.
- [2] TAN H T, XIA H X, LI G X. Entanglement dynamics of Gaussian continuous states in correlated noisy channels[J]. *Chin Phys*, 2005, **14**(7): 1382-1386.
- [3] ZHANG Qian, LI Fu-li, LI Hong-rong. Teleportation of a two-mode Gaussian state through double two-mode-squeezed-state quantum channels[J]. *Acta Phys Sin*, 2006, **55**(5): 2275-2280.
张茜,李福利,李宏荣. 基于双模压缩信道的双模高斯态量子隐形传态[J]. 物理学报, 2006, **55**(5):2275-2280.
- [4] PAOLO Facchi, GIUSEPP Florio, GIORGIO Parisi, et al. Maximally multipartite entangled states[J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**(6):060304(4).
- [5] LI Shang-bin, XU Jing-bo. Entanglement, Bell violation, and phase decoherence of two atoms inside an optical cavity[J]. *Phys Rev A*, 2005, **72**(2):022332(9).
- [6] JIANG Dao-lai, REN Xue-zao, CONG Hong-lu, et al. Entanglement properties of two entangled atoms without rotating wave approximation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(9):1636-1640.
姜道来,任学藻,丛红璐,等. 非旋波近似下两纠缠原子的纠缠特性[J]. 光子学报, 2010, **39**(9):1636-1640.
- [7] HARIBALA, ACHUERFU, ANG Rui-fang, et al. Quantum entanglement of the squeezed coherent state interacting with a Λ -type three-level atom[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(7):1846-1851.
哈日巴拉,萨楚尔夫,杨瑞芳,等. 压缩相干态光场与 Λ 型三能级原子相互作用的纠缠特性[J]. 光子学报, 2009, **38**(7):1846-1851.
- [8] XIANG Shao-hua, YANG Xiong, SONG Ke-hui. Time evolution of two-atom entanglement and thermal entanglement in a generalized Jaynes-Cummings model [J]. *Acta Phys Sin*, 2004, **53**(5):1289-1292.
向少华,杨雄,宋克慧. 推广的 Jaynes-Cummings 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态[J]. 物理学报, 2004, **53**(5):1289-1292.
- [9] SONG Jun, CAO Zhuo-liang. Dynamical properties in the system of two identical two-level entangled atoms interacting with radiation fields in binomial states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(2):696-702.
宋军,曹卓良. 两纠缠原子与二项式光场相互作用的动力学[J]. 物理学报, 2005, **54**(2):696-702.
- [10] HUANG Chun-jia, HE Hui-yong, ZHOU Ming, et al. Entropy evolution of field interacting with two entangled-atoms[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(4):1764-1768.
黄春佳,贺慧勇,周明,等. 光场与纠缠双原子相互作用过程中的熵演化特性[J]. 物理学报, 2006, **55**(4):1764-1768.
- [11] ZHANG Ying-Jie, ZHOU Yuan, XIA Yun-Jie. The entanglement character of two entangled atoms in multiphoton Tavis-Cummings model [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(1):21-27.
张英杰,周原,夏云杰. 多光子 Tavis-Cummings 模型中两纠缠原子的纠缠演化特性[J]. 物理学报, 2008, **57**(1):21-27.
- [12] LI G X, PENG J S, WU S P, et al. Population inversion of a V-type three-level atom due to the effect of cavity-induced quantum interference[J]. *Chin Phys Lett*, 2001, **18**(1):48-50.
- [13] LAI Zhen-jiang, ZHAO He-yun, ZHANG Li, et al. Linear entropy of an atom-field system with raman coupling in dissipation cavity[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(4):734-738.
赖振讲,赵合运,张利,等. 耗散腔中 Λ 型原子与光场 Raman 相互作用体系的线性熵[J]. 光子学报, 2010, **39**(4):734-738.
- [14] MATTEO Bina, FEDERICO Casagrande, ALFREDO Lulli. Monitoring atom-atom entanglement and decoherence in a solvable tripartite open system in cavity QED[J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**(3):033839(12).
- [15] LEEJ, KIM M S. Entanglement teleportation via Werner states[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18):4236-4239.

Entanglement Properties of Two-atoms Interacting with Field in Dissipative Cavity

ZHANG Li-hui¹, LI Gao-xiang²

(1 *School of Physics and Information Engineering, Jiangnan University, Wuhan 43005, China*)

(2 *School of Physical Science and Technology, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China*)

Abstract: By means of the quantum theory, the interaction between two-atoms located inside a dissipative cavity and single-mode coherent field was studied. The entanglement properties, between two atoms and between two-atoms and light fields, were analyzed. In addition, the reason that the decay of the cavity field and the detuning between the atom and cavity field affect the evolution of entanglement was discussed. The results show that when there is cavity loss, entanglement between the atoms and light fields may occur, however entanglement gradually disappear in the long time limit. Also, the detuning between the atom and cavity field significantly affects the entanglement. The entanglement between two atoms initially in the maximally entangled states is gradually weakened due to the decay of the light field, but the detuning between the atom and the cavity field can inhibit this decay.

Key words: Dissipative cavity; Quantum entanglement; Negative eigenvalues of the partial transposition matrix