

文章编号:1004-4213(2011)03-0466-5

腔 QED 中利用超导量子干涉仪实现 Toffoli 门

彭俊, 邬云文, 李小娟

(吉首大学 物理科学与信息工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘 要:基于腔量子电动力学技术,提出了利用三能级超导量子干涉仪实现 Toffoli 门的理论方案. 利用超导量子干涉仪与腔场发生耦合,以及与外加经典脉冲发生共振跃迁来实现量子态的演化控制. 该方案可以拓展到 N 比特 Toffoli 门的实现. 最后,讨论了逻辑门的实验可行性,四比特 Toffoli 门的作用时间约为 30 ns,它远小于腔衰减时间和较高能级的能量弛豫时间,从而足以实现量子态的操控. 并且随着比特数的增多,Toffoli 门作用时间的增幅较慢.

关键词:量子光学;超导量子干涉仪;腔量子电动力学;Toffoli 门

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20114003.0466

0 引言

量子计算机的提出推动信息科学向更高层次发展,并将给信息领域带来革命性的变革. 实现量子计算机的首要任务就是要实现各种量子逻辑门. 目前已经在许多物理系统中提出了实现量子逻辑门的理论方案,如核磁共振^[1],量子点^[2],腔量子电动力学^[3-5](Quantum Electrodynamics, QED),离子阱^[6-7],以及超导电荷比特^[8].

理论上,任何复杂的量子计算都可以由单比特旋转操作和两比特逻辑门构建. 但是,如果仅用单比特和两比特逻辑门执行一些算法进行量子计算将会十分复杂,利用多比特量子逻辑门可以降低逻辑门的数量,使量子算法的执行过程将得到有效的简化,达到更快的执行速度和更高的保真度. 其中 Toffoli 门是一个典型的多比特量子逻辑门,它在执行复杂的量子算法(如 Shor 算法^[9])和量子纠错中的纠正操作上都具有很大的实际应用价值. 然而,超导量子干涉仪(Superconducting Quantum Interference Devices, SQUID)由于具有较长的消相干时间、容易集成和易于操纵等优点^[10],被认为是信息处理和量子计算的最佳选择之一. YANG Chui-Ping 和 HAN S 提出了实现 N 比特相位门的方案^[11], CHEN Chang-young, FENG Mang, GAO Ke-lin 提出了 Toffoli 门实现方案^[12], MA Chi 等提出了实现控制非门的理论方案^[13], ZHENG An-shou 等提出了实现 N 比特 Toffoli 门的方案^[14].

本文基于 Λ 型三能级结构 SQUID 的腔 QED 系统,提出了实现 Toffoli 门的理论方案. 利用超导量子干涉仪与腔场发生耦合,以及与外加经典微波脉冲产生共振跃迁控制量子态的演化. 并将该方案拓展到了实现 N 比特 Toffoli 门. 最后,计算了四比特 Toffoli 门总的作用时间约为 30 ns,随比特数增多门作用时间的增幅较小.

1 理论模型

考虑 Λ 型三能级结构的射频超导量子干涉仪,它的三个能级分别为 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ (如图 1).

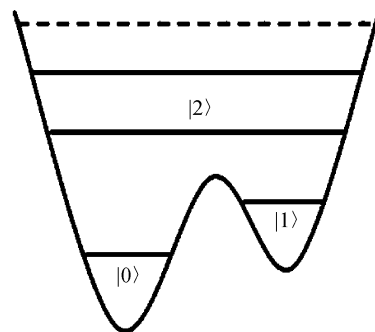


图 1 Λ 型三能级 SQUID 的能级结构

Fig. 1 Energy structure of three-level Λ -type rf-SQUID

射频超导量子干涉仪都是由一个超导环和一个约瑟夫森结组成,它们的典型尺寸为 $10\sim 100\ \mu\text{m}$. 把三个 SQUID 置入 QED 腔中驻波的三个波腹位置,用 SQUID 的 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 量子态表示量子信息比特态.

基金项目:湖南省科技计划项目(No. 2010FJ3081, No. 2008FJ3078)和教育部自然科学基金重点项目(No. 208099)资助

第一作者:彭俊(1986-),男,硕士研究生,主要研究方向为量子信息. Email: pengjun1215@126.com

导师(通讯作者):邬云文(1965-),女,教授,主要研究方向为量子信息. Email: wuyw_jd@163.com

收稿日期:2010-09-01;修回日期:2010-11-22

1.1 SQUID 与单模腔场耦合

讨论 SQUID 与一维单模腔场的耦合,其它腔模与所考虑的 SQUID 的三个能级不发生耦合,则系统的哈密顿量由三部分组成

$$H = H_c + H_s + H_1 \quad (1)$$

H_c 、 H_s 和 H_1 分别表示腔场、SQUID 和相互作用的哈密顿量. 其中 H_s 可写为^[15]

$$H_s = \frac{Q^2}{2C} + \frac{(\Phi - \Phi_x)^2}{2L} - E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi} \Phi\right) \quad (2)$$

式中 C 是约瑟夫森结电容, L 是超导环电感系数, Q 和 Φ 分别表示电容上的电量和超导环上的磁通量, Φ_x 是通过环的外部磁通量, $E_J = I_c \Phi_0 / 2\pi$ 是约瑟夫森结耦合能, $\Phi_0 = h/2e$ 是全磁通量子.

通过调节 SQUID 的量子态 $|0\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的能级间距,使腔模与 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化发生耦合,同时与另外两个演化处于高度失谐状态. 在相互作用绘景中,相互作用哈密顿量在旋波近似为^[16]

$$H_1^{(1)} = \hbar g_{02} (a^+ |0\rangle \langle 2| + a |2\rangle \langle 0|) \quad (3)$$

式中 a^+ (a) 是腔模的产生和湮灭算符, g_{02} 是腔模与 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化的耦合系数. 对于一维超导驻波腔场, g_{02} 的形式为

$$\hbar g_{02} = \frac{M_x}{L} \sqrt{\frac{\hbar \nu_c}{L_0 l}} \langle 0 | \Phi | 2 \rangle \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (4)$$

式中 M_x 是 SQUID 与腔的互感系数, L_0 是腔场单位长度的自感, ν_c 是腔模频率.

如果腔模的初态为光子数态 $|n\rangle_c$, 根据式(3)哈密顿量可以得到系统量子态的时间演化关系

$$\begin{aligned} |0\rangle |n\rangle_c &\rightarrow \cos(\sqrt{n}gt) |0\rangle |n\rangle_c - \\ & i \sin(\sqrt{n}gt) |2\rangle |n-1\rangle_c \\ |2\rangle |n\rangle_c &\rightarrow \cos(\sqrt{n+1}gt) |2\rangle |n\rangle_c - \\ & i \sin(\sqrt{n+1}gt) |0\rangle |n+1\rangle_c \end{aligned} \quad (5)$$

1.2 SQUID 与经典微波脉冲相互作用

SQUID 受到一个外加经典磁场驱动,使磁场与 SQUID 的量子态发生共振跃迁,从而控制量子态的演化. 外加磁场的形式为^[17]

$$B_{\mu\omega}(r, t) = B_{\mu\omega}(r) \cos(2\pi\nu_{\mu\omega}t + \varphi) \quad (6)$$

式中 $B_{\mu\omega}(r)$ 、 $\nu_{\mu\omega}$ 和 φ 分别为磁场微波脉冲的振幅、频率和相位.

如果外加磁场的频率与 SQUID 的 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 量子态演化的拉曼频率相等 ($\nu_{\mu\omega} = \nu_{12}$), 即发生共振. 同时,磁场与 SQUID 的另外两个量子态演化不发生共振. 在相互作用绘景中,相互作用哈密顿量在旋波近似下可写为^[16]

$$H_1^{(2)} = \frac{\hbar}{2} \Omega_{12} (e^{i\varphi} |1\rangle \langle 2| + e^{-i\varphi} |2\rangle \langle 1|) \quad (7)$$

式中 Ω_{12} 是 SQUID 的量子态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的 Rabi 频率,其形式为^[16]

$$\Omega_{12}(t) = \frac{1}{L\hbar} \langle 1 | \Phi | 2 \rangle \int_s B_{\mu\omega}(t) ds \quad (8)$$

根据式(7)哈密顿量可以得到 SQUID 的量子态 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 之间的演化关系为

$$\begin{aligned} |1\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\Omega_{12}}{2}t\right) |1\rangle - ie^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_{12}}{2}t\right) |2\rangle \\ |2\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\Omega_{12}}{2}t\right) |2\rangle - ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_{12}}{2}t\right) |1\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

如果磁场与 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 演化产生共振,同时与 SQUID 的另外两个量子态演化不发生共振. 同理,在相互作用绘景中,相互作用哈密顿量在旋波近似下为

$$H_1^{(3)} = \frac{\hbar}{2} \Omega_{01} (e^{i\varphi} |0\rangle \langle 1| + e^{-i\varphi} |1\rangle \langle 0|) \quad (10)$$

根据式(10)哈密顿量可得到 SQUID 的量子态 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 之间的演化关系为

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\Omega_{01}}{2}t\right) |0\rangle - ie^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_{01}}{2}t\right) |1\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\Omega_{01}}{2}t\right) |1\rangle - ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_{01}}{2}t\right) |0\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

2 Toffoli 门的实现

2.1 三比特 Toffoli 门的实现方法

对于三个量子比特系统,就会有 2^3 个计算基态,分别为 ($|000\rangle$ 、 $|001\rangle$ 、 \dots 、 $|111\rangle$), Toffoli 门的输入态和输出态之间的关系为

$$\begin{aligned} |000\rangle &\rightarrow |000\rangle, |001\rangle \rightarrow |001\rangle, |010\rangle \rightarrow |010\rangle, \\ |100\rangle &\rightarrow |100\rangle, |011\rangle \rightarrow |011\rangle, |101\rangle \rightarrow |101\rangle, \\ |110\rangle &\rightarrow |111\rangle, |111\rangle \rightarrow |110\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

意味着仅当前两个 SQUID1、2(控制比特)的量子态都处于状态 $|1\rangle$ 时,第三个 SQUID3(靶比特)的量子态才会发生翻转. 即原来的量子态 $|0\rangle$ ($|1\rangle$) 变换为 $|1\rangle$ ($|0\rangle$). 否则,量子态不发生任何变化.

把三个完全相同的 Λ 型三能级结构的 SQUID 分别置入驻波腔场中的波腹位置(图 2). 可以通过调整能级间距使三个量子态的任意两个之间的演化

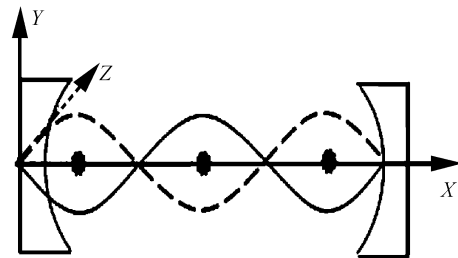


图 2 三个完全相同的 SQUID 置入驻波腔场中
Fig. 2 Schematic setup of 3 identical SQUIDs in a standing-wave cavity field

都不受第三个量子态影响. 腔模初态为真空态 $|0\rangle_c$, 通过实施以下步骤的操作可以实现 Toffoli 门.

Step(1): 使激光 π 脉冲 ($\Omega_{12}t_{\text{pulse}} = \pi$, t_{pulse} 是脉冲的持续时间), 初相为 $\varphi = -\pi/2$, 与第一个 SQUID 的 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化产生共振, 可以使量子态 $|1\rangle_1$ 变换到量子态 $|2\rangle_1$.

Step(2): 使腔模与第一个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化相互耦合, 相互作用时间 $t_1 = \pi/2g_1$, 导致量子态 $|2\rangle_1|0\rangle_c$ 变换到量子态 $-i|0\rangle_1|1\rangle_c$.

Step(3): 使腔模与第二个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化相互耦合, 相互作用时间 $t_2 = \pi/2g_2$, 导致量子态 $|0\rangle_2|1\rangle_c$ 变换到量子态 $-i|2\rangle_2|0\rangle_c$, 量子态 $|1\rangle_2|1\rangle_c$ 仍然保持不变.

Step(4): 使 $\pi/2$ 微波脉冲 ($\Omega_{01}t_{\text{pulse}} = \pi/2$), 初相为 $\varphi = -\pi/2$, 与第三个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 演化发生共振, 使得量子态 $|0\rangle_3$ 变换到 $1/\sqrt{2}(|0\rangle_3 + |1\rangle_3)$, 同时使量子态 $|1\rangle_3$ 变换到 $1/\sqrt{2}(|0\rangle_3 - |1\rangle_3)$.

Step(5): 使腔模与第三个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化相互耦合, 相互作用时间 $t_3 = \pi/g_3$, 导致量子态 $|0\rangle_3|1\rangle_c$ 变换到量子态 $-|0\rangle_3|1\rangle_c$.

Step(6): 重复“Step(4)”操作, 再次对第三个 SQUID 作用.

Step(7): 使腔模与第二个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 变换相互耦合, 相互作用时间 $t_2 = \pi/2g_2$, 导致量子态 $|2\rangle_2|0\rangle_c$ 变换到量子态 $-i|0\rangle_2|1\rangle_c$, 量子态 $|1\rangle_2|1\rangle_c$ 仍然保持不变.

Step(8): 使腔模与第一个 SQUID 的 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 变换相互耦合, 相互作用时间 $t_1 = \pi/2g_1$, 导致量子态 $|0\rangle_1|1\rangle_c$ 变换到量子态 $-i|2\rangle_1|0\rangle_c$.

Step(9): 使 π 微波脉冲 ($\Omega_{12}t_{\text{pulse}} = \pi$), 初相 $\varphi = \pi/2$, 与第一个 SQUID 的量子态 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 演化发生共振, 使得量子态 $|2\rangle_1$ 变换到量子态 $|1\rangle_1$.

系统经过以上的操作步骤实现 Toffoli 门的量子态具体演化过程为

$$\begin{aligned}
 & |100\rangle|0\rangle_c \quad |200\rangle|0\rangle_c \quad -i|000\rangle|1\rangle_c \quad -|020\rangle|0\rangle_c \quad -1/\sqrt{2}|02\rangle(|0\rangle_3 + |1\rangle_3)|0\rangle_c \\
 & |101\rangle|0\rangle_c \xrightarrow{(1)} |201\rangle|0\rangle_c \xrightarrow{(2)} -i|001\rangle|1\rangle_c \xrightarrow{(3)} -|021\rangle|0\rangle_c \xrightarrow{(4)} -1/\sqrt{2}|02\rangle(|0\rangle_3 - |1\rangle_3)|0\rangle_c \xrightarrow{(5)} \\
 & |110\rangle|0\rangle_c \quad |210\rangle|0\rangle_c \quad -i|010\rangle|1\rangle_c \quad -i|010\rangle|1\rangle_c \quad -i/\sqrt{2}|01\rangle(|0\rangle_3 + |1\rangle_3)|1\rangle_c \\
 & |111\rangle|0\rangle_c \quad |211\rangle|0\rangle_c \quad -i|011\rangle|1\rangle_c \quad -i|011\rangle|1\rangle_c \quad -i/\sqrt{2}|01\rangle(|0\rangle_3 - |1\rangle_3)|1\rangle_c \\
 & -1/\sqrt{2}|02\rangle(|0\rangle_3 + |1\rangle_3)|0\rangle_c \quad -|020\rangle|0\rangle_c \quad i|000\rangle|1\rangle_c \quad |200\rangle|0\rangle_c \quad |100\rangle|0\rangle_c \\
 & -1/\sqrt{2}|02\rangle(|0\rangle_3 - |1\rangle_3)|0\rangle_c \xrightarrow{(6)} -|021\rangle|0\rangle_c \xrightarrow{(7)} i|001\rangle|1\rangle_c \xrightarrow{(8)} |201\rangle|0\rangle_c \xrightarrow{(9)} |101\rangle|0\rangle_c \\
 & -i/\sqrt{2}|01\rangle(-|0\rangle_3 + |1\rangle_3)|1\rangle_c \quad i|011\rangle|1\rangle_c \quad i|011\rangle|1\rangle_c \quad |211\rangle|0\rangle_c \quad |111\rangle|0\rangle_c \\
 & -i/\sqrt{2}|01\rangle(-|0\rangle_3 - |1\rangle_3)|1\rangle_c \quad i|010\rangle|1\rangle_c \quad i|010\rangle|1\rangle_c \quad |210\rangle|0\rangle_c \quad |110\rangle|0\rangle_c
 \end{aligned} \tag{13}$$

经过式(13)九步操作便实现了 Toffoli 门. 式中 $|\alpha\beta\gamma\rangle$ 是量子比特态 $|\alpha\rangle_1, |\beta\rangle_2, |\gamma\rangle_3$ 的简写, 其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$. 实现过程中, 第一个控制比特量子态为 $|0\rangle_1$ 时的部分初态 $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle$ 和 $|011\rangle$, 只在 Step(4) 和 Step(6) 有变化, 并且两步演化的结果为不变操作, 为了书写的方便, 省略了这四个初态在演化过程中的描述.

2.2 N 比特 Toffoli 门的实现

N 比特 Toffoli 门的输入态与输出态之间的关系可以由式(14)描述

$$|i_1 i_2 \cdots i_l \cdots i_n\rangle \rightarrow |i_1 i_2 \cdots i_{n-1}\rangle \otimes (X^{i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_{n-1}} |i_n\rangle) \tag{14}$$

$i_n \in \{0, 1\}$ 表示第 n 个超导量子比特的量子态, X 为 Pauli-X 表示逻辑非门 ($X^0 = I, I$ 为单位矩阵). 意思就是在前 $n-1$ 个 SQUID 的量子态都为 $|1\rangle$ 时, 第 n 个 SQUID 的量子态会发生翻转. 否则, 第 n 个 SQUID 的量子态不发生翻转.

如图 2, 将 n 个 SQUID 置入驻波腔场的 n 个波腹位置, 系统共有 2^n 个计算基态, 腔模的初态为真空态 $|0\rangle_c$. 根据式(5)、(9)和(11)的量子态演化关系, N 个超导量子比特系统的初 $|i_1 i_2 \cdots i_l \cdots i_n\rangle |0\rangle_c$ 经过以下时间演化算符 U 的连续作用后, 可以实现 N 比特 Toffoli 门.

$$\begin{aligned}
 U &= U_1^+ \otimes \left(\prod_{l=n-1}^1 U_{lc} \right) \otimes U_n^{1/2} \otimes U_{nc}^2 \otimes \\
 & U_n^{1/2} \otimes \left(\prod_{l=1}^{n-1} U_{lc} \right) \otimes U_1
 \end{aligned} \tag{15}$$

1) 公式中 $U_1 (U_1^+)$ 表示第一个超导量子比特的量子态演化, 都是受到 π 脉冲驱动 ($\Omega_{12}t_{\text{pulse}} = \pi$) 初相为 $\varphi = -\pi/2 (\pi/2)$, 如果 $|1\rangle = (0, 1)^T, |2\rangle = (1, 0)^T$ 则

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

2) U_{lc} 表示第 $l (l \in \{1, 2, \dots, n-1\})$ 个 SQUID 的

量子态演化,都是腔场与 SQUID 发生耦合,相互作用时间 $t_l = \pi/2g_l$. 如果 $|0\rangle = (0, 1)^T$, $|2\rangle = (1, 0)^T$ 则

$$U_{lr} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

3) $U_n^{1/2}$ 表示第 n 个超导量子比特的量子态演化,都是受到 $\pi/2$ 脉冲驱动,初相为 $\varphi = -\pi/2$,遵守式(11)的量子态演化规律.

$$U_n^{1/2} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

4) U_m^2 表示第 n 个 SQUID 的量子态演化,使腔场与 SQUID 发生耦合,相互作用时间 $t_n = \pi/g_n$,可视为两个 U_m 连续作用

$$U_m^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

初态为 $|i_1 i_2 \dots i_l \dots i_n\rangle$ 的 N 个 SQUID 经过式(15)时间演化算符的连续作用后,便可以得到最终量子态为 $|i_1 i_2 \dots i_{n-1}\rangle \otimes (X^{i_1 \times i_2 \dots i_{n-1}} |i_n\rangle)$,即实现了 N 比特 Toffoli 门.

3 讨论和 Toffoli 门作用时间计算

本文选择的实验参量^[14,17]分别为 $L = 36$ pH, $C = 36$ fF, $\beta_L = 1.10$, $\Phi_e = 0.499$ $3\Phi_0$, ($\Phi_0 = h/2e$), $R \approx 10^8 \Omega$, R 是电容两端的“跳跃”电阻, β_L 表示势垒参量,可以得到 SQUID 激发能级 $|2\rangle$ 的驰豫时间 $r_2^{-1} \approx 16$ μs ,能级 $|0\rangle$ 、 $|2\rangle$ 之间的耦合矩阵元 $\Phi_{02} \approx 2.9 \times 10^{-2}$,以及能级 $|0\rangle$ 、 $|2\rangle$ 之间的跃迁频率为 49.2 GHz. 本文选择腔的频率为 $\omega_c/2\pi = 49$ GHz,可以计算出 $g = 1.2 \times 10^9$ s^{-1} ,若 $\Omega \approx 0.83$ g,可以得到 $t_c = \pi/2g = 1.31$ ns, $t_{\text{iso}} = \pi/\Omega = 3.14$ ns. 实现 N 比特 Toffoli 门总操作时间 $\tau = 2n(t_c + t_a) + 3t_{\text{iso}}$, t_a 表示典型的单个超导量子比特的能级间隔调节时间. 如果 $t_a = t_c$,以四比特为例,可以得到 Toffoli 门总的操作时间为 $\tau = 30.38$ ns. 选择腔的品质因数 $Q = 4 \times 10^6$,则腔的衰减时间 $\kappa^{-1} = 13$ μs . 总的操作时间 τ 远远小于腔的衰减时间 κ^{-1} 和 SQUID 能级 $|2\rangle$ 的能量驰豫时间 r_2^{-1} ,可见足以在实验上实现量子态的操控. 还通过以下措施提高实验性能^[20]: 1) 通过快速调节超导比特的能级间隔可以使 t_a 缩短; 2) 通过增大 Ω 可以减小经典脉冲与超导比特之间的相互作用时间; 3) 使用高品质因数的腔模可以延长腔的寿命; 4) 通过合理的设计可以使超导量子比特的激发能级 $|2\rangle$ 的驰豫时间足够长.

本方案相比于常规的逻辑门分解协议^[19],在实现 N 比特 Toffoli 门的方法上将会更加简单. 我们将以三个比特为例加以说明,用逻辑门分解协议构

建一个三比特 Toffoli 门需要六个两比特控制非门和十个单比特门(包括两个 Hadamard 门,一个相位门和七个 $\pi/8$ 门). 众所周知,构建控制非门可以用到一个两比特相位门和两个 Hadamard 门. 若经过一步操作便可以实现两比特相位门和单比特门,用逻辑门分解协议构建三比特 Toffoli 门至少需要二十八步操作,而本方案只需前面所述的九步操作便可以实现 Toffoli 门. 显然本方案要比运用逻辑门分解协议简单很多,并且可以大大地缩短逻辑门的操作时间.

4 结论

本文基于腔 QED 技术,提出了利用三能级 SQUID 实现 Toffoli 门的理论方案. 在门实现过程中,通过使 SQUID 与微波腔场发生耦合,以及与外加经典脉冲发生共振跃迁来控制量子态的演化, SQUID 的两个较低能级作为量子信息比特,较高能级作为辅助比特. 该方案实现四比特 Toffoli 门的作用时间为 30 ns,远小于腔衰减时间和能级 $|2\rangle$ 的能量驰豫时间,从而足以实现量子态的操控. 此方案还拓展到了 N 比特 Toffoli 门的实现. Toffoli 门的作用时间得到了提高,且门的作用时间随比特数增多的增幅较慢,特别是随着比特数的增加,该方案的优势将会显得更加突出. 例如比特数增加到 $n = 10$,门作用时间可以从 419.2 ns 降低到 61.8 ns. 并且 N 比特 Toffoli 门在执行量子纠错协议、量子算法和构建量子计算网络等应用方面都具有重要的意义.

参考文献

- [1] JI Ying-hua, CAI Shi-hua, LE Jian-xing, *et al.* Operating a geometric quantum gate by externalcontrollable parameters [J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(1): 311-316.
- [2] LI Xiao-qin, WU Yan-wen, STEEL D, *et al.* An all-optical quantum gate in a semiconductor quantum dot [J]. *Science*, 2003, **301**(5634): 809-811.
- [3] ZHOU Ai-dong, ZHANG Shou, YEON K H, *et al.* Efficientcoherent scheme for implementing an N-qubit toffoli gate by a single resonant interaction with cavity quantum electrodynamics [J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(3): 4307-4310.
- [4] SONG Ke-hui. Scheme for quantum information processing via Λ -type atoms interacting with bimodal cavity field [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(10): 4730-4735.
宋克慧. 利用 Λ 型原子与双模腔场的相互作用进行量子信息处理 [J]. *物理学报*, 2005, **54**(10): 4730-4735.
- [5] ZHAO Han, ZHOU Xiao-qing, YANG Xiao-lin. Establishment of multi-user quantum channel of entangled multi-atom based on cavity QED [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(9): 5970-5977.
赵晗,周小清,杨小琳. 基于腔 QED 的多用户间的多原子量子信道的建立 [J]. *物理学报*, 2009, **58**(9): 5970-5977.
- [6] WU Yun-wen, HAI Wen-hua, CAI Li-hua. Energy band structure of two ions in a one-dimensional paul trap [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 583-589.

- 邬云文,海文华,蔡丽华. Paul 阱中一维两离子系统的能带结构[J]. 物理学报, 2006, **55**(2): 583-589.
- [7] WU Yun-wen, HAI Wen-hua. Exact quantum motions of two ions in a two-dimensional Paul trap[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(11): 5721-5727.
- 邬云文,海文华. 共面两囚禁离子体系精确的量子运动[J]. 物理学报, 2006, **55**(11): 5721-5727.
- [8] YAMAMOTO T, PASHKIN Y A, ASTAFIEV O, *et al.* Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits[J]. *Nature*, 2003, **425**: 941-944.
- [9] VANDERSYPEN L M K, STEFFEN M, BREYTA G, *et al.* Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance[J]. *Nature*, 2001, **414**: 883-887.
- [10] MAJER J B, PAAUW F G, MOOIJ J E, *et al.* Spectroscopy on two coupled superconducting flux qubits[J]. *Physical Review Letters*, 2005, **94**(9): 501-504.
- [11] YANG Chui-ping, HAN S. *n*-qubit-controlled phase gate with superconducting quantum-interference devices coupled to a resonator[J]. *Physical Review A*, 2005, **72**(3): 2311-2318.
- [12] CHEN Chang-yong, FENG Mang, GAO Ke-lin. Toffoli gate originating from a single resonant interaction with cavity QED[J]. *Physical Review A*, 2006, **73**(6): 4304-4307.
- [13] MA Chi, ZHANG Shi-jun, HE Juan, *et al.* Implementation of a controlled-NOT gate using superconducting quantum interference devices[J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, **25**(2): 383-385.
- [14] ZHENG An-shou, LIU Ji-bing, XIANG Dong, *et al.* An efficient scheme for implementing an *n*-qubit toffoli gate with superconducting quantum-interference devices in cavity QED[J]. *Chinese Physics Letters*, 2007, **24**(9): 2489-2493.
- [15] YANG Chui-ping, CHU S I, HAN Si-yuan. Quantum information transfer and entanglement with SQUID qubits in cavity QED: a dark-state scheme with tolerance for nonuniform device parameter[J]. *Physical Review Letters*, 2004, **92**(11): 7901-7904.
- [16] YANG Chui-ping, CHU S I, HAN S. Possible realization of entanglement, logical gates, and quantum-information transfer with superconducting-quantum-interference-device qubits in cavity QED[J]. *Physical Review A*, 2003, **67**(4): 2311-2318.
- [17] YANG Chui-ping, HAN S. Preparation of Greenberger-Horne-Zeilinger entangled states with multiple superconducting quantum-interference device qubits or atoms in cavity QED[J]. *Physical Review A*, 2004, **70**(6): 2323-2329.
- [18] YU Yang, NAKADA D, BERGGREN K K, *et al.* Energy relaxation time between macroscopic quantum levels in a superconducting persistent-current qubit [J]. *Physical Review Letters*, 2004, **92**(11): 7904-7907.
- [19] NIELSEN M A. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 182-195.

Realization of Toffoli Gate Based on Superconducting Quantum-Interference Devices in Cavity Quantum Electrodynamics

PENG Jun, WU Yun-wen, LI Xiao-juan

(College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University, Jishou, Hunan 416000, China)

Abstract: A theory scheme was proposed for implementing a Toffoli gate with three-level structure superconducting quantum-interference devices (SQUID), based on the cavity quantum electrodynamics (CQED). In this proposal, quantum information was encoded into the two lower levels of a SQUID while a higher level serves as the gate manipulation. Applying the coupling of the cavity field with a SQUID, which was driven by a classical microwave pulse to control the evolution of quantum state, the scheme could be extended to achieve *N*-qubit Toffoli gate. And, the experimental feasibility of Toffoli gate was discussed, and the total operation time of four-qubit Toffoli gate was computed only 30 nanometers, which was much shorter than the decay time of the cavity mode or the energy relaxation time of the higher level. And the increasing rate of the gate response time became slow with the increase of the qubit number.

Key words: Quantum optics; Superconducting Quantum-Interference Device (SQUID); Cavity Quantum Electrodynamics (QED); Toffoli gate